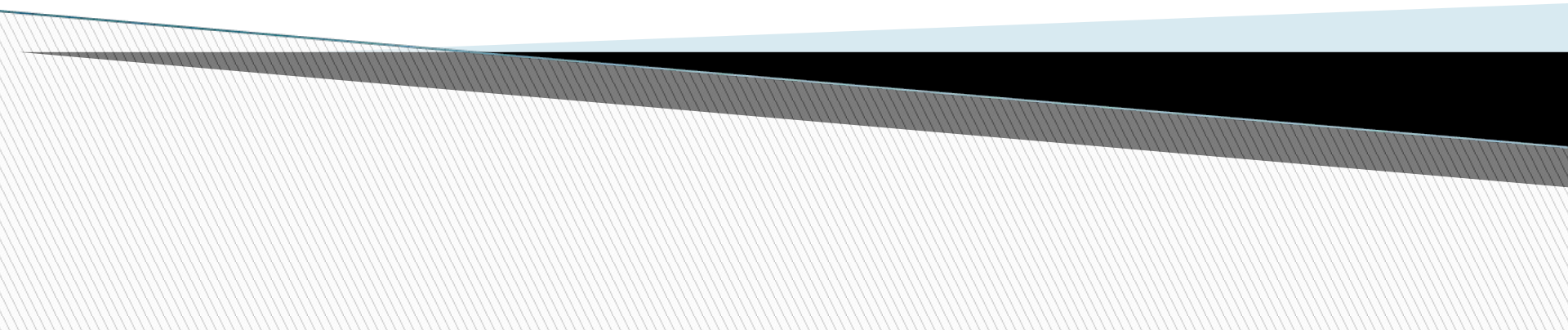


# Лекция 6. Множества



# Множества: определение и основные свойства

**Множество (по Тьюрингу)** – это объединение в одно общее объектов, хорошо различимых нашей интуицией или нашей мыслью.

**Множество (по Кантору)** – это совокупность объектов безразлично какой природы, неизвестно существующих ли, рассматриваемая как единое целое.

# Множества: определение и основные свойства

Множество, которое не имеет ни одного элемента, называется пустым и обозначается  $\emptyset$ .

Единичное множество – множество, все элементы которого тождественны.

Множество  $M_1$  называется подмножеством множества  $M$  тогда и только тогда, когда любой элемент множества  $M_1$  принадлежит множеству  $M$ .

Множества называются равными, если они имеют одни и те же элементы.

Подмножество  $M_1$  множества  $M$  называется собственным подмножеством множества  $M$ , если  $M_1$  является его подмножеством, но при этом существует хотя бы один элемент, принадлежащий  $M$ , но не принадлежащий  $M_1$ .

# Множества: определение и основные свойства

Пусть  $A$  и  $B$  – два множества. Множество  $M=A \cup B$  такое, что его каждый элемент принадлежит  $A$  или  $B$  (а возможно и  $A$  и  $B$ ), называется суммой или объединением множеств  $A$  и  $B$ .

Пусть  $A$  и  $B$  – два множества. Множество  $M=A \cap B$  такое, что его каждый элемент принадлежит и  $A$  и  $B$  одновременно, называется пересечением множеств  $A$  и  $B$ .

Пусть  $A$  и  $B$  – два множества. Множество  $M=A \setminus B$  такое, что оно состоит из тех элементов множества  $A$ , которых нет во множестве  $B$ , называется разностью множеств  $A$  и  $B$ , или дополнением  $B$  до  $A$ .

# Множества: определение и основные свойства

- Пусть  $A$  и  $B$  – два множества. Множество  $M=A \times B$  такое, что оно образовано из всех пар  $(a, b)$  таких, что  $a$  принадлежит  $A$  и  $b$  принадлежит  $B$ , называется **декартовым произведением** множеств  $A$  и  $B$ .

Пусть  $A = \{a, b\}$ ;  $B = \{m, n\}$

Тогда  $A \times B = \{(a, m), (a, n), (b, m), (b, n)\}$

- Пусть  $A$  – множество. Множество  $M$ , элементами которого являются подмножества множества  $A$ , включая само  $A$  и пустое множество, называется множеством всех подмножеств множества  $A$  или **булеаном**  $A$  и обозначается  $P(A)$ .

Пусть  $A = \{a, b, c\}$

Тогда  $M = P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$

# Множества: определение и основные свойства

- ▣ Отображением  $f$  множества  $A$  в множество  $B$  называется некоторое правило, по которому каждому элементу множества  $A$  ставят в соответствие элемент множества  $B$ .
- ▣ Множество всех отображений множества  $A$  в  $B$  обозначается как  $B^A$  ( $B$  в степени  $A$ ).
- ▣ Пусть  $A = \{a, b, c\}$ ;  $B = \{m, n\}$   
Тогда  $B^A$  это набор функций  $f_i$

$A$	$f_1(A)$	$f_2(A)$	$f_3(A)$	$f_4(A)$	$f_5(A)$	$f_6(A)$	$f_7(A)$	$f_8(A)$
$a$	$m$	$m$	$m$	$m$	$n$	$n$	$n$	$n$
$b$	$m$	$m$	$n$	$n$	$m$	$m$	$n$	$n$
$c$	$m$	$n$	$m$	$n$	$m$	$n$	$m$	$n$

# Равномощные множества и кардинальные числа

**Мощность множества (по Кантору)** – это та общая идея, которая остается у нас, когда мы, мысля об этом множестве, отвлекаемся как от всех свойств его элементов, так и от их порядка.

**Мощность множества** – это характеристика, которая объединяет данное множество с другими множествами, применение процедуры сравнения к которым дает основание предполагать, что каждый элемент одного множества имеет парный элемент из другого множества и наоборот.

# Кардинальное число

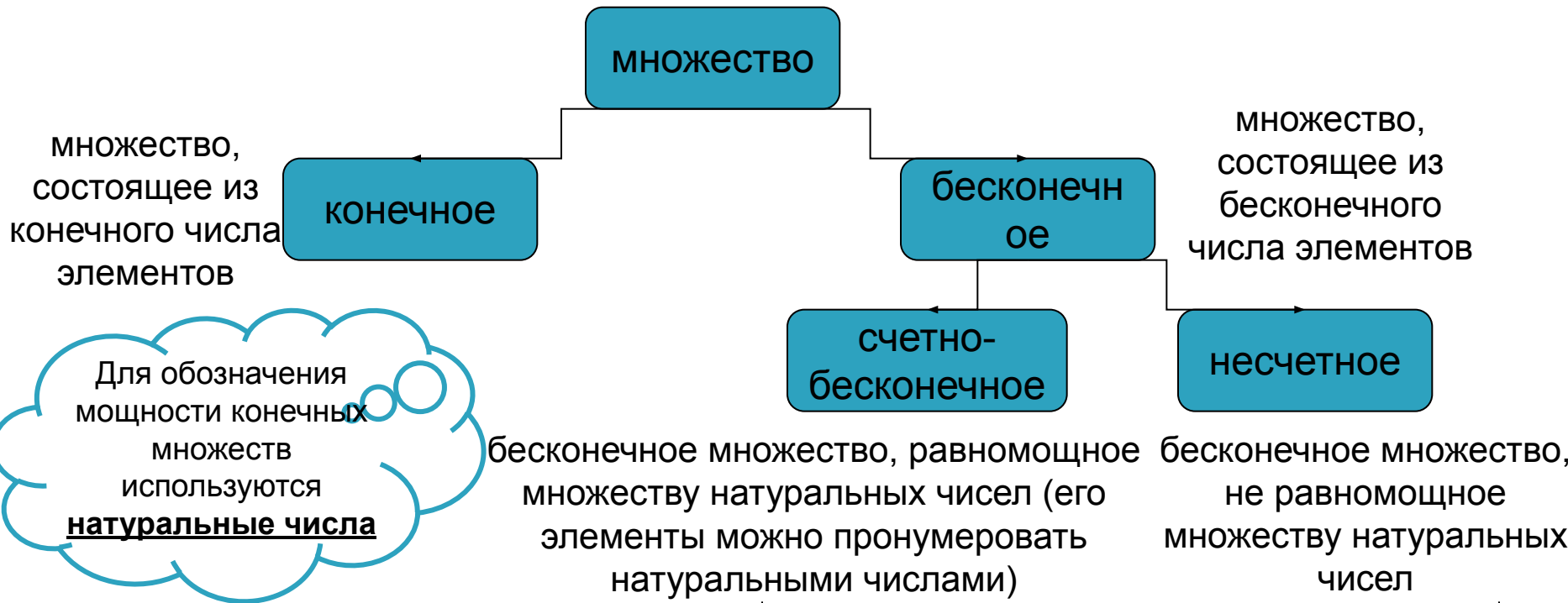
Далее мощность будем называть кардинальным числом множества.

## **Кардинальные числа некоторых множеств**

- Мощность пустого множества равна 0:  $|\emptyset|=0$ .
- Мощность множества из одного элемента равна 1:  $|\{a\}|=1$ .
- Если множества равномощны ( $A \sim B$ ), то их кардинальные числа равны:  $|A|=|B|$ .
- Мощность булеана множества  $A$  равна  $2^{|A|}$ :  $|P(A)|=2^{|A|}$
- Мощность множества  $B^A$  всех отображений  $A$  в  $B$  равна  $|B|^{|A|}$



# Классификация множеств



Для обозначения мощности конечных множеств используются натуральные числа

Для обозначения мощности бесконечных множеств используются трансфинитные числа



**Алеф-нуль**  $\aleph_0$  – первое трансфинитное число. По определению – это мощность множества всех натуральных чисел. Это наименьшая бесконечная мощность

# Свойства множеств

Множество  $A = \{ 1, 2 \}$

Подмножества множества  $A := \{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\} \}$

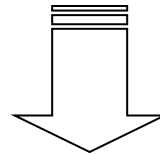
Из них собственные подмножества множества  $A := \{ \emptyset, \{1\}, \{2\} \}$

Конечное  
множество

конечное множество не равномощно  
никакому своему собственному  
подмножеству

Бесконечное  
множество

бесконечное собственное подмножество  
бесконечного множества **может быть**  
равномощно самому множеству



парадоксы

Галилея

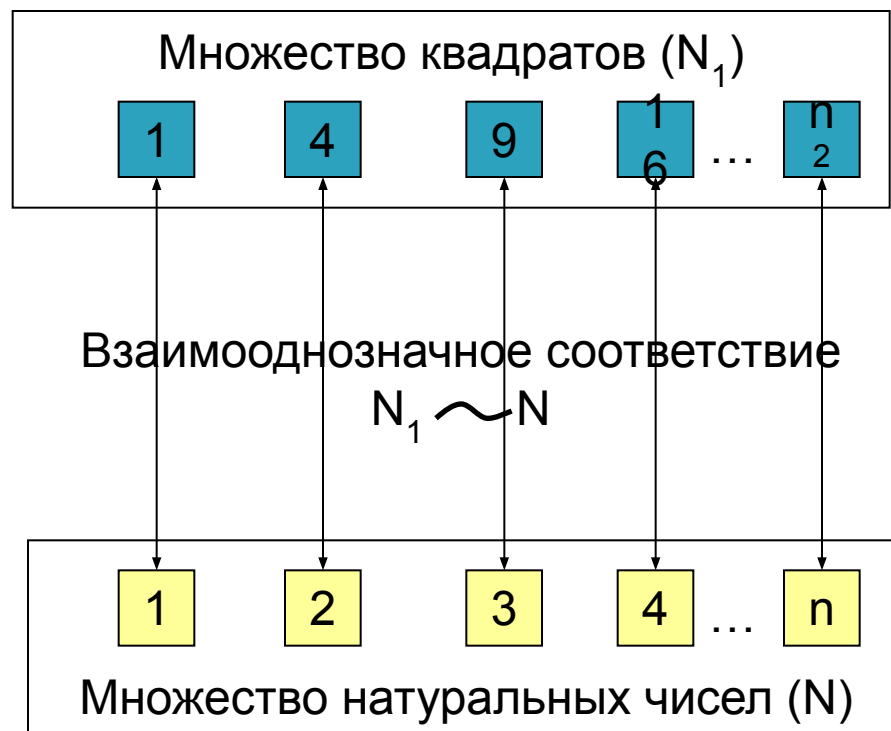
Гильберта

# Парадокс Галилея



**Хотя большинство натуральных чисел не является квадратами, всех натуральных чисел не больше, чем квадратов**

**(если сравнивать эти множества по мощности)**



$N_1$  - собственное подмножество  $N$ :  $N_1 \subset N$   
при этом их мощности равны:  $|N_1| = |N|$

# Парадокс Гильберта

Если гостиница с бесконечным количеством номеров полностью заполнена, в неё можно поселить ещё посетителей, даже бесконечное число.



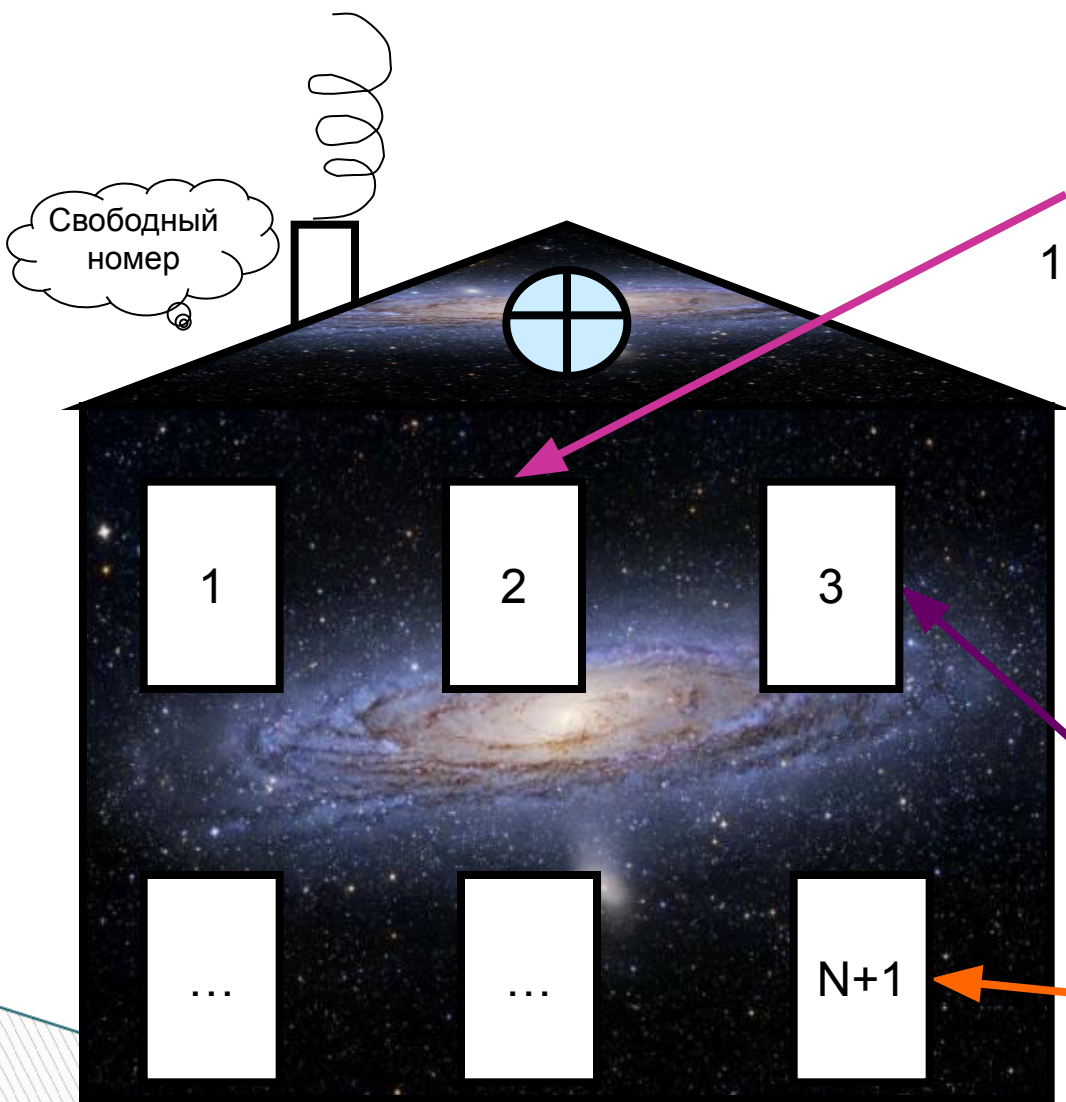
1



2



N



Свободный номер

(В оригинальной версии под термином «бесконечное» имеется ввиду «счетно-бесконечное число» посетителей)