Лекция 2. Множественная регрессия

Вопросы:

1. Классическая модель множественной линейной регрессии в матричной форме
2. Оценка параметров МНК
3. Ковариационная матрица
4. Множественные коэффициенты детерминации и корреляции. Оценка значимости множественной регрессии
5. Оценка значимости параметров. Интервальная оценка параметров и прогноза
6. Понятие и проблема мультиколлинеарности факторов и способы ее преодоления
7. Коэффициент частной корреляции
8. Свойства оценок МНК
9. Стандартизованные коэффициенты регрессии, коэффициенты раздельной детерминации. Модель регрессии в стандартизованной форме.
10. Обобщенная линейная модель. ОМНК
11. Гетероскедастичность. Тесты на гетероскедастичность. ВМНК
12. Отбор наиболее существенных объясняющих переменных в модель множественной регрессии
13. Уравнение регрессии с фиктивными переменными. Критерий Чоу
14. Нелинейные модели множественной регрессии. Производственные функции
15. Вопросы для повторения и самостоятельного изучения

1. Классическая модель множественной линейной регрессии в матричной форме

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \ldots + \beta_p x_{ip} + \varepsilon_i$$

где i=1,2…n – номер наблюдения, число объясняющих переменных (*x*) равно *p*.

β_i-коэффициент чистой регрессии*, показывает на сколько единиц изменится зависимая переменная, если независимая – x_i – изменится на единицу, при условии, что все остальные факторы будут зафиксированы на среднем уровне.*

1. Классическая модель множественной линейной регрессии в матричной форме

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1p} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{np} \end{pmatrix}$$

матрица объясняющих переменных размера $n \times (p+1)$

Предпосылка 6.

Векторы значений объясняющих переменных (столбцы матрицы *X*) должны быть линейно независимыми, т.е. ранг матрицы – максимальный $(X) = p+1$

1. Классическая модель множественной линейной регрессии в матричной форме

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1p} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{np} \end{pmatrix};$$

$$\beta = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_p \end{pmatrix}; \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \dots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}, \text{тогда в матричной форме: } Y = X\beta + \varepsilon.$$

$$\text{Выборочная оценка: } Y = Xb + e, \text{ где}$$

$$b = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \dots \\ b_p \end{pmatrix}, e = \begin{pmatrix} e_0 \\ e_1 \\ \dots \\ e_n \end{pmatrix}.$$

2. Оценка параметров МНК

$$e'e = (e_1 e_2 \ldots e_n)\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \ldots \\ e_n \end{pmatrix} = e_1^2 + e_2^2 + \ldots e_n^2 = \sum_{i=1}^{n} e_i^2, \textit{условие минимизации}:$$

$$\sum_{i=1}^{n} (\tilde{y}_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = e'e = (Y - Xb)'(Y - Xb) \to \min$$

$$X'Xb = X'Y$$

$$\boxed{b = (X'X)^{-1} X'Y}$$

2. Оценка параметров МНК

$$\textit{Пример}:$$

$$b_0 + b_1 x_1 = y$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \ldots & \ldots \\ 1 & x_m \end{pmatrix}; y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix};$$

$$X'X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \ldots & \ldots \\ 1 & x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{pmatrix}$$

$$\textit{Тогда}\ \ X'Xb = X'Y: \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} y_i x_i \end{pmatrix}$$

2. Оценка параметров МНК

Метод Крамера:

$$b_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}$$

Δ – *определитель матрицы* X;

Δ_j – *определитель матрицы, получающейся при замене*

j – *й независимой переменной матрицы* X *вектором* Y

3. Ковариационная матрица

$$\Sigma_b = \begin{pmatrix} \sigma_{00} & \sigma_{01} & \dots & \sigma_{0p} \\ \sigma_{10} & \sigma_{11} & \dots & \sigma_{1p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{p0} & \sigma_{p1} & \dots & \sigma_{pp} \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{ij} = M\left[(b_i - M(b_i))(b_j - M(b_J))\right], \textit{поскольку}\ M(b_j) = \beta_j$$

$$\sigma_{ij} = M\left[(b_i - \beta_i)(b_j - \beta_j)\right] = M\left[(b-\beta)(b-\beta)'\right],$$

$$\Sigma_b = M\left[(b-\beta)(b-\beta)'\right]$$

$$\textit{так как}\ \ b = \beta + (X'X)^{-1}X'\varepsilon,$$

$$\textit{получим}: \Sigma_b = \left\{\left[(X'X)^{-1}X'\varepsilon\right]\left[(X'X)^{-1}X'\varepsilon\right]'\right\}$$

$$\Sigma_b = (X'X)^{-1}X'M(\varepsilon\varepsilon')X(X'X)^{-1}$$

3. Ковариационная матрица

$$\Sigma_\varepsilon = M(\varepsilon\varepsilon') = \begin{pmatrix} M(\varepsilon_1^2) & M(\varepsilon_1\varepsilon_2) & \ldots & M(\varepsilon_1\varepsilon_n) \\ M(\varepsilon_2\varepsilon_1) & M(\varepsilon_2^2) & \ldots & M(\varepsilon_2\varepsilon_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ M(\varepsilon_n\varepsilon_1) & M(\varepsilon_n\varepsilon_2) & \ldots & M(\varepsilon_n^2) \end{pmatrix}$$

$$M(\varepsilon_i^2) = M(\varepsilon_i - 0)^2 = \sigma^2$$

$$\boxed{M(\varepsilon\varepsilon') = \sigma^2 E_n}$$

$$\boxed{\Sigma_b = \sigma^2 (X'X)^{-1}}$$

3. Ковариационная матрица

Предпосылки множественной регрессии в матричной форме:

$$1.\ \varepsilon - \textit{случайный вектор}, X - \textit{неслучайная матрица}.$$

$$2. M(\varepsilon) = 0_n$$

$$3,4. \Sigma_{\varepsilon} = M(\varepsilon\varepsilon') = \sigma^2 E_n$$

$$5. \varepsilon - \textit{нормально распределенный вектор}$$

$$6. r(X) = (p+1) < n$$

4. Множественные коэффициенты детерминации и корреляции. Оценка значимости множественной регрессии

$$R^2 = \frac{W_R}{W_y} = 1 - \frac{W_e}{W_y} = 1 - \frac{e'e}{y'y},$$

$$y = (Y - \overline{Y})$$

$$R_н^2 = 1 - \frac{n-1}{n-p-1}(1 - R^2)$$

$$F = \frac{R^2(n-p-1)}{(1-R^2)p} > F_{\alpha;p;n-p-1}$$

4. Множественные коэффициенты детерминации и корреляции. Оценка значимости множественной регрессии

$$R^2 = 1 - \frac{A}{A_{11}}$$

$$R^2 = 1 - \frac{\begin{bmatrix} 1 & r_{yx_1} & r_{yx_2} \\ r_{yx_1} & 1 & r_{x_1x_2} \\ r_{yx_2} & r_{x_1x_2} & 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & r_{x_1x_2} \\ r_{x_1x_2} & 1 \end{bmatrix}} = \frac{r^2_{yx_1} + r^2_{yx_2} - 2r_{yx_1} r_{yx_2} r_{x_1x_2}}{1 - r^2_{x_1x_2}}$$

5. Оценка значимости параметров. Интервальная оценка параметров и прогноза

$$m_{b_j}^2 = S_{b_j}^2 = S_e^2\left[(X'X)^{-1}\right]_{jj}$$

$$m_{b_j} = S_{b_j} = \sqrt{S_e^2\left[(X'X)^{-1}\right]_{jj}}$$

$$S_e = \sqrt{\frac{e'e}{n-p-1}} = \sqrt{\frac{W_e}{n-p-1}}$$

$$X'_n = (1x_{1n}x_{2n}\ldots x_{pn}), Y_n = X'_n b$$

$$m_{\tilde{y}_n} = \sqrt{S_e^2 X'_n (X'X)^{-1} X_n}$$

$$m_{y_n} = \sqrt{S_e^2 (1 + X'_n (X'X)^{-1} X_n)}$$

6. Понятие мультиколлинеарности и способы ее преодоления

$$T = 1 - R^2_{x_i . x_{1 \dots} x_{i-1}, x_{i+1 \dots} x_p}$$

$$-1 \cdot A^{-1}$$

$$b = \left[X'X + \lambda E_{p+1} \right]^{-1} X'Y$$

7.Коэффициент частной корреляции

Выборочным частным коэффициентом корреляции (частным коэффициентом корреляции) между переменными x_i и x_j при фиксированных значениях остальных (p-2) переменных называется выражение:

$$r_{ij.1,2...p} = \frac{-q_{ij}}{\sqrt{q_{ii}q_{jj}}},$$

где через q обозначены алгебраические дополнения, например:

$q_{ij} = (-1)^{(i+j)} M_{ij}$ - алгебраическое дополнение, а M_{ij} - минор (определитель матрицы парных коэффициентов корреляции, получаемый при вычеркивании i-той строки и j-го столбца).

$$r_{yx_1.x_2} = \frac{-q_{yx_1}}{\sqrt{q_{yy}q_{x_1x_1}}} \qquad r_{yx_2.x_1} = \frac{-q_{yx_2}}{\sqrt{q_{yy}q_{x_2x_2}}} \qquad r_{x_1x_2.y} = \frac{-q_{x_1x_2}}{\sqrt{q_{x_1x_1}q_{x_2x_2}}}$$

7.Коэффициент частной корреляции

$$r_{ij.k} = \frac{r_{ij} - r_{ik} r_{jk}}{\sqrt{(1 - r_{ik}^2)(1 - r_{jk}^2)}}$$

Показатели частной корреляции представляют собой отношение сокращения остаточной дисперсии за счет дополнительного включения в анализ нового фактора к остаточной дисперсии, имевшей место до введения его в модель. В общем виде:

$$r_{ij.1.2...i-1,i+1...j-1,j+1...p} = \sqrt{\frac{W_{i1,2...i-1,i+1...j-1,j+1...p} - W_{i1,2...j...p}}{W_{i1,2...i-1,i+1...j-1,j+1...p}}},$$

где $W_{i1,2...j...p}$ - остаточный обьем вариации при построении модели регрессии зависимой переменной i от всего набора (р-1) переменных;

$W_{i1,2...i-1,i+1...j-1,j+1...p}$ - остаточный обьем вариации модели регрессии зависимой переменной i от (р-2) набора переменных (за исключением j).

В случае трех переменных: $r_{ij.k} = \sqrt{\frac{W_{ik} - W_{ijk}}{W_{ik}}}$.

7.Коэффициент частной корреляции

$$r_{ij.1,2...i-1,i+1...j-1,j+1...p} = \sqrt{1 - \frac{1 - R^2_{i1,2...p}}{1 - R^2_{i1,2...j-1,j+1...p}}}.$$

В случае трех переменных:

$$r_{ij.k} = \sqrt{1 - \frac{1 - R^2_{ijk}}{1 - r^2_{ik}}}$$

Коэффициент частной корреляции может быть найден как обычный коэффициент парной корреляции между остатками моделей регрессии x_i по x_k $(e_{x_i.x_k})$ и x_j по x_k $(e_{x_j.x_k})$.

8. Свойства оценок МНК

1. Оценки b являются несмещенными, т.е.

$$M(b_i) = \beta,$$

b_i – *оценки по всем возможным выборкам.*

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

$$b = (X'X)^{-1}X'Y = (X'X)^{-1}X'(X\beta + \varepsilon) =$$

$$= (X'X)^{-1}(X'X)\beta + (X'X)^{-1}X'\varepsilon = E\beta + (X'X)^{-1}X'\varepsilon =$$

$= \beta + (X'X)^{-1}X'\varepsilon$, *т.е. оценки параметров, найденные по выборке, будут содеражать случайные ошибки*

Поскольку $M(\varepsilon) = 0$, *то*

$$M(b) = M(\beta + (X'X)^{-1}X'\varepsilon) = M(\beta) + M(X'X)^{-1}X'\varepsilon) =$$

$$= M(\beta) + (X'X)^{-1}M(X'\varepsilon) = \beta$$

Требование несмещенности гарантирует отсутствует систематических ошибок при оценивании

8. Свойства оценок МНК

2. По *теореме Гаусса-Маркова* при выполнении предпосылок 1-4, 6 *несмещенная оценка МНК*

$$b = (X'X)^{-1} X'Y$$

является *наиболее эффективной*, т.е. обладает наименьшей дисперсией в классе линейных несмещенных оценок.
Эффективность является решающим свойством, определяющим качество оценок.

8. Свойства оценок МНК

3. Оценки b являются состоятельными, т.е. при увеличении численности выборки сходятся по вероятности к оцениваемым параметрам:

$$\lim_{n\to\infty} P(|\beta - b|) \le \varepsilon) = 1$$

или

$$b \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} \beta$$

В случае использования состоятельных оценок оправдывается увеличение объема выборки, так как при этом становятся маловероятными значительные ошибки при оценивании. При построении множественной модели регрессии на каждый фактор должно приходиться по 6-10 наблюдений.

9. Стандартизованные коэффициенты регрессии, коэффициенты раздельной детерминации. Модель регрессии в стандартизованной форме

Стандартизованные коэффициенты регрессии $\beta - коэффициенты$:

$$\beta_j = b_j \frac{\sigma_{x_j}}{\sigma_y}$$

Величина бета-коэффициента показывает, на сколько средних квадратических отклонений изменится y, если x_j изменится на одно среднее квадратическое отклонение.

Для парной модели регрессии β-коэффициент равен коэффициенту корреляции:

$$r = \frac{\operatorname{cov}(x;y)}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\sum (x-\bar{x})(y-\bar{y})}{n\sigma_x \sigma_y} = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\cdot\bar{y}}{\sigma_x \sigma_y}$$

$$b = \frac{\operatorname{cov}(x;y)}{\sigma_x^2}$$

$$\boxed{r = \beta = b\frac{\sigma_x}{\sigma_y}}$$

9. Стандартизованные коэффициенты регрессии, коэффициенты раздельной детерминации. Модель регрессии в стандартизованной форме

Уравнение прямой, проходящей через точку $M(\bar{x};\bar{y})$

$$(y-\bar{y}) = b(x-\bar{x})$$

$$(y-\bar{y}) = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-\bar{x})$$

$$\frac{(y-\bar{y})}{\sigma_y} = r\frac{(x-\bar{x})}{\sigma_x}$$

$$t_y = rt_x \Rightarrow r = \frac{t_y}{t_x}$$

$$t_y = \beta t_x, r = \beta$$

$$r = \frac{1}{n}\frac{\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sigma_x\sigma_y} = \frac{1}{n}t_x t_y = \overline{t_x t_y}$$

$$\overline{t_x t_x} = \overline{t_y t_y} = 1$$

9. Стандартизованные коэффициенты регрессии, коэффициенты раздельной детерминации. Модель регрессии в стандартизованной форме

Уравнение двухфакторной модели регрессии в стандартизованной форме:

$$\beta_1 t_{x_1} + \beta_2 t_{x_2} = t_y$$

Параметры (бета-коэффициенты могут быть найдены методом наименьших квадратов):

$$МНК: \sum (\tilde{t}_y - t_y)^2 \rightarrow \min$$

$$\sum (\beta_1 t_{x_1} + \beta_2 t_{x_2} - t_y)^2 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial t_y}{\partial \beta_1} = 2t_{x_1}(\beta_1 t_{x_1} + \beta_2 t_{x_2} - t_y) = 0 \\ \dfrac{\partial t_y}{\partial \beta_2} = 2t_{x_2}(\beta_1 t_{x_1} + \beta_2 t_{x_2} - t_y) = 0 \end{cases}$$

9. Стандартизованные коэффициенты регрессии, коэффициенты раздельной детерминации. Модель регрессии в стандартизованной форме

$$\begin{cases} \beta_1 \overline{t_{x_1} t_{x_1}} + \beta_2 \overline{t_{x_1} t_{x_2}} = \overline{t_{x_1} t_y} \\ \beta_1 \overline{t_{x_2} t_{x_1}} + \beta_2 \overline{t_{x_2} t_{x_2}} = \overline{t_{x_2} t_y} \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\overline{t_x t_x} = \overline{t_y t_y} = 1 \\ &\overline{t_y t_x} = r_{yx} \end{aligned}}$$

$$\begin{cases} \beta_1 + \beta_2 r_{x_1 x_2} = r_{x_1 y} \Rightarrow \beta_1 = r_{x_1 y} - \beta_2 r_{x_1 x_2} \\ \beta_1 r_{x_1 x_2} + \beta_2 = r_{x_2 y} \end{cases}$$

$$(r_{x_1 y} - \beta_2 r_{x_1 x_2}) r_{x_1 x_2} + \beta_2 = r_{x_2 y}$$

$$r_{x_1 y} r_{x_1 x_2} - \beta_2 r_{x_1 x_2} r_{x_1 x_2} + \beta_2 = r_{x_2 y}$$

$$\beta_2 = \frac{r_{x_2 y} - r_{x_1 y} r_{x_1 x_2}}{1 - r_{x_1 x_2}^2}$$

9. Стандартизованные коэффициенты регрессии, коэффициенты раздельной детерминации. Модель регрессии в стандартизованной форме

$$\beta_1 = \frac{r_{x_1 y} - r_{x_2 y} r_{x_1 x_2}}{1 - r_{x_1 x_2}^2}$$

$$\beta_2 = \frac{r_{x_2 y} - r_{x_1 y} r_{x_1 x_2}}{1 - r_{x_1 x_2}^2}$$

$$r_{x_1 y . x_2} = \frac{r_{x_1 y} - r_{x_2 y} r_{x_1 x_2}}{\sqrt{1 - r_{x_2 y}^2}\sqrt{1 - r_{x_1 x_2}^2}}$$

$$\beta_1 = r_{x_1 y . x_2} \frac{\sqrt{1 - r_{x_2 y}^2}}{\sqrt{1 - r_{x_1 x_2}^2}}$$

$$\beta_2 = r_{x_2 y . x_1} \frac{\sqrt{1 - r_{x_1 y}^2}}{\sqrt{1 - r_{x_1 x_2}^2}}$$

9. Стандартизованные коэффициенты регрессии, коэффициенты раздельной детерминации. Модель регрессии в стандартизованной форме

Коэффициенты эластичности для линейной связи определяются по формуле:

$$\overline{Э}_j = b_j \cdot \frac{\overline{x}_j}{\overline{y}}$$

Они показывают, на сколько процентов изменится признак-результат, если признак-фактор изменится на один процент.

$$\lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x}{y}\right) = f'(x)\frac{x}{y}$$

9. Стандартизованные коэффициенты регрессии, коэффициенты раздельной детерминации. Модель регрессии в стандартизованной форме

На основе множественного линейного уравнения регрессии

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \ldots + b_p x_p + \varepsilon$$

Могут быть найдены частные уравнения регрессии:

$$\begin{cases} y_{x_1.x_2 \ldots x_p} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 \bar{x}_2 + \ldots + b_p \bar{x}_p + \varepsilon \\ y_{x_2.x_1 x_3 \ldots x_p} = b_0 + b_1 \bar{x}_1 + b_2 x_2 + \ldots + b_p \bar{x}_p + \varepsilon \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{x_p.x_1 \ldots x_{p-1}} = b_0 + b_1 \bar{x}_1 + b_2 \bar{x}_2 + \ldots + b_p x_p + \varepsilon \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_{x_1.x_2 \ldots x_p} = a_1 + b_1 x_1 \\ y_{x_2.x_1 x_3 \ldots x_p} = a_2 + b_2 x_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{x_p.x_1 \ldots x_{p-1}} = a_p + b_p x_p \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1 = b_0 + b_2 \bar{x}_2 + \ldots + b_p \bar{x}_p \\ a_2 = b_0 + b_1 \bar{x}_1 + b_3 \bar{x}_3 \ldots + b_p \bar{x}_p \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_p = b_0 + b_1 \bar{x}_1 + \ldots + b_{p-1} \bar{x}_{p-1} \end{cases}$$

9. Стандартизованные коэффициенты регрессии, коэффициенты раздельной детерминации. Модель регрессии в стандартизованной форме

В отличие от парной регрессии частные уравнения регрессии характеризуют изолированное влияние фактора на результат, поскольку все остальные факторы закреплены на среднем уровне, эффекты их влияния добавлены к свободному члену. На основе частных уравнений регрессии могут быть найдены частные коэффициенты эластичности (для каждого x_j):

$$Э_{y_{x_{ij}}} = b_j \frac{x_{ij}}{\tilde{y}_{x_{ij}.x_1 \ldots x_{i-1}, x_{i+1} \ldots x_p}},$$

где x_{ij} –значение j-го фактора по i-му наблюдению,

$\tilde{y}_{x_{ij}.x_1 \ldots x_{i-1}, x_{i+1} \ldots x_p}$ - выравненное по частному уравнению регрессии (для x_j) значение зависимой переменной для i-наблюдения

Так, для x_1 для 10 наблюдения частный коэффициент эластичности :

$$Э_{y_{x_{10.1}}} = b_1 \frac{x_{10.1}}{\tilde{y}_{x_{10.1}.x_1 \ldots x_{i-1}, x_{i+1} \ldots x_p}}$$

9. Стандартизованные коэффициенты регрессии, коэффициенты раздельной детерминации. Модель регрессии в стандартизованной форме

Коэффициент частной детерминации определяется по формуле:

$$d_j^2 = \beta_j \cdot r_{x_j y}$$

$$d_j^2 = b_j \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \frac{\operatorname{cov}(x_j; y)}{\sigma_x \sigma_y} = b_j \frac{\operatorname{cov}(x_j; y)}{\sigma_y^2}$$

Коэффициенты частной детерминации показывают вклад каждого фактора в формирование коэффициента множественной детерминации:

$$R^2 = \sum d_j^2$$

В коэффициенте частной детерминации смешивается чистый эффект от влияния фактора, который выражается бета-коэффициентом, и смешанный (коэффициент парной корреляции), поэтому существует альтернативная форма разложения коэффициента множественной детерминации с учетом системного эффекта (η):

$$R^2 = \sum \beta_j^2 + \eta$$

10. Обобщенная линейная модель. ОМНК

- Обобщенная линейная модель. Предпосылки 1,2,6 остаются неизменными, а заменяется на

$$3{,}4.\Sigma_{\varepsilon} = M(\varepsilon\varepsilon') = \sigma^{2}E_{n}$$
$$3{,}4.\Sigma_{\varepsilon} = M(\varepsilon\varepsilon') = \Omega$$

- Ковариационная матрица оценок параметров оказывается неприемлемой в условиях ОЛММР:

$$\Sigma_{b} = (X'X)^{-1}X'\Omega X(X'X)^{-1}$$

- Теорема Айткена

В классе линейных несмещенных оценок вектора β для обобщенной регрессионной модели оценка

$$b^{*} = (X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}Y$$

Имеет наименьшую ковариационную матрицу $\Sigma_{b^{*}}$

В случае классической модели оценка b^{*} ОМНК совпадает с оценкой b МНК, поскольку

$$\Sigma_{\varepsilon} = \Omega = \sigma^{2}\mathrm{E}_{n}$$

11. Гетероскедастичность. Тесты на гетероскедастичность. ВМНК

Для проверки случайного характера остатков строится график зависимости остатков от теоретических значений результативного признака:

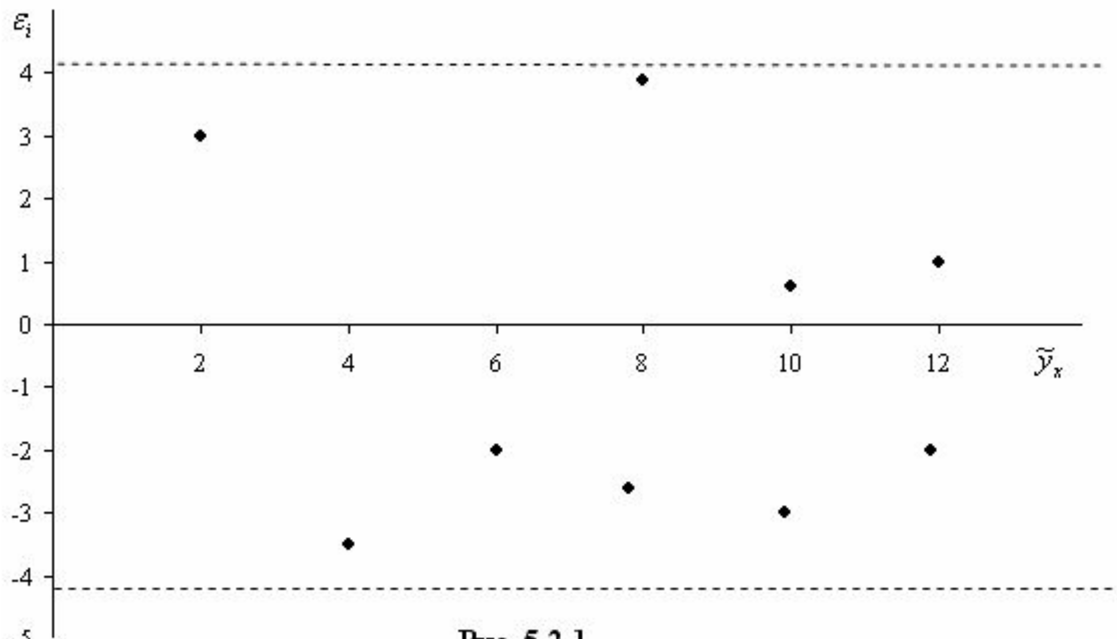


Рис. 5.2.1

Если на графике получена горизонтальная полоса, то остатки представляют собой случайные величины и МНК оправдан.

Возможны иные случаи:

11. Гетероскедастичность. Тесты на гетероскедастичность. ВМНК

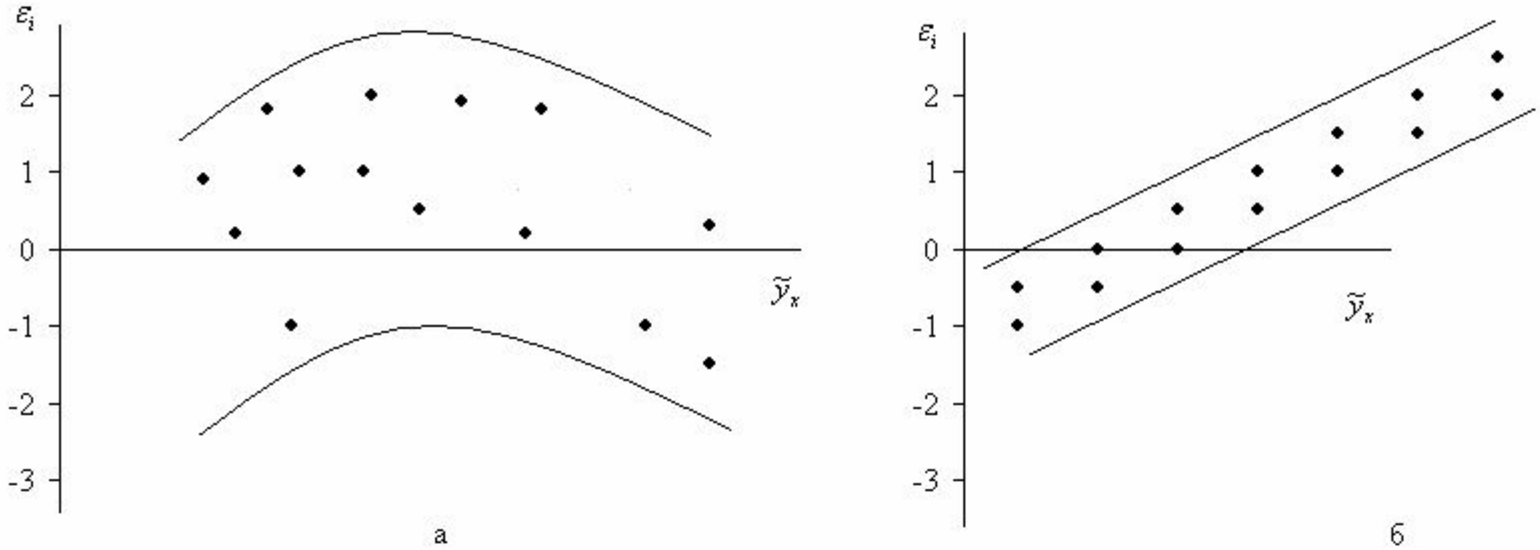


Рис. 5.2.2

а) – остатки носят систематический характер, то есть отрицательные значения соответствуют низким значениям расчетных «у», а положительные – высоким;

б) – преобладание положительных остатков над отрицательными. В этих случаях необходимо применять либо другую функцию, либо вводить дополнительную информацию и заново строить уравнение регрессии до тех пор, пока остатки не будут случайными величинами.

Вторая предпосылка МНК требует, чтобы дисперсия остатков была *гомоскедастичной*. Это значит, что для каждого значения фактора остатки имеют одинаковую дисперсию. Если это условие не соблюдается, то имеет место *гетероскедастичность*. Наличие гомо- или гетероскедастичности можно видеть по графику зависимости остатков от теоретических значений результативного признака (рис.5.2.3).

11. Гетероскедастичность. Тесты на гетероскедастичность. ВМНК

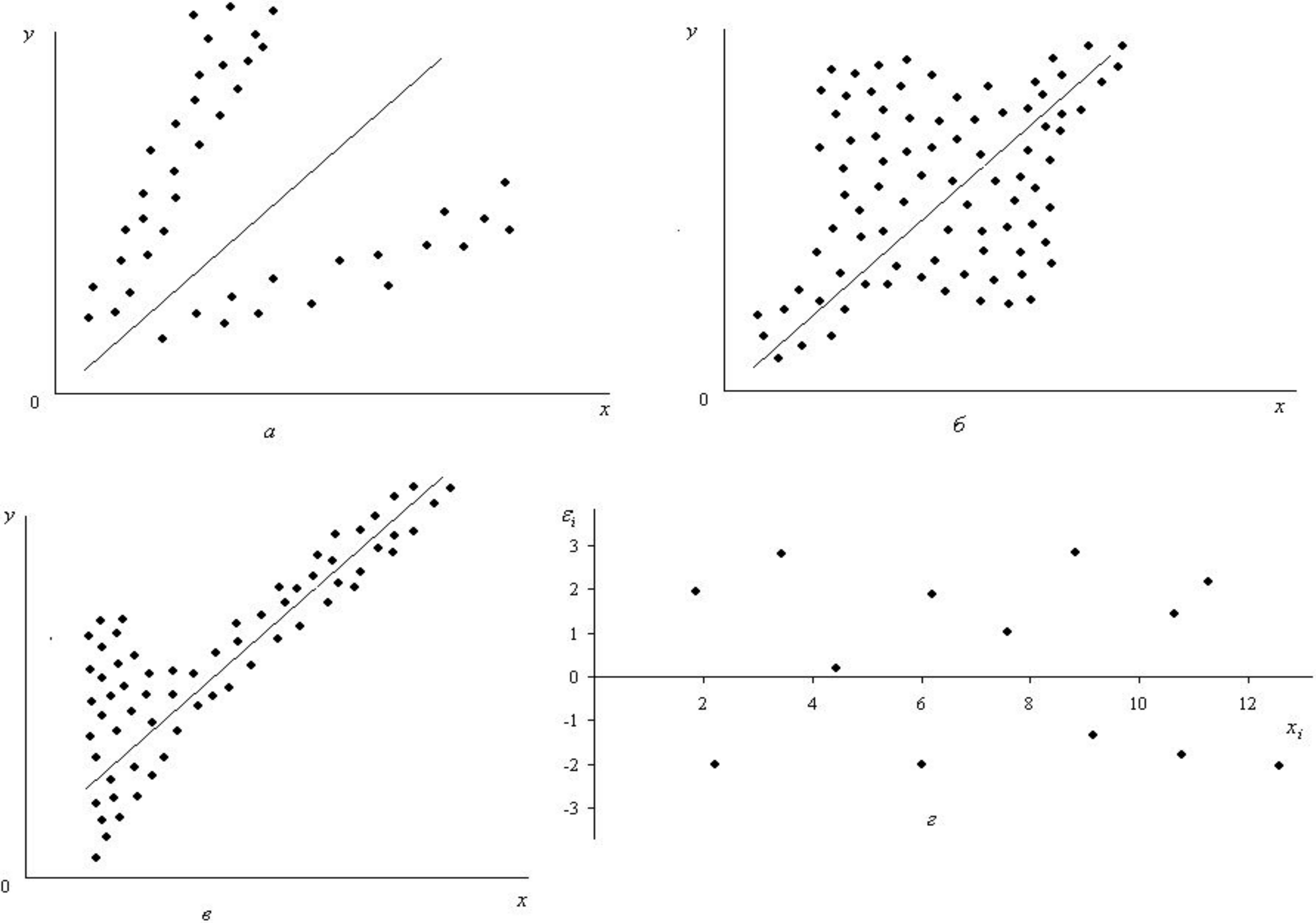


Рис. 5.2.3.

11. Гетероскедастичность. Тесты на гетероскедастичность. ВМНК

Отсутствие гетероскедастичность остатков (гомоскедастичность остатков, т.е. постоянство дисперсий остатков , для любого *i, i=1,…,n*) – важное условие (3 предпосылка), которое должно выполняться при проведении регрессионного анализа. Чтобы выявить гетероскедастичность остатков выборочной регрессии используют метод проверки статистических гипотез.
В качестве нулевой гипотезы предполагают отсутствие гетероскедастичности в генеральной совокупности, т.е.:

H_0: $\sigma^2_{\varepsilon_i} = \sigma^2$

H_A: $\sigma^2_{\varepsilon_i} \neq \sigma^2$

Для проверки данной гипотезы можно использовать разные тесты: Уайта, Глейзера, Спирмена, Голдфелда-Квандта и др.

11. Гетероскедастичность. Тесты на гетероскедастичность. ВМНК

Тест ранговой корреляции Спирмена
предполагает, что остаточная дисперсия в генеральной совокупности – это некоторая функция от независимой переменной:

$$\sigma_\varepsilon^2 = f(x)$$

e_i – оценки σ_i, поэтому в случае гетероскедастичности абсолютные величины остатков (e_i) и значения регрессоров x_i будут коррелированы.

Для нахождения коэффициента ранговой корреляции $\rho_{x,e}$ следует ранжировать наблюдения по значениям переменной x_i и остатков e_i и вычислить коэффициент корреляции:

$$\rho_{x,e} = 1 - \frac{6\sum d_i^2}{n^3 - n},$$

где d_i – разность между рангами x_i и остатков e_i.

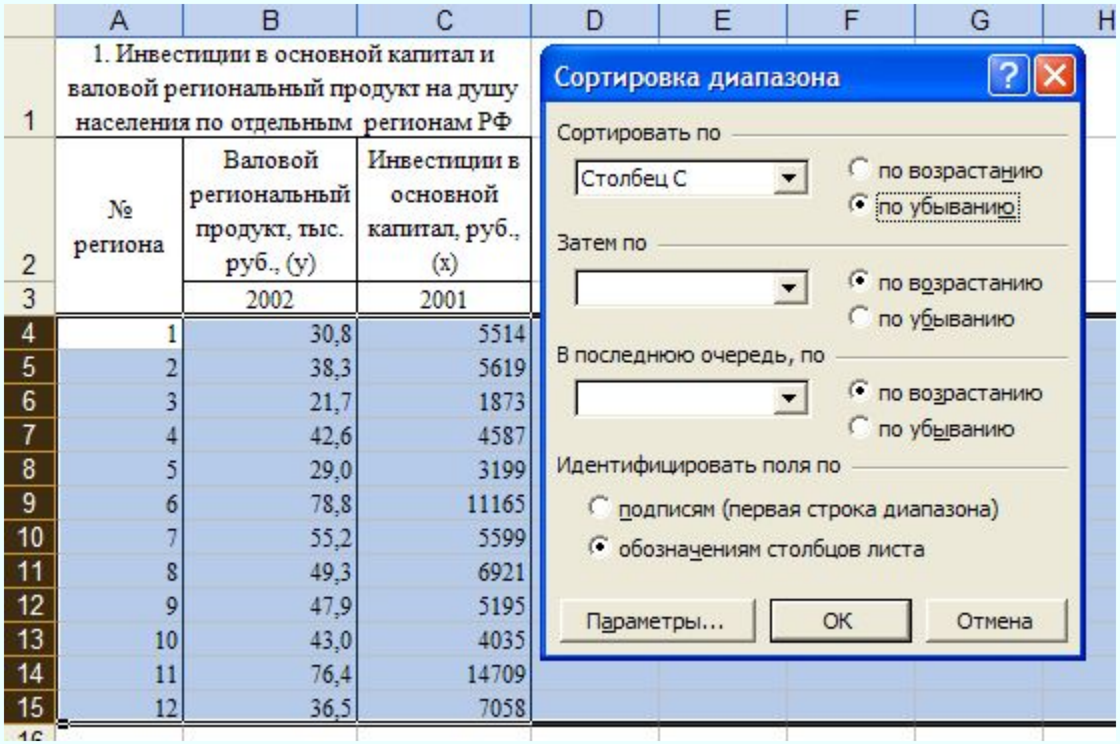
Коэффициент ранговой корреляции значим на уровне α при $n>10$, если статистика

$$t = \frac{\rho_{x,e}\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-\rho_{x,e}^2}} > t_{\alpha;n-2}$$

11. Гетероскедастичность. Тесты на гетероскедастичность. ВМНК

Тест Голдфелда-Квандта

1. Исходные данные сортируются по величине независимой переменной (нужно выделить весь диапазон значений зависимой и независимой переменной и произвести сортировку по убыванию x):



1. Инвестиции в основной капитал и валовой региональный продукт на душу населения по отдельным регионам РФ

№ региона	Валовой региональный продукт, тыс. руб., (y)	Инвестиции в основной капитал, руб., (x)
	2002	2001
1	30,8	5514
2	38,3	5619
3	21,7	1873
4	42,6	4587
5	29,0	3199
6	78,8	11165
7	55,2	5599
8	49,3	6921
9	47,9	5195
10	43,0	4035
11	76,4	14709
12	36,5	7058

11. Гетероскедастичность. Тесты на гетероскедастичность. ВМНК

2) Далее следует построить уравнение парной линейной регрессии y по x с использованием инструмента «Регрессия», при этом нужно предусмотреть вывод остатков и построение графика зависимости остатков от величины независимой переменной:

ВЫВОД ИТОГОВ

ессионная статистика	
Множеств	0,874486
R-квадрат	0,764726
Нормиров	0,741198
Стандартн	8,916321
Наблюден	12

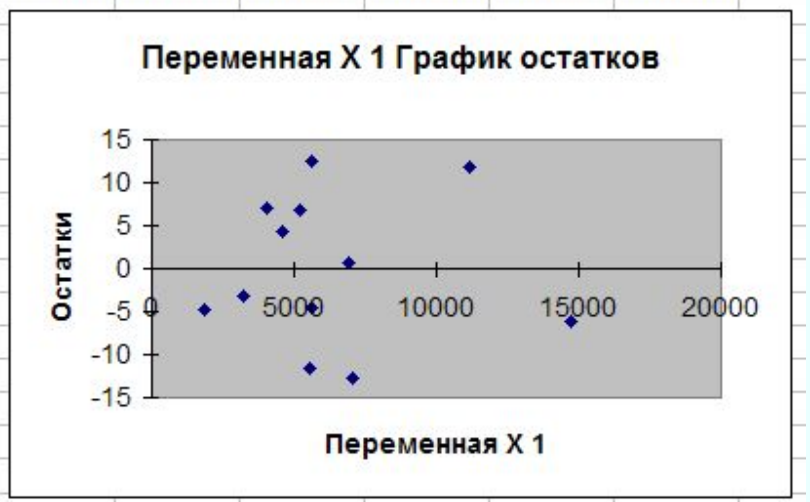
Дисперсионный анализ

	df	SS	MS	F	ачимость F
Регрессия	1	2584,057	2584,057	32,50354	0,000198
Остаток	10	795,0078	79,50078		
Итого	11	3379,065			

	Коэффициен	дартная о	статисти	P-Значени	ижние 95%	ерхние 95%	ижние 95,0	рхние 95,0%
Y-пересеч	18,31898	5,463484	3,352984	0,007328	6,145573	30,49238	6,145573	30,49238
Переменн	0,004368	0,000766	5,701188	0,000198	0,002661	0,006076	0,002661	0,006076

ВЫВОД ОСТАТКА

аблюдение	дсказанно	Остатки
1	82,5739	-6,1739
2	67,09226	11,70774
3	49,15121	-12,6512
4	48,55273	0,747266
5	42,86507	-4,56507
6	42,7777	12,4223
7	42,40638	-11,6064
8	41,01286	6,88714
9	38,35687	4,272133
10	35,94551	7,054494
11	32,29352	-3,29352
12	26,50101	-4,80101



11. Гетероскедастичность. Тесты на гетероскедастичность. ВМНК

3) Раздели совокупность на три равные части и по первым m наблюдениям и последним m наблюдениям определим суммы квадратов остатков: m=n/3=12/3=4

	A	B	C	D	E
19	ВЫВОД ОСТАТКА				
20					
21	*Наблюдение*	*Предсказанное Y*	*Остатки*		e_i^2
22	1	82,57390192	-6,173901916		38,1
23	2	67,09226084	11,70773916		137,1
24	3	49,15120556	-12,65120556		160,1
25	4	48,55273354	0,747266458		0,6
26	5	42,86506518	-4,565065178	Итого	335,8
27	6	42,777697	12,422303		
28	7	42,40638225	-11,60638225		
29	8	41,01285981	6,887140188		
30	9	38,35686721	4,272132788		18,3
31	10	35,94550551	7,054494491		49,8
32	11	32,29351568	-3,293515683		10,8
33	12	26,50100551	-4,801005505		23,0
34				Итого	101,9
35					

$$\sum_{i=1}^{m} e_i^2$$

$$\sum_{n-m-1}^{n} e_i^2$$

4) Рассчитаем фактическое значение критерия Фишера:

$$F = \frac{\sum_{i=1}^{m} e_i^2}{\sum_{n-m-1}^{n} e_i^2} = \frac{335.8}{101.9} = 3.29$$

Определим его критическое значение , где р число параметров уравнения регрессии (для парной линейной регрессии р=2). Найдем критическое значение с помощь встроенной функции «FРАСПОБР()», в наем случае выполнение «FРАСПОБР(0,05;2;2)» дало значение 19,00.

11. Гетероскедастичность. Тесты на гетероскедастичность. ВМНК

5) Альтернативная гипотеза о наличии гетероскедастичности будет принята, если:

$$F = \frac{\sum_{i=1}^{m} e_i^2}{\sum_{n-m-1}^{n} e_i^2} > F_{\alpha;\nu_{n-p};\nu_{n-p}}$$

В нашем случае фактическое значение критерия Фишера (3,29) не превысило его критическое значение (19,00), таким образом, принимаем нулевую гипотезу о гомоскедастичности остатков уравнения парной линейной регрессии в генеральной совокупности. Следовательно, выполняется третья предпосылка регрессионного анализа и параметры уравнения могут быть оценены с помощь обычного метода наименьших квадратов.

11. Гетероскедастичность. Тесты на гетероскедастичность. ВМНК

Тест Глейзера

Тест Глейзера оценивает зависимость абсолютных значений остатков от значений фактора *x* в виде функции:

$$|e| = a + bx^c$$

, где *c* задается определенным числом степени. Обычно используются значения с, равные 1; 0,5; -1; -0,5.

Гипотеза о присутствии гетероскедастичности принимается в случае значимых значений b. Для аппроксимации гетероскедастичности выбирается функция с максимальным значением t_b

11. Гетероскедастичность. Тесты на гетероскедастичность. ВМНК

Тест Уайта

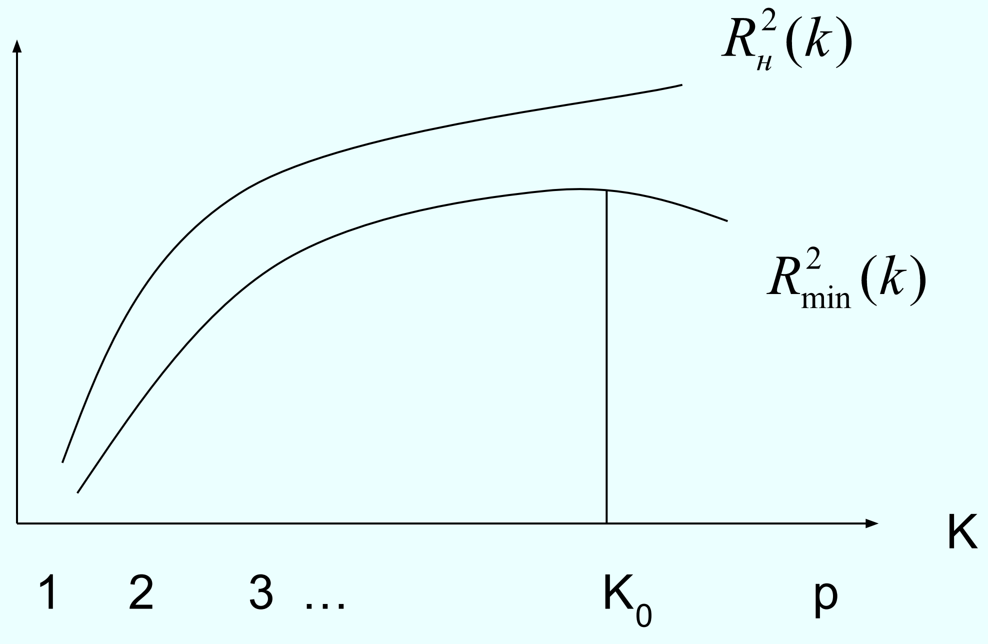
Тест Уайта предполагает, что дисперсия ошибок регрессии представляет собой квадратичную функцию от значений факторов. Тест Уайта для уравнения с двумя объясняющими переменными предполагает нахождение функции:

$$e^2 = a + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_{11} x_1^2 + b_{22} x_2^2 + b_{12} x_1 x_2 + u$$

Гипотеза о присутствии гетероскедастичности принимается в случае значимости уравнения по критерию Фишера.

12. Отбор наиболее существенных объясняющих переменных в модель множественной регрессии

$$R^2_{\min} = R^2_{н(k)} - 2\sqrt{\frac{2k(n-k-1)}{(n-1)(n^2-1)}}(1 - R^2_{(k)})$$



13. Уравнение регрессии с фиктивными переменными. Критерий Чоу

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \ldots + \beta_p x_{ip} + \alpha_1 z_{i1} + \ldots \alpha_i z_{if-1} + \varepsilon_i,$$

где i=1…n, p – число факторных количественных переменных, f-число факторных качественных или категориальных переменных (число фиктивных переменных должно быть на единицу, чем число факторов)

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \alpha_1 z_{i1} + \varepsilon_i,$$

где z_{i1}=
- **1, если домохозяйство расположено в городской местности**
- **0, если домохозяйство расположено в сельской местности**

Модель регрессии с фиктивными переменными для совокупности предприятий, по которой проведена типизация (выделены три группы):

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \alpha_1 z_{i1} + \alpha_2 z_{i2} + \varepsilon_i,$$

где z_{i1}=
- **1, если хозяйство принадлежит первой типической группе**
- **0, если хозяйство входит в другие группы**

где z_{i1}=
- **если хозяйство принадлежит второй типической группе**
- **0, если хозяйство входит в другие группы**

13. Уравнение регрессии с фиктивными переменными. Критерий Чоу

Data from the 2000 Census, US

	доход	возраст	пол
1	21393,00	22,50	м
2	32085,00	29,00	м
3	40741,00	39,50	м
4	44836,00	49,50	м
5	42313,00	59,50	м
6	32718,00	69,50	м
7	19108,00	22,50	ж
8	26788,00	29,00	ж
9	29520,00	39,50	ж
10	30960,00	49,50	ж
11	28360,00	59,50	ж
12	23261,00	69,50	ж

	доход	возраст	пол
1	21393,00	22,50	1
2	32085,00	29,00	1
3	40741,00	39,50	1
4	44836,00	49,50	1
5	42313,00	59,50	1
6	32718,00	69,50	1
7	19108,00	22,50	0
8	26788,00	29,00	0
9	29520,00	39,50	0
10	30960,00	49,50	0
11	28360,00	59,50	0
12	23261,00	69,50	0

13. Уравнение регрессии с фиктивными переменными. Критерий Чоу

Коэффициенты[a]

Модель		Нестандартизованные коэффициенты B	Нестандартизованные коэффициенты Стд. Ошибка	Стандартизованные коэффициенты Бета	t	Знч.	95,0%% доверительный интервал для B Нижняя граница	95,0%% доверительный интервал для B Верхняя граница
1	(Константа)	19018,459	5849,140		3,251	,010	5786,786	32250,132
	пол	9348,167	3803,946	,596	2,457	,036	743,044	17953,289
	возраст	162,843	115,636	,341	1,408	,193	-98,743	424,430
2	(Константа)	26332,833	2818,919		9,341	,000	20051,891	32613,776
	пол	9348,167	3986,553	,596	2,345	,041	465,572	18230,761

а. Зависимая переменная: доход

Модель		Корреляции Нулевой порядок	Корреляции Частные	Корреляции Часть	Статистики коллинеарности Толерантность	Статистики коллинеарности КРД
1	(Константа)					
	пол	,596	,634	,596	1,000	1,000
	возраст	,341	,425	,341	1,000	1,000
2	(Константа)					
	пол	,596	,596	,596	1,000	1,000

13. Уравнение регрессии с фиктивными переменными. Критерий Чоу

$$H_0 : \beta' = \beta''; D(\varepsilon') = D(\varepsilon'') = \sigma^2$$

$$F = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} e_i^2 - \sum_{i=1}^{n_1} e_i^2 - \sum_{i=n_1+1}^{n} e_i^2 \right) \cdot (n - 2p - 2)}{\left(\sum_{i=1}^{n_1} e_i^2 + \sum_{i=n_1+1}^{n} e_i^2 \right) \cdot (p+1)} > F_{\alpha; p+1; n-2p-2}$$

где p – число параметров без свободного члена,

$\sum_{i=1}^{n} e_i^2$ **- остаточная сумма квадратов при построении модели по всей совокупности,**

$\sum_{i=1}^{n_1} e_i^2, \sum_{i=n_1+1}^{n} e_i^2$ **- остаточные суммы квадратов для первой и второй группы.**

13. Уравнение регрессии с фиктивными переменными. Критерий Чоу

$$y = b_0 + b_1 x + b_2 z + e$$

.

где y - средний балл по итогам контрольной недели, x - удельный вес пропущенных занятий

где z= $\begin{cases} 1, \text{ если студент обучается по специальности «Финансы и кредит»} \\ 0, \text{ если студент обучается по специальности «Прикладная информатика»} \end{cases}$

$$\tilde{Y} = \underset{(0{,}00)}{4{,}385} - \underset{(0{,}00)}{0{,}042}\,x + \underset{(0{,}01)}{0{,}317}\,z$$

Тест Чоу:

y=4,573-0,0438x – общая модель

y=4,78-0,0476x – «Финансы и кредит»

y=4,339-0,04x – «Прикладная информатика»

$F_{факт}$= 4,15

$F_{крит}$= 3,18

14. Нелинейные модели множественной регрессии. Производственные функции

$$Q = AK^{\alpha} L^{1-\alpha}$$

Если объем производства Q будет постоянным, то дифференциал этой функции будет равен нулю:

$$dQ = 0$$ **или**

$$\frac{\delta Q}{\delta K}\Delta K + \frac{\delta Q}{\delta L}\Delta L = 0, \textit{тогда}$$

$$\Delta K = -\Delta L \frac{\delta Q}{\delta K} : \frac{\delta Q}{\delta L} \textit{ или}$$

$$\Delta K = -\frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{K}{L}\Delta L$$

14. Нелинейные модели множественной регрессии. Производственные функции

$$Q = AK^{\alpha} L^{1-\alpha}$$

В относительных величинах мы имеем отношение соответствующих эластичностей:

$$\frac{\Delta K}{K} = -\frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{\Delta L}{L}$$

- для компенсации измененияресурса труда на 1% следует изменить ресурс капитала на –(1-α)/α процентов.

Предельная норма замены трудовых ресурсов капиталом равна:

$$\frac{dK}{dL} = -\frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{K}{L}$$

15. Вопросы для повторения и самостоятельного изучения

1. Классическая линейная модель множественной регрессии
2. Представление и отыскание параметров модели множественной регрессии в матричной форме
3. Ковариационная матрица дисперсий вектора оценок коэффициентов регрессии $\sum_b$, ее использование
4. Свойства оценок выборочных коэффициентов регрессии, полученных методом наименьших квадратов. Теорема Гаусса-Маркова
5. Обратная матрица $(X'X)^{-1}$ и ее использование во множественном регрессионном анализе
6. Оценка значимости множественной регрессии
7. Ошибки коэффициентов регрессии и прогноза в матричной форме
8. Ковариационная матрица вектора возмущений. Шестая предпосылка множественного регрессионного анализа в матричной форме
9. Понятие мультиколлинеарности факторов. Диагностика и способы устранения
10. Ридж-регрессия
11. Факторный анализ. Построение модели регрессии на главных компонентах
12. Коэффициент частной корреляции: понятие и способы расчета
13. Стандартизованные коэффициенты регрессии, коэффициенты раздельной детерминации
14. Понятие о гомо- и гетероскедастичности остатков. Последствия и подходы к выявлению гетероскедастичнсоти остатков
15. Тест Гольдфельда-Квандта
16. Тест Спирмена
17. Тест Бреуша-Пагана
18. Тест Уайта
19. Тест Глейзера
20. Тест Парка
21. Обобщенная линейная модель множественной линейной регрессии
22. Обобщенный метод наименьших квадратов
23. Взвешенный метод наименьших квадратов
24. Отбор факторов в модель регрессии. Пошаговые процедуры отбора
25. Частные уравнения регрессии, частные коэффициенты эластичности
26. Нелинейные модели множественной регрессии. Производственная функция Кобба-Дугласа, замена факторов