



Решение задач по теме «Прямоугольный параллелепипед. Тетраэдр»



Среди указанных формул выберите ту, с помощью которой можно найти площадь прямоугольника. Объясните свой выбор.

$$P = 2(a + b)$$

$$S = v \cdot t$$

$$t = S : v$$

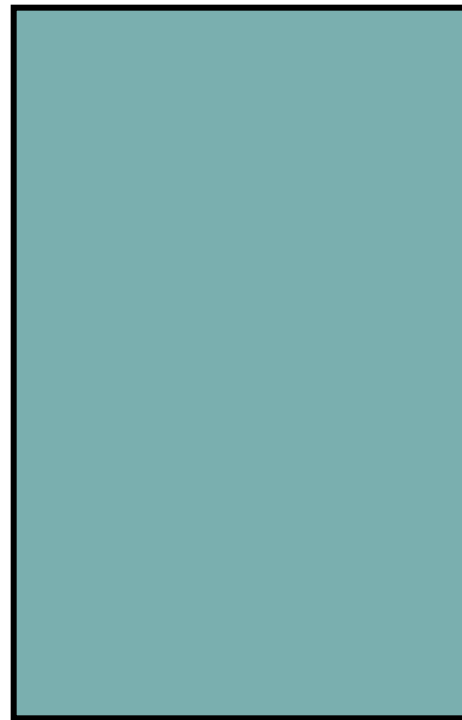
$$S = a \cdot b$$

$$v = S : t$$

$$S = 4a$$



**Найдите площадь закрашенной
фигуры**

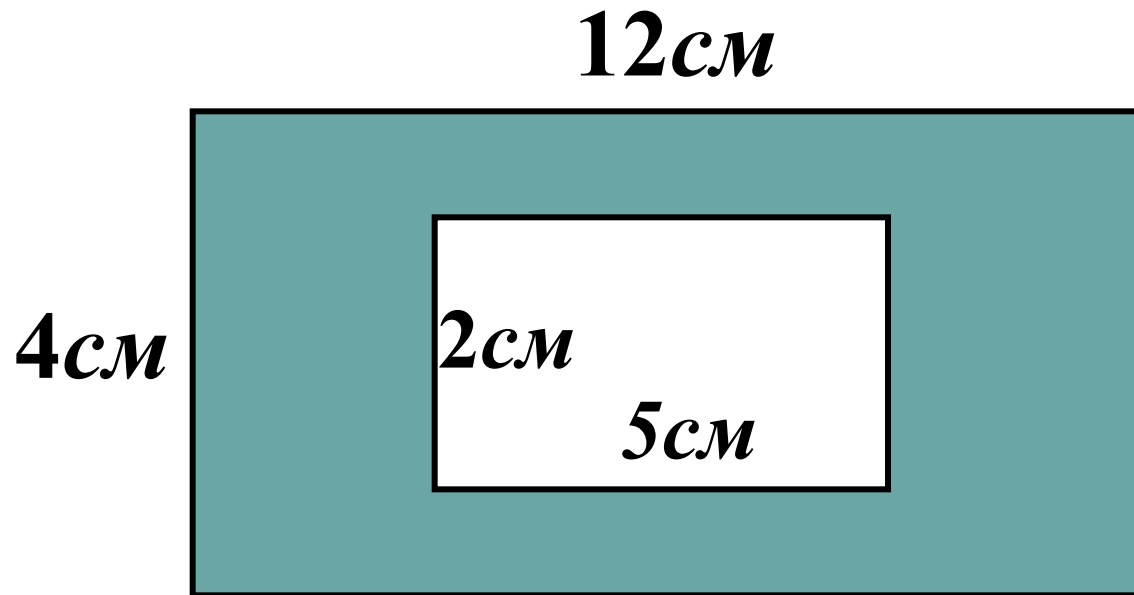


12см

3см

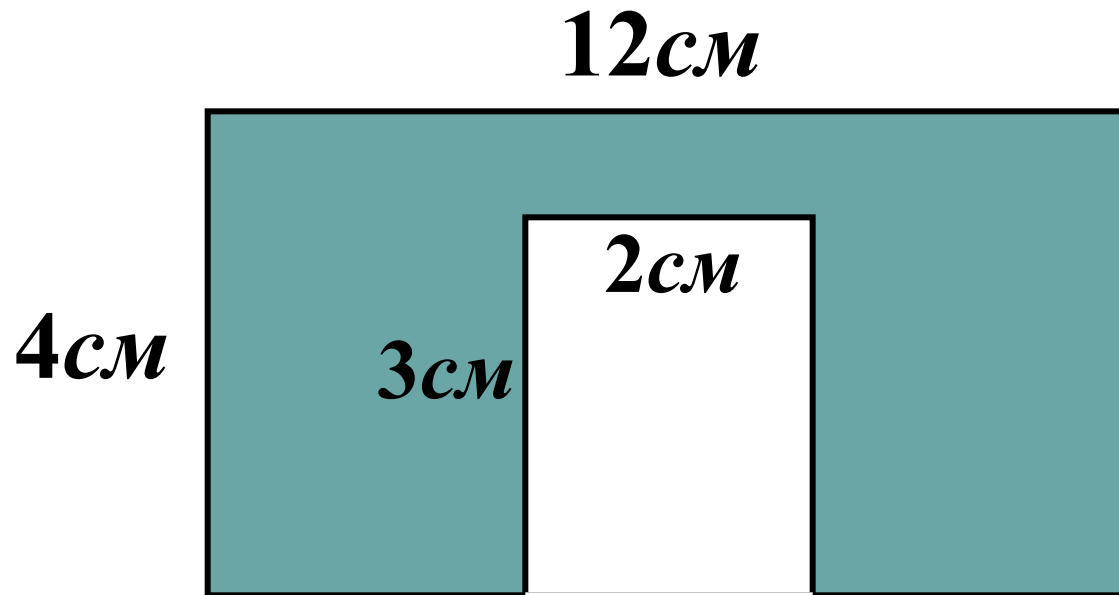


**Найдите площадь закрашенной
фигуры**





Найдите площадь закрашенной
фигуры





Исключите лишние предметы и объясните, почему.



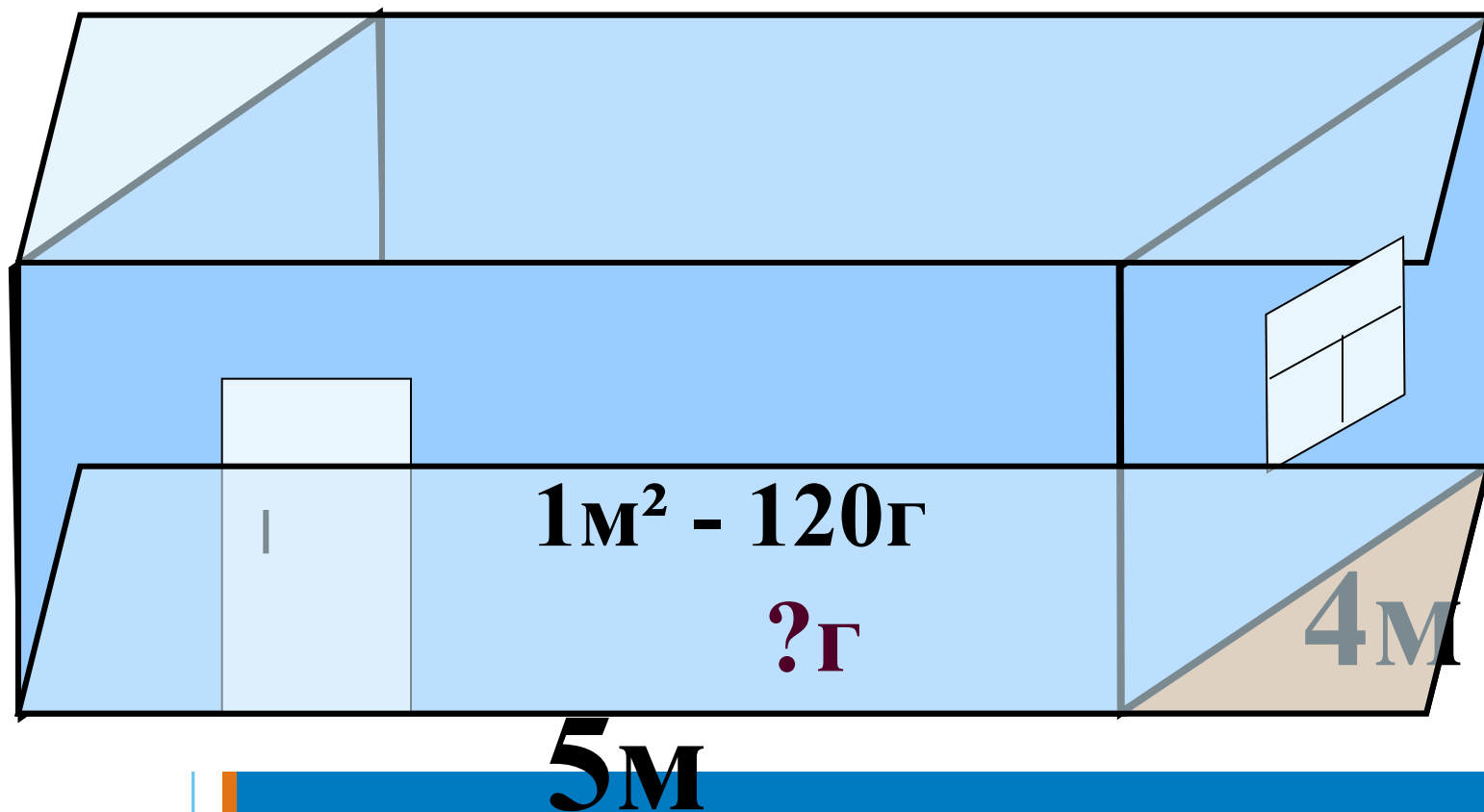


Решение задач по теме "Прямоугольный параллелепипед. Тетраэдр"





**Надо покрасить пол в комнате.
Расход краски на 1м^2 - 120г, комната имеет
размеры 5м и 4м. Сколько потребуется
краски?**

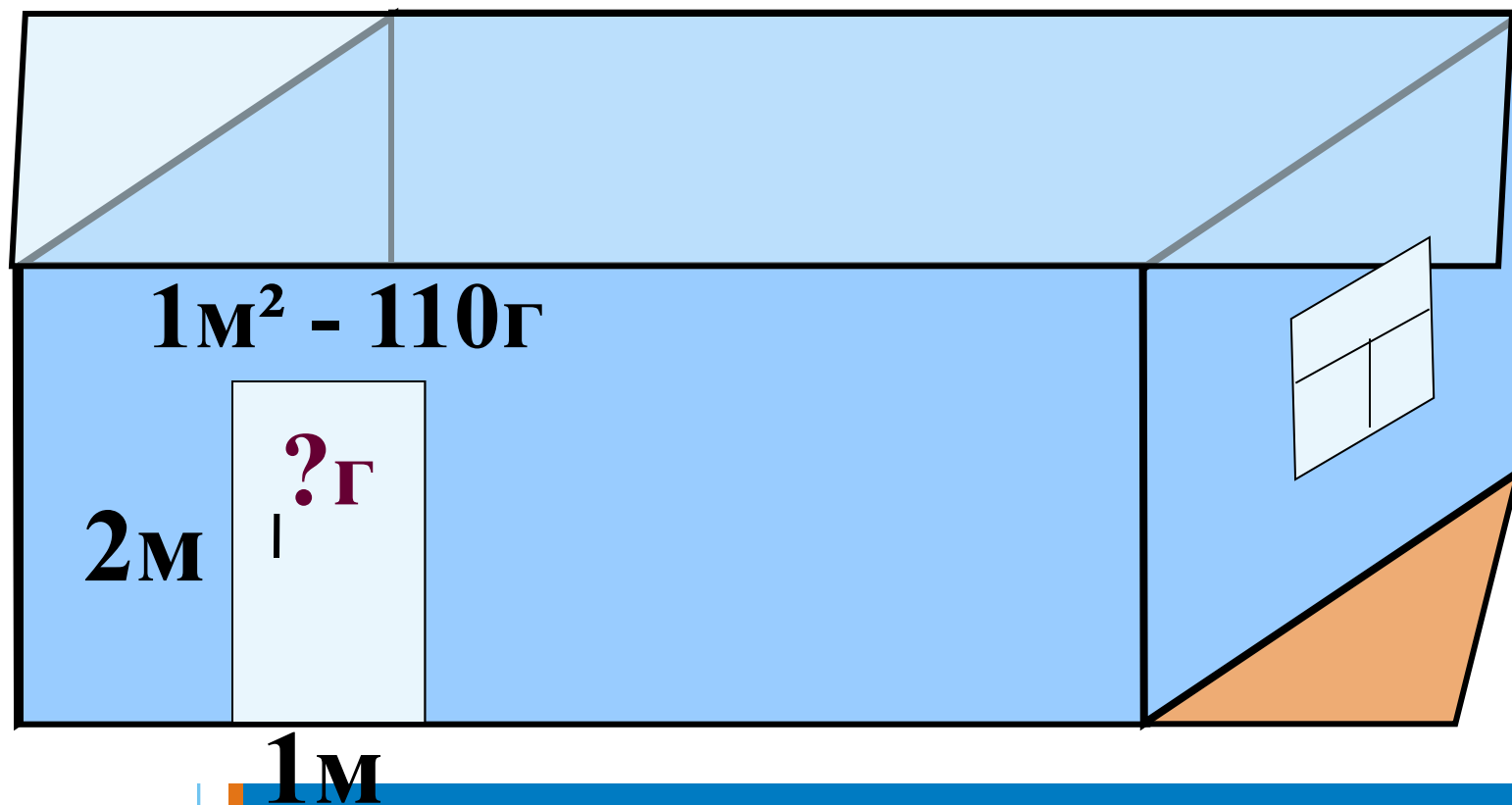




В квартире 5 дверей.

Ширина каждой двери 1м, высота – 2м.

Сколько потребуется белил, чтобы покрасить двери с двух сторон, если на 1м^2 поверхности требуется 110г белил?



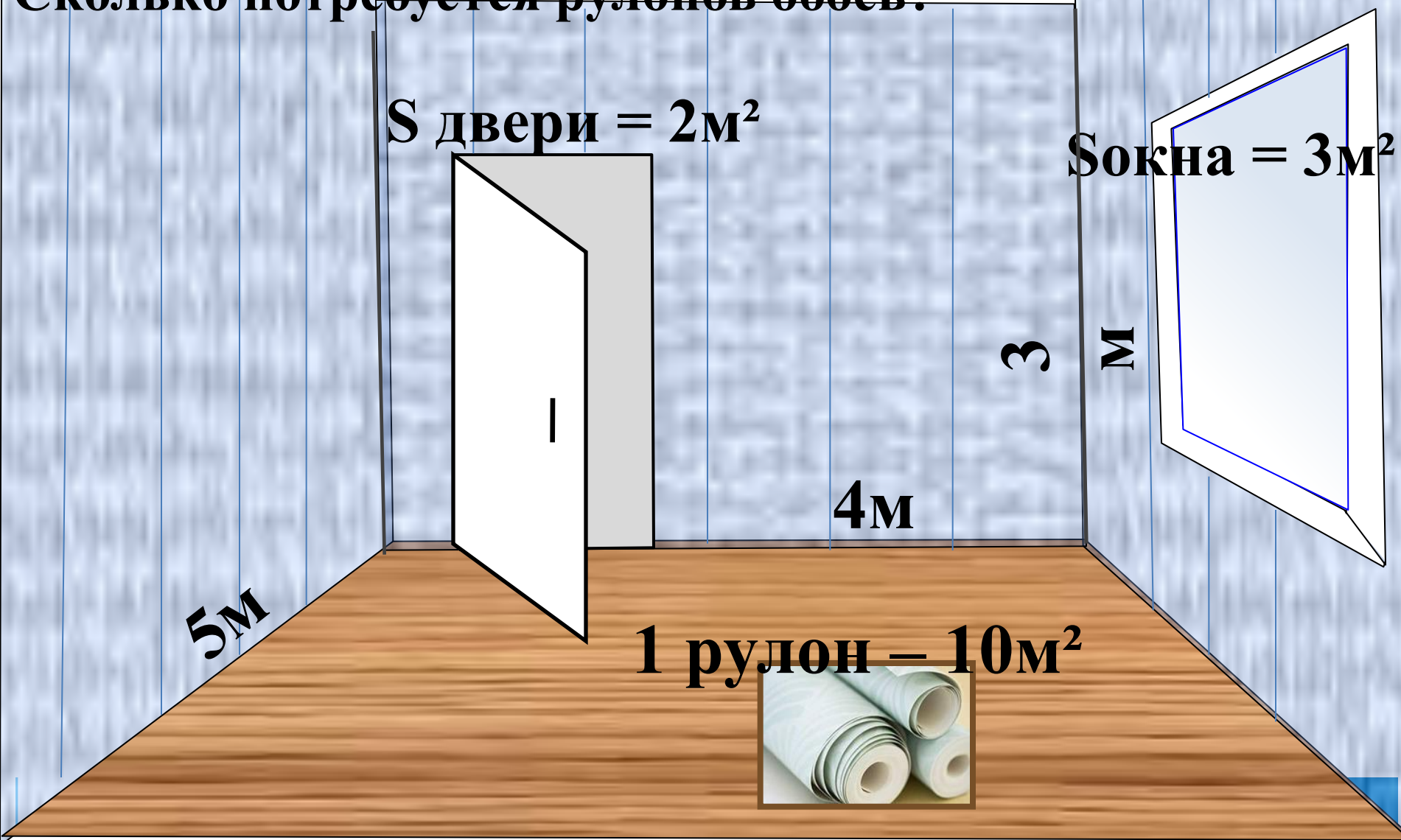


Папа решил обновить комод, покрыв его снаружи лаком, кроме дна. Размеры комода 100см, 60см, 90см. Сколько потребуется лака, если на 1дм^2 требуется 2г лака?

$1\text{дм}^2 - 2\text{г}$



Надо оклеить комнату с одним окном и дверью обоями от пола до потолка. Обои продаются целыми рулонами. Сколько потребуется рулонов обоев?





№ 173. Дано: $ABCD$ – тетраэдр, $CD \perp (ABC)$.

$$AB = BC = AC = 6, BD = 3\sqrt{7}$$

Найти: двугранные углы.

$DACB, DABC, BDCA$.

Решение:

1) Так как $DC \perp (ABC)$,
то $(DCA) \perp (ABC)$

следовательно, двугранный
угол $DACB$ прямой.

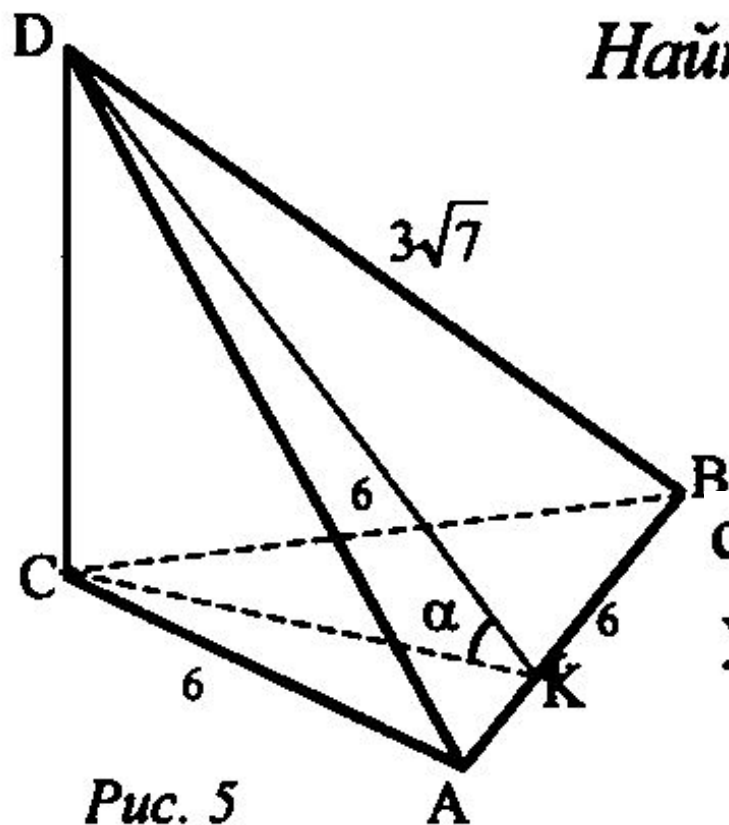


Рис. 5

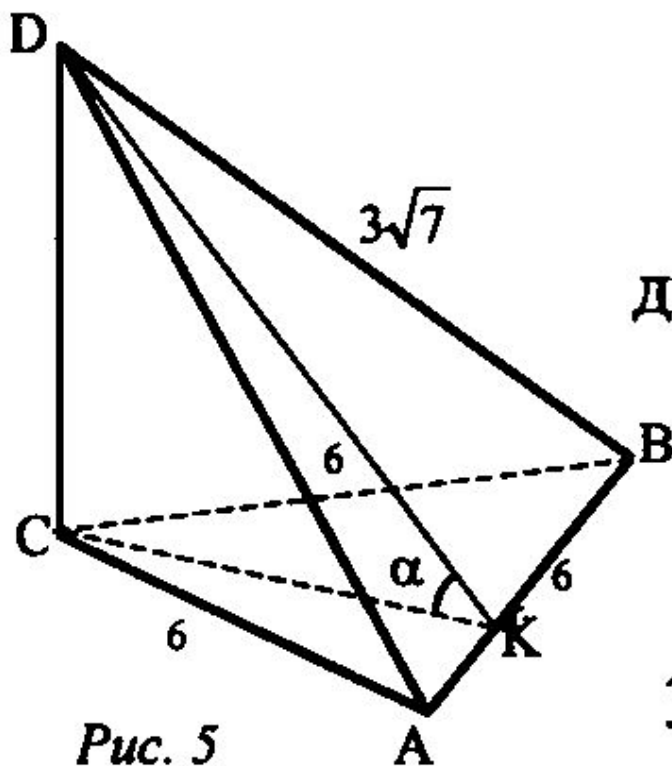


Рис. 5

2) Проведем $CK \perp AB$,
 тогда $AB \perp DK \rightarrow$
 $\angle DKC$ – линейный угол
 двугранного угла при ребре AB
 Из $\triangle ACK$: $CK = AC \cdot \sin 60^\circ =$
 $= 6 \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}.$

3) Из $\triangle BDK$ имеем: $BK = 3,$
 $DK = \sqrt{BD^2 - BK^2} = \sqrt{(3\sqrt{7})^2 - 3^2} =$
 $= \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$

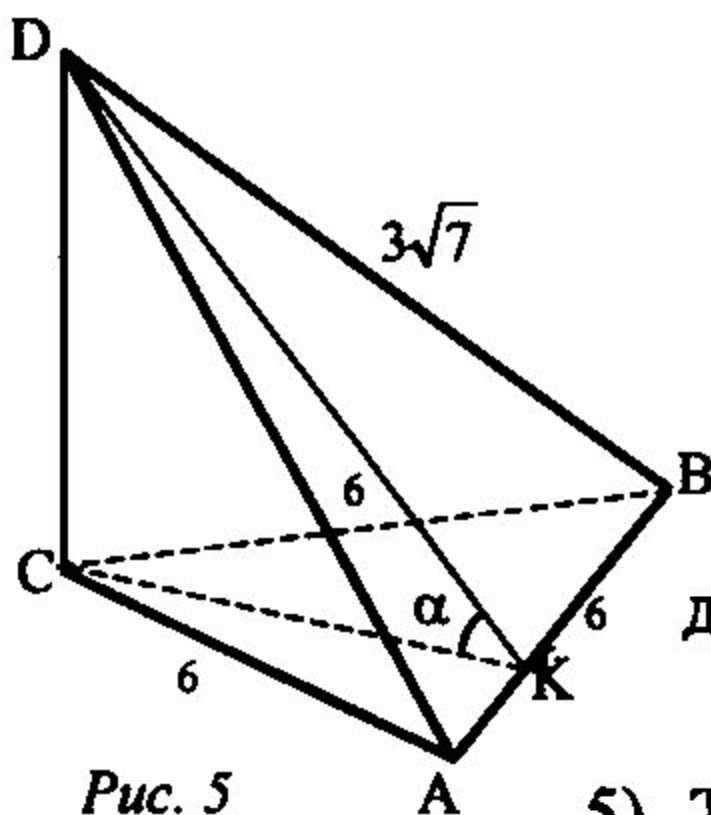


Рис. 5

4) Пусть $\angle CKD = \alpha$,
 тогда $\cos \alpha = \frac{CK}{DK} = \frac{3\sqrt{3}}{3\sqrt{6}} =$
 $= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \alpha = 45^\circ. \longrightarrow$

двугранный угол $DABC = 45^\circ$.

5) Так как $\vec{BC} \perp \vec{DC}$ и $\vec{AC} \perp \vec{DC}$,
 то $\angle ABC$ – линейный угол двугранного угла $BDCA$.
 $\angle ACB = 60^\circ$ ($\triangle ABC$ – равносторонний), $\longrightarrow$
 угол $BDCA$ равен 60° .

Ответ: $90^\circ, 45^\circ, 60^\circ$.

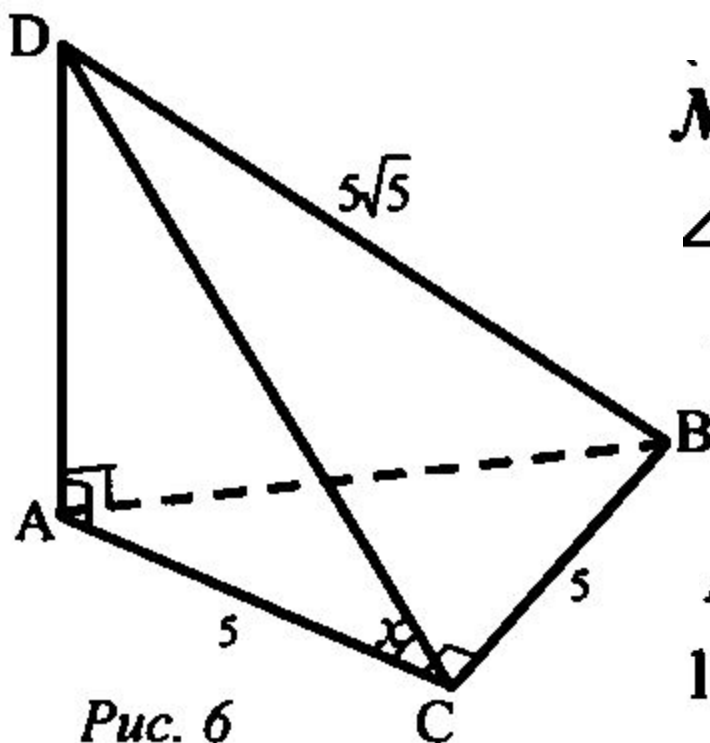


Рис. 6

№ 174. Дано: $ABCD$ – тетраэдр,
 $\angle DAB = \angle DAC = \angle ACB = 90^\circ$,
 $AC = CB = 5$, $DB = 5\sqrt{5}$.

Найти: двугранный угол $ABCD$.

Решение:

- 1) Так как $\angle DAB = \angle DAC = \angle ACB = 90^\circ$ по условию, то $DA \perp AB$, $DA \perp AC$.

Значит, DA – перпендикуляр к плоскости ABC ,
 AC – проекция наклонной DC на плоскость ABC .

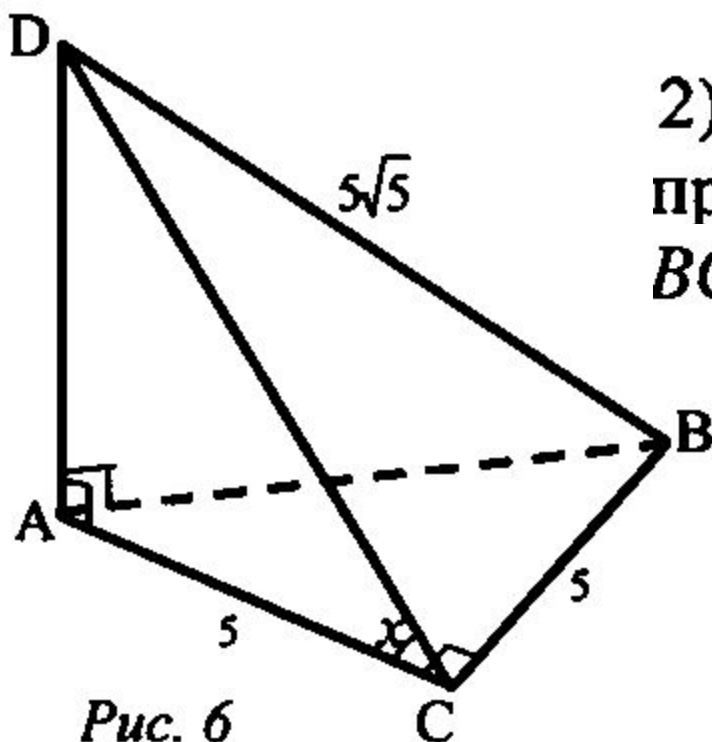


Рис. 6

2) По условию задачи $\angle ACB$ прямой, то есть $BC \perp AC$, $\longrightarrow$
 $BC \perp DC \longrightarrow$

$\angle ACD$ – линейный угол
двугранного угла $ABCD$.

3) Из $\triangle DCB$: по теореме Пифагора $DC =$
 $= \sqrt{DB^2 - BC^2} = \sqrt{(5\sqrt{5})^2 - 5^2} = \sqrt{125 - 25} = \sqrt{100} = 10$.

4) Из $\triangle DAC$ получаем: пусть $\angle ACD = x$,

$$\text{тогда } \cos x = \frac{AC}{DC} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}, \quad x = 60^\circ.$$

Ответ: 60° .

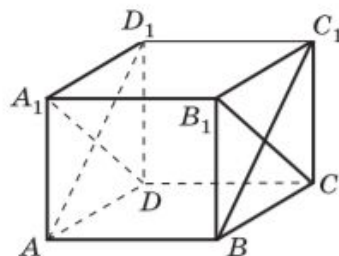


Рис. 2.26

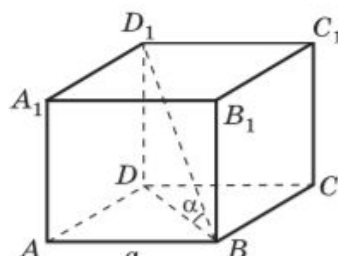


Рис. 2.27

Задача 191. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Докажите, что плоскости ABC_1 и $A_1 B_1 D$ перпендикулярны.

Решение.

1) $BC_1 \perp B_1 C$ по свойству диагоналей квадрата (рис. 2.26). $DC \perp BCC_1$, поэтому $DC \perp BC_1$, так как $BC_1 \subset BCC_1$.

Таким образом, прямая BC_1 перпендикулярна к двум пересекающимся прямым DC и CB_1 , лежащим в плоскости $A_1 B_1 D$. Следовательно, прямая BC_1 перпендикулярна к плоскости $A_1 B_1 D$ по признаку перпендикулярности прямой и плоскости.

2) Плоскость ABC_1 проходит через прямую BC_1 , перпендикулярную к плоскости $A_1 B_1 D$, следовательно, $ABC_1 \perp A_1 B_1 D$ по признаку перпендикулярности двух плоскостей.

Задача 192. Найдите тангенс угла между диагональю куба и плоскостью одной из его граней.

Решение.

1) Пусть ребро куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равно a . Тогда $BD = a\sqrt{2}$ (рис. 2.27). Так как $D_1 D \perp ABC$, то прямая BD является проекцией прямой BD_1 на плоскость грани $ABCD$, и поэтому угол между этими прямыми есть угол между диагональю BD_1 и гранью $ABCD$. Таким образом, требуется найти тангенс угла $D_1 B D$, величину которого обозначим α .

2) Из $\triangle D_1 D B$ получаем $\operatorname{tg} \alpha = \frac{D_1 D}{BD}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{a\sqrt{2}}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.



Задача 195. Найдите измерения прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, если $AC_1 = 12$ см и диагональ BD_1 составляет с плоскостью грани $AA_1 D_1 D$ угол 30° , а с ребром DD_1 — угол 45° .

Решение.

1) Диагонали прямоугольного параллелепипеда равны, следовательно,

$BD_1 = AC_1 = 12$ см (рис. 2.28).

2) $AB \perp ADD_1$, поэтому отрезок AD_1 — проекция диагонали BD_1 на плоскость грани $AA_1 D_1 D$, и, следовательно, $\angle AD_1 B = 30^\circ$.

3) Из $\triangle ABD_1$ получаем $AB = 6$ см (по свойству катета, лежащего против угла в 30°).

4) Из $\triangle DD_1 B$ имеем $DB = D_1 B \cdot \sin 45^\circ$, $DB = 6\sqrt{2}$, $DD_1 = D_1 B \cdot \cos 45^\circ = 6\sqrt{2}$ (см).

5) Из $\triangle ADB$ получаем $AD = \sqrt{DB^2 - AB^2}$, $AD = \sqrt{72 - 36} = \sqrt{36} = 6$ (см).

Ответ: 6 см, 6 см, $6\sqrt{2}$ см.

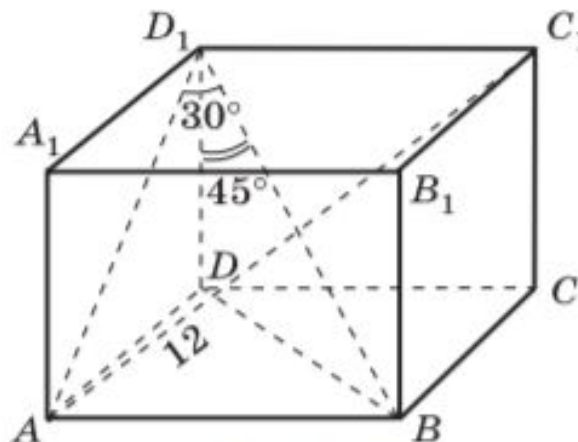
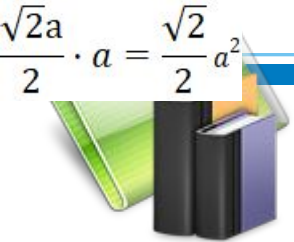
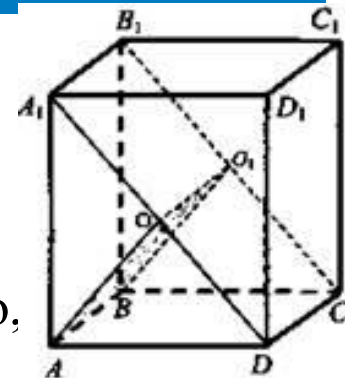


Рис. 2.28



196(б)



Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ - куб. Построить: сечение плоскостью, проходящей через AB и $\perp CDA_1$.

Построение: проведём $AO \perp A_1 D$, так как $AA_1 D_1 D$ – квадрат $\Rightarrow AO_1 = \frac{1}{2} AD_1$,

$BO_1 \parallel AO_1$. Соединим OO_1 ; $ABO_1 O$ – искомое сечение.

Какой фигурой является $ABO_1 O$? Ответ объясните. Найдите его площадь, если ребро куба a .

Решение: $AO = \frac{1}{2} AD_1 = \frac{1}{2} \sqrt{2} a = \frac{\sqrt{2} a}{2}$; $S(ABO_1 O) = \frac{\sqrt{2} a}{2} \cdot a = \frac{\sqrt{2}}{2} a^2$.



Задача 204. Прямая OM перпендикулярна к плоскости правильного треугольника ABC и проходит через центр O этого треугольника, $OM = a$, $\angle MCO = \varphi$. Найдите:

а) расстояние от точки M до каждой из вершин треугольника ABC и до прямых AB , BC и CA ;

б) длину окружности, описанной около треугольника ABC ;

в) площадь треугольника ABC .

Решение.

а) 1) Проведём высоты AD , BK и CE треугольника ABC . Они пересекаются в точке O — центре треугольника (рис. 2.29).

Так как $OA = OB = OC$, то $\triangle MAO = \triangle MBO = \triangle MCO$ (по двум катетам), поэтому $MA = MB = MC$.

2) Из $\triangle MCO$ имеем $\frac{MO}{MC} = \sin \varphi$, $MC = \frac{a}{\sin \varphi}$, $\frac{MO}{OC} = \operatorname{tg} \varphi$, $OC = \frac{a}{\operatorname{tg} \varphi}$.

3) $OD = OK = OE = \frac{OC}{2}$, $OD = \frac{a}{2 \operatorname{tg} \varphi}$. $\triangle MOD = \triangle MOK = \triangle MOE$ по двум катетам, поэтому $MD = MK = ME$.

4) Так как OD — проекция MD на плоскость ABC и $OD \perp BC$, то $MD \perp BC$ (по теореме о трёх перпендикулярах), и, следовательно, расстояние от точки M до прямой AB равно MD . Из $\triangle MOD$ получаем

$$MD = \sqrt{MO^2 + OD^2},$$

$$MD = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4 \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{a}{2 \operatorname{tg} \varphi} \cdot \sqrt{1 + 4 \operatorname{tg}^2 \varphi}.$$

б) Длина окружности, описанной около треугольника ABC , вычисляется по формуле $l = 2\pi R$, где $R = OC$, поэтому $l = \frac{2\pi a}{\operatorname{tg} \varphi}$.

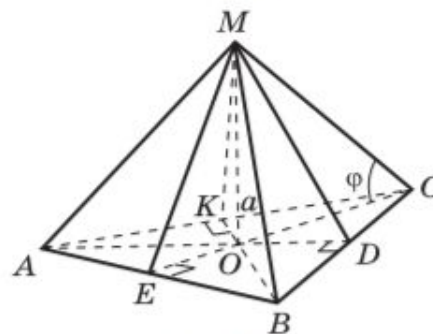


Рис. 2.29



в) Площадь $\triangle ABC$ вычисляется по формуле

$$S = \frac{AB^2 \cdot \sqrt{3}}{4}.$$

Так как $AB = OC \cdot \sqrt{3} = \frac{a\sqrt{3}}{\operatorname{tg} \varphi}$, то $S_{ABC} = \frac{3\sqrt{3}a^2}{4\operatorname{tg}^2 \varphi}$.

Ответ: а) $\frac{a}{\sin \varphi}$, $\frac{a}{2\operatorname{tg} \varphi} \cdot \sqrt{1 + 4\operatorname{tg}^2 \varphi}$; б) $\frac{2\pi a}{\operatorname{tg} \varphi}$; в) $\frac{3\sqrt{3}a^2}{4\operatorname{tg}^2 \varphi}$.

Задача 212. Точка C является проекцией точки D на плоскость треугольника ABC . Докажите, что площадь треугольника ABD равна $\frac{S}{\cos \alpha}$, где S — площадь треугольника ABC , а α — угол между плоскостями ABC и ABD .

Решение.

1) Проведём высоту DK треугольника ABD и соединим отрезком точки K и C (рис. 2.30). Тогда $CK \perp AB$ по теореме, обратной теореме о трёх перпендикулярах, а $\angle CKD$ — линейный угол двугранного угла, образованного при пересечении плоскостей ABC и ABD .

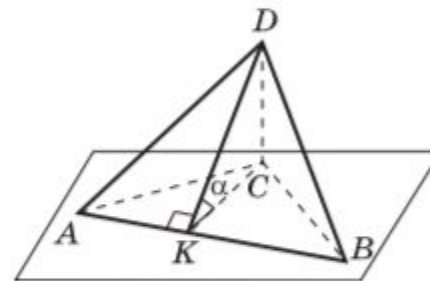


Рис. 2.30

2) По условию задачи $\angle CKD = \alpha$.

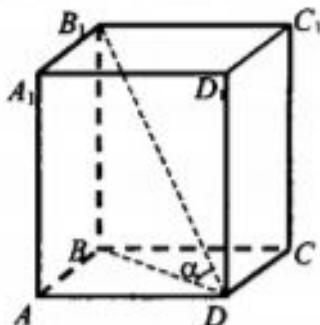
$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CK, \quad S_{ABD} = \frac{1}{2} AB \cdot DK.$$

Из $\triangle DKC$ получаем $CK = DK \cdot \cos \alpha$, $DK = \frac{CK}{\cos \alpha}$. Поэтому $S_{ABD} = \frac{1}{2} AB \cdot \frac{CK}{\cos \alpha} = \frac{\frac{1}{2} AB \cdot CK}{\cos \alpha}$, или $S_{ABD} = \frac{S_{ABC}}{\cos \alpha}$.



Проверочная работа:

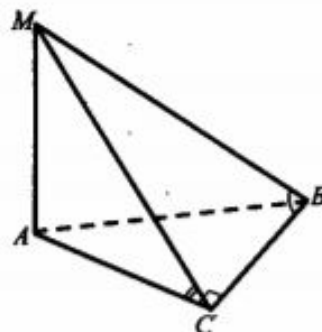
В прямоугольном параллелепипеде измерения равны 6, 8, 10. Найти диагональ параллелепипеда и угол между диагональю параллелепипеда и плоскостью его основания.



Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – прямоугольный параллелепипед, $AB = 6$, $AD = 8$, $AA_1 = 10$.

Найти: 1. $B_1 D$; 2. $\angle B_1 D B$.

Из вершины A прямоугольного $\triangle ABC$ ($\angle C = 90^\circ$, $\angle B = 60^\circ$) восстановлен перпендикуляр к плоскости ABC и на нем взят отрезок $AM = h$. Точка M соединена с B и C . Найдите $S_{\triangle MBC}$, если двугранный $\angle ABCM = 30^\circ$.



Дано: $\triangle ABC$ – прямоугольный, $\angle C = 90^\circ$, $\angle B = 60^\circ$; $AM \perp ABC$, $AM = h$; $\angle ABCM = 30^\circ$.

Найти: $S_{\triangle MBC}$.

Треугольник ABC равносторонний, сторона AB наклонена под 45° к плоскости α , а сторона AC лежит в плоскости α .

Под каким углом наклонена плоскость $\triangle ABC$ к плоскости α ?

Дано: $\triangle ABC$ – равносторонний; $\angle BAO = 45^\circ$; $AC \subset \alpha$.

Найти: $\angle BDO$.

