

8. Энергетические спектры сигналов. Принципы корреляционного анализа

Дисциплина: Теория передачи сигналов

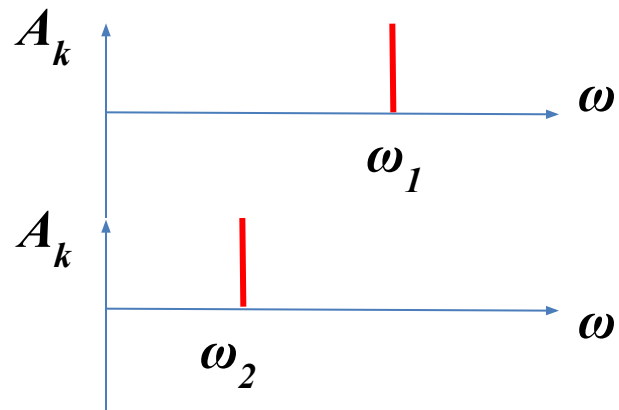
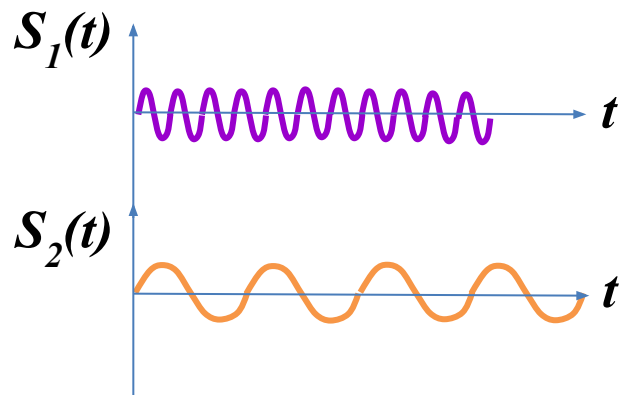
Разработал: доцент кафедры «Связь» Русакова Е.А.

Аспекты разделения сигналов

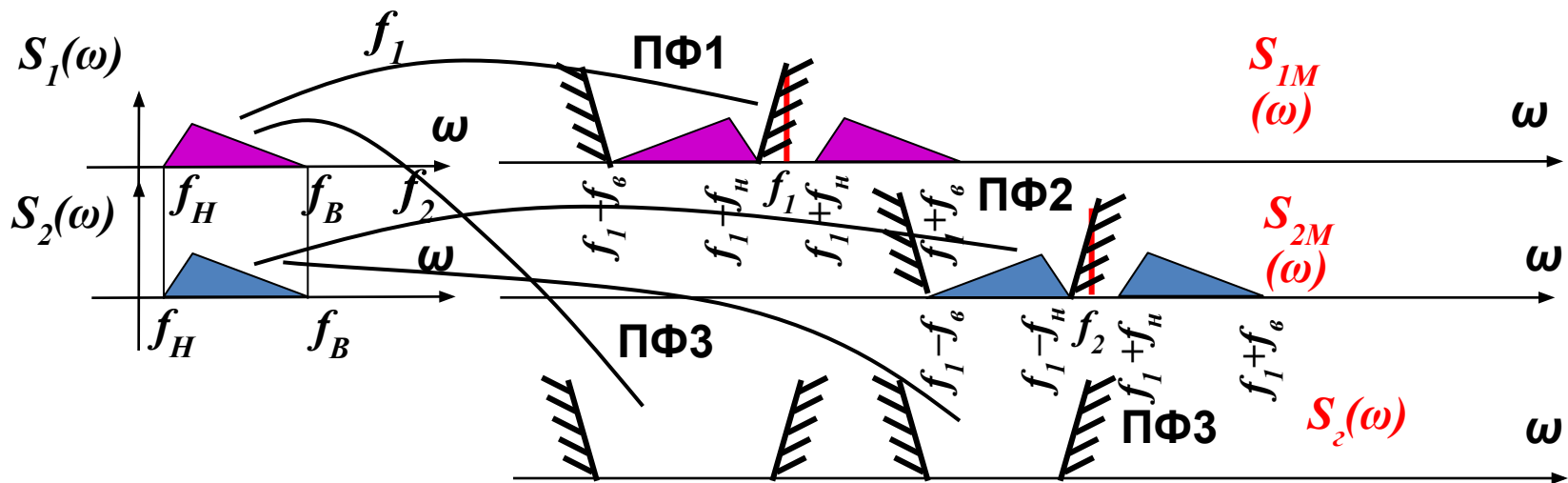
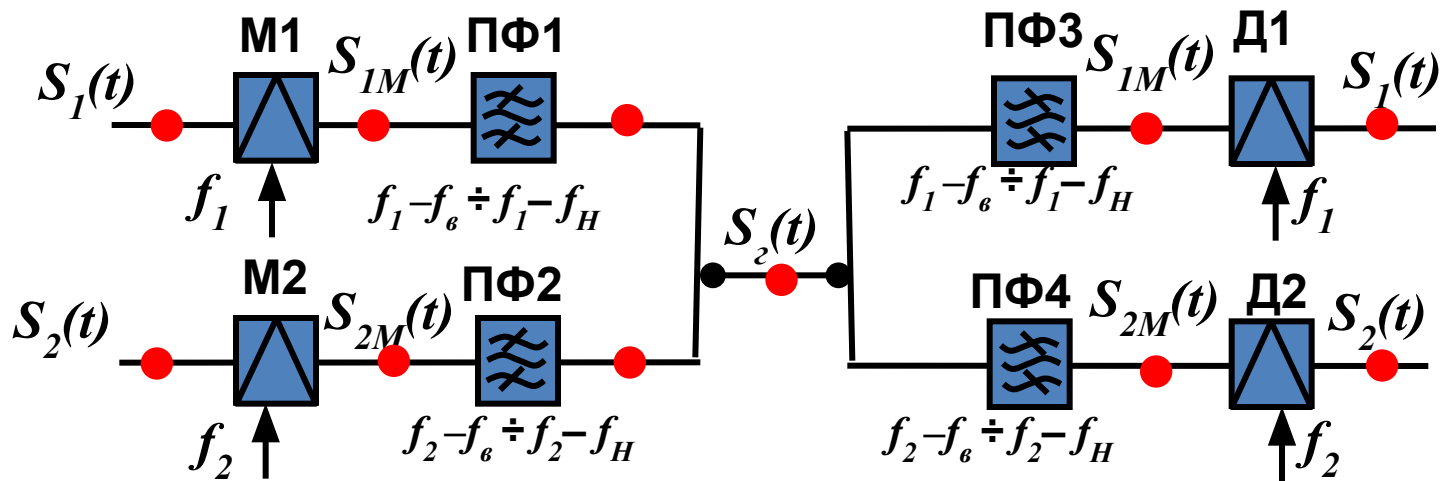
Условие разделимости сигналов:

$$(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)v(t)dt = 0$$

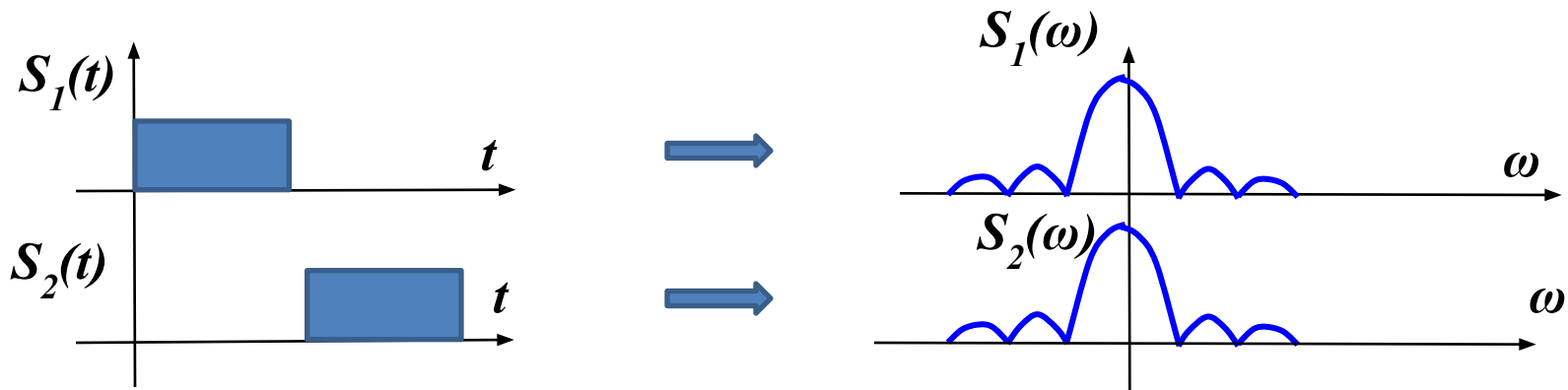
1. Частотный аспект



Частотное разделение каналов (ЧРК)

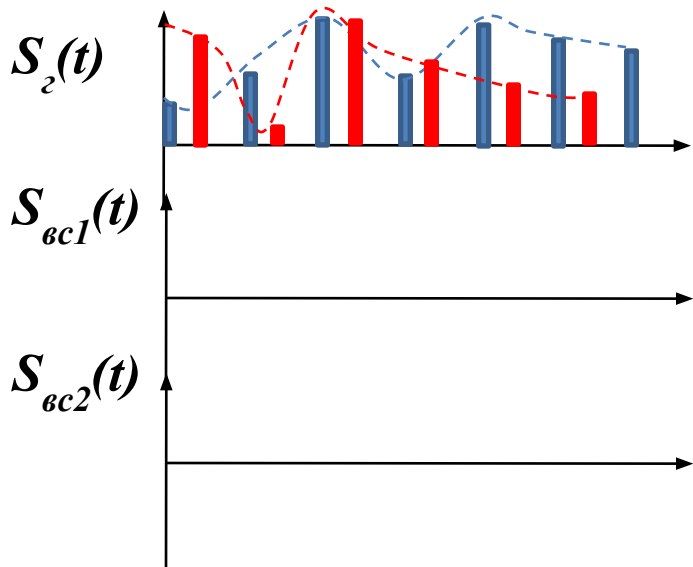
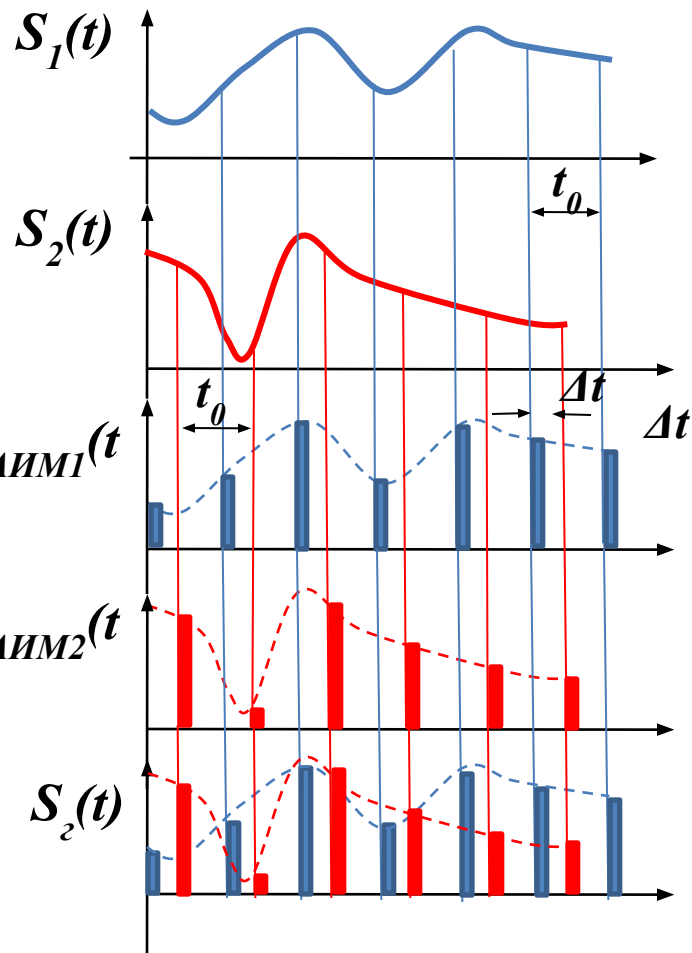
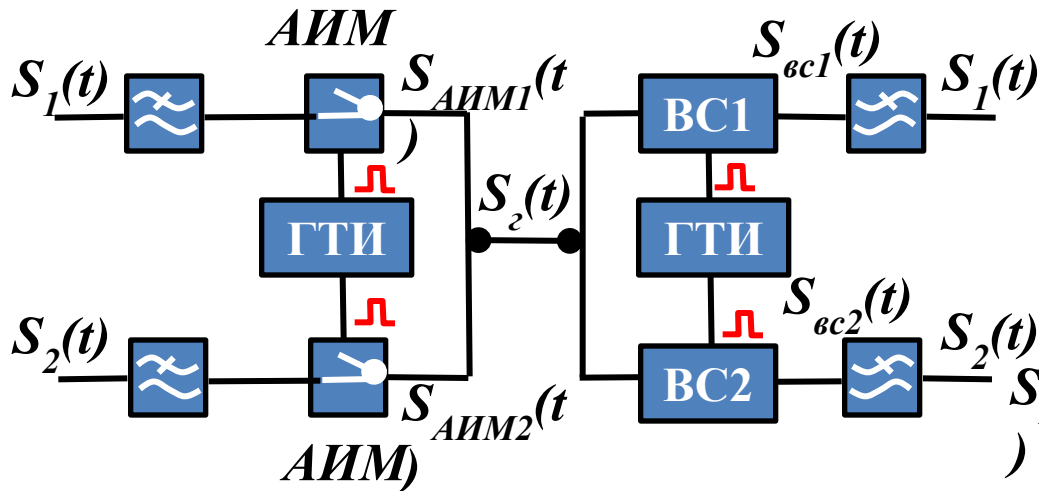


2. Временной аспект



$$E_{12} = \int_{-\infty}^{\infty} S_1(t)S_2(t)dt = 0 \quad \Rightarrow \text{Сигналы } S_1(t) \text{ и } S_2(t) \text{ ортогональны}$$

Временное разделение каналов (ВРК)



Энергетические спектры сигналов

Дано:

$$u(t) \leftrightarrow S_u(\omega)$$

$$v(t) \leftrightarrow S_v(\omega)$$

$$(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \cdot v(t) dt = E_{uv}$$

$$(u, v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \overline{v(t)} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_v(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right] dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_v(\omega) \left[\int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{j\omega t} dt \right] d\omega$$

$$S_u^*(\omega)$$

$$(u, v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_v(\omega) \cdot S_u^*(\omega) d\omega$$

**Обобщенная формула
Релея**

Если $u(t) = v(t)$

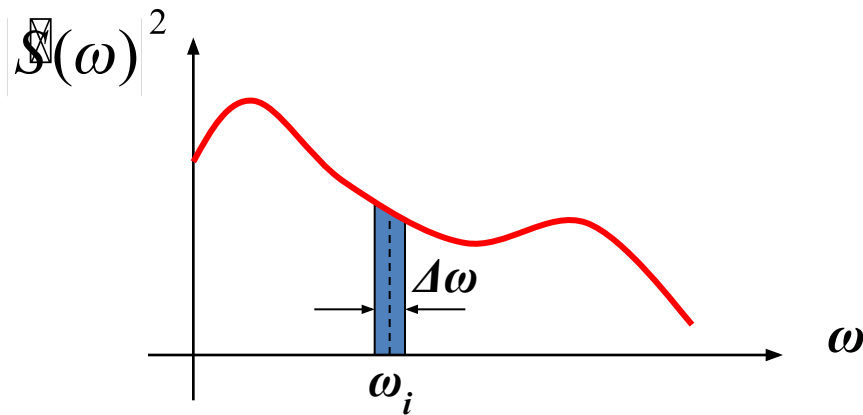
$$(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t) dt = E$$

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(\omega)|^2 d\omega$$

Равенство Парсеваля

$$|\mathcal{S}(\omega)|^2 = \frac{dE}{d\omega}$$

Энергетический спектр сигнала –
спектральная плотность распределения
энергии по оси частот

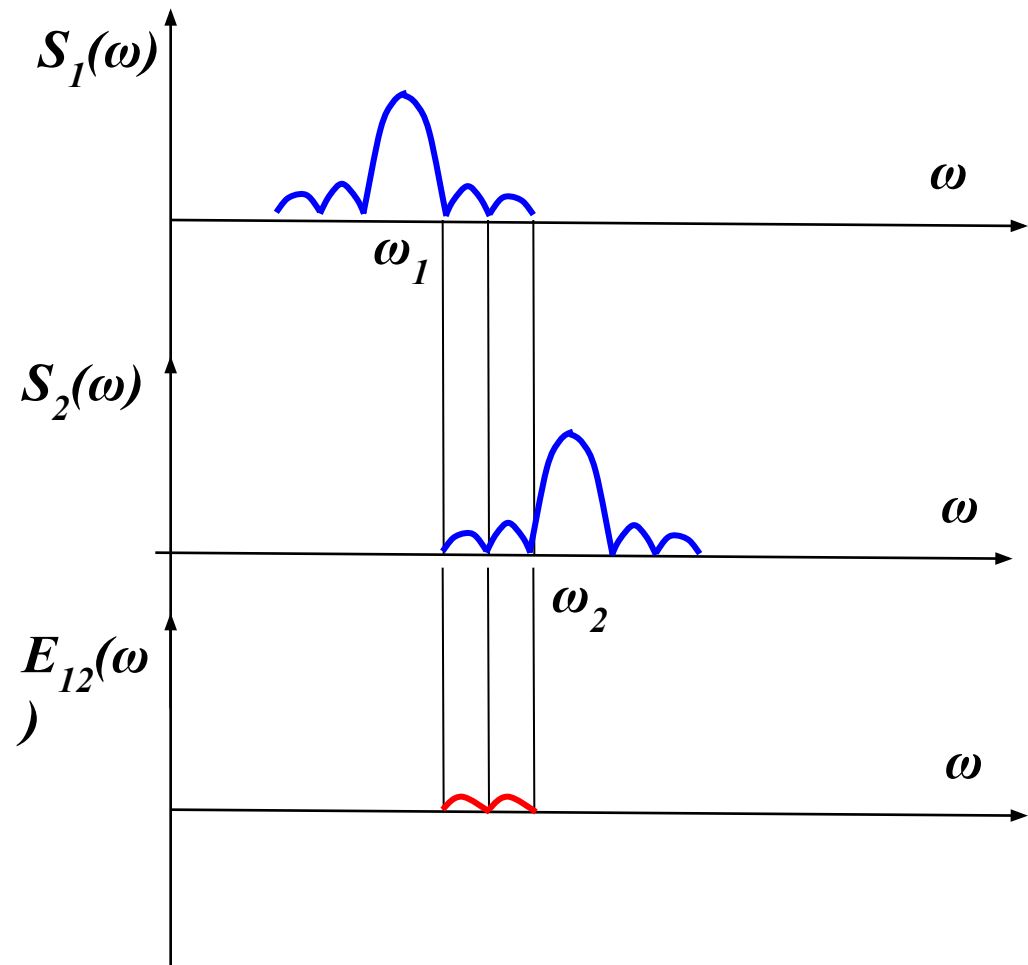
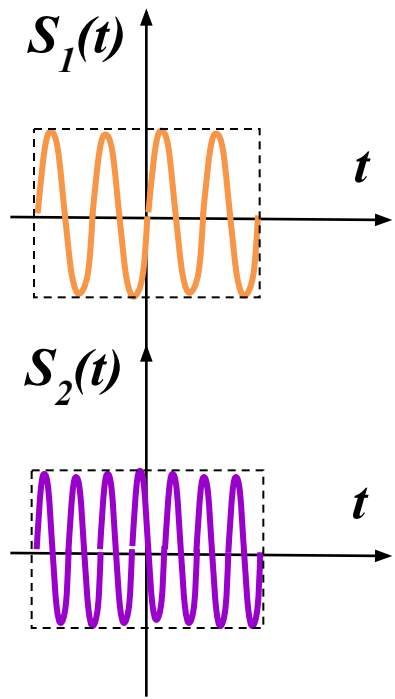


$$\Delta\omega \rightarrow 0$$

Взаимный энергетический спектр

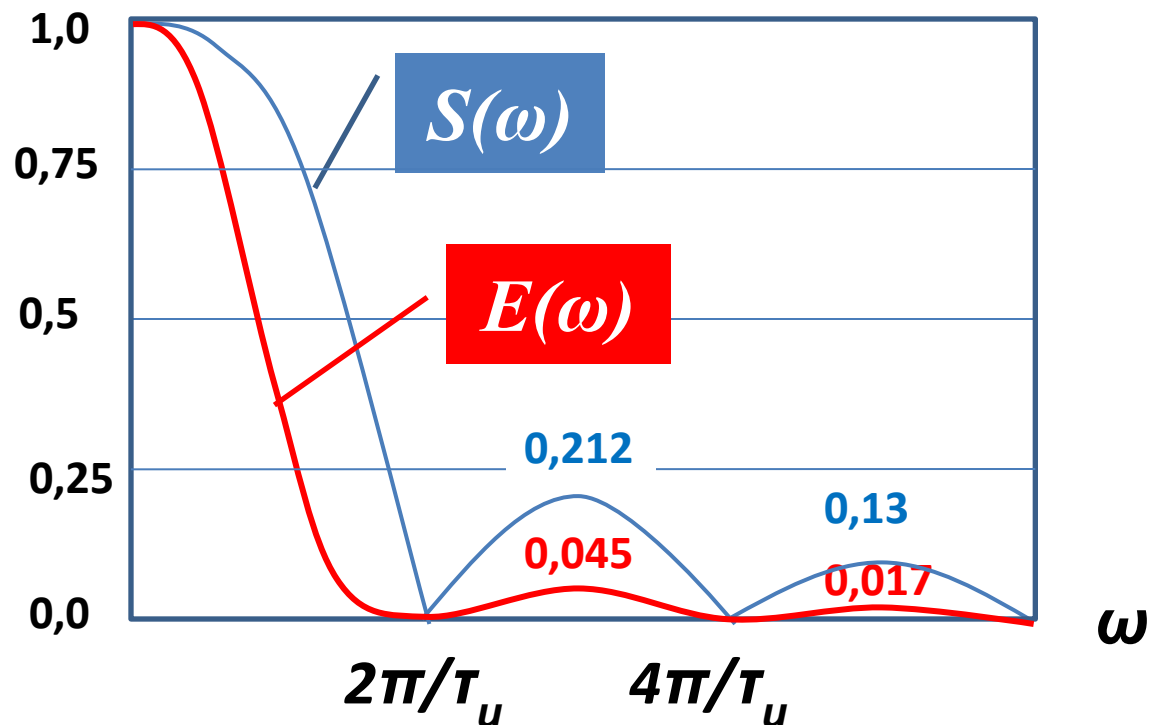
$$(u, v) = E_{uv} = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \cdot v(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E_{uv}(\omega) d\omega$$

$E_{uv}(\omega)$ – взаимный энергетический спектр

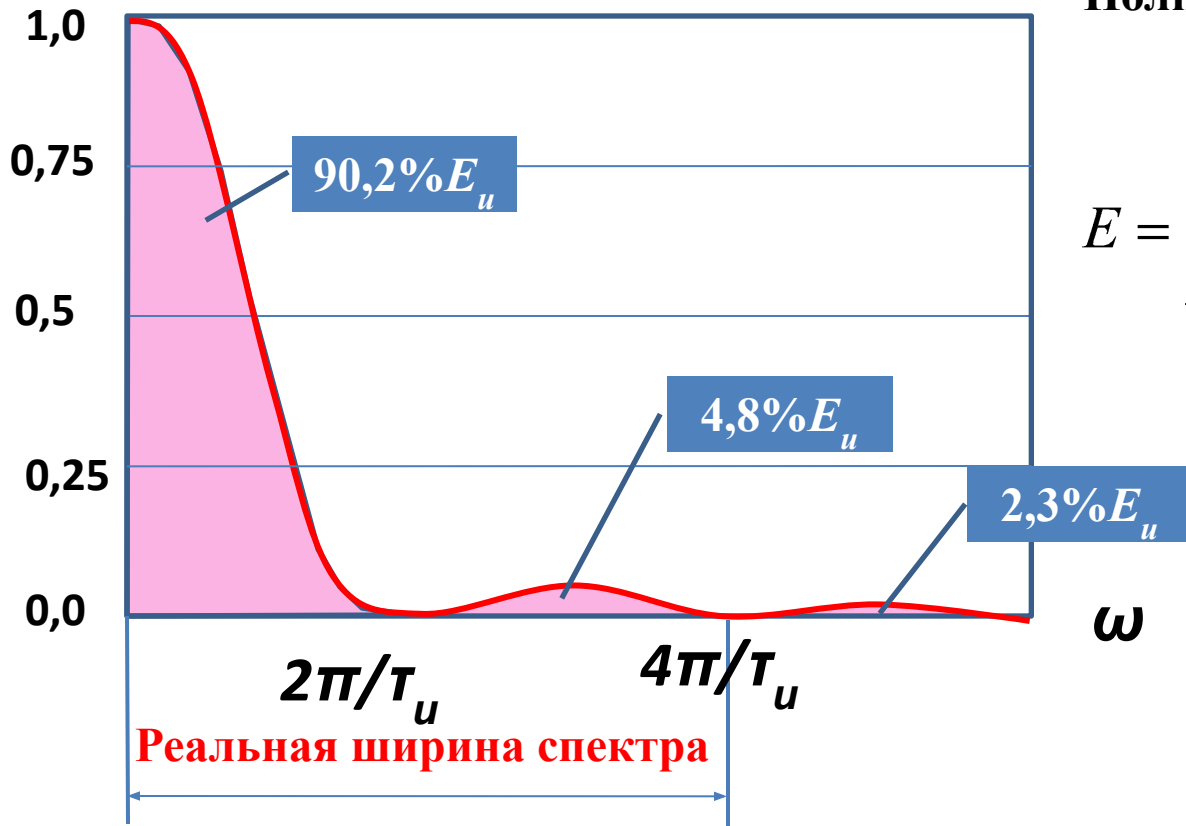


Энергетический спектр одиночного прямоугольного импульса

$$E_u(\omega) = \frac{dE_u}{d\omega} = |S_u(\omega)|^2 = A^2 \tau_u^2 \frac{\sin^2 \omega \tau_u / 2}{(\omega \tau_u / 2)^2}$$



$$E_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi/\tau_u}^{2\pi/\tau_u} \frac{EA^2}{2\pi} d\omega = \frac{A^2 \tau_u}{2\pi} \int_{-2\pi/\tau_u}^{2\pi/\tau_u} \frac{\sin^2 \omega \tau_u / 2}{(\omega \tau_u / 2)^2} d\omega$$

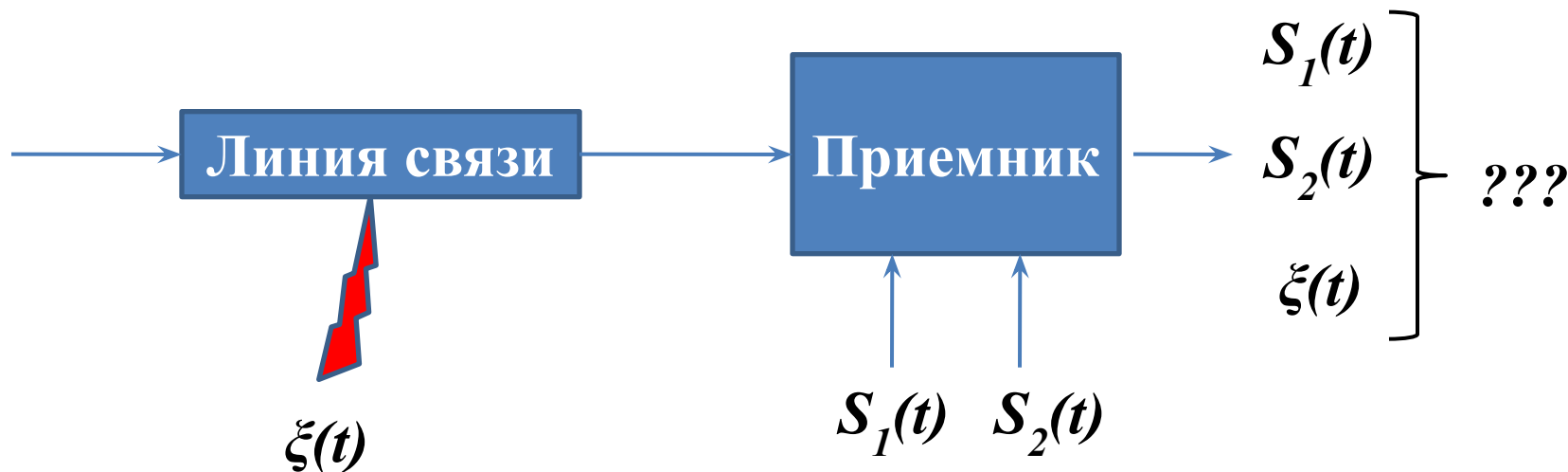


Полная энергия прямоугольного импульса:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t) dt = \int_{-\tau_u/2}^{\tau_u/2} A^2 dt = A^2 \tau_u$$

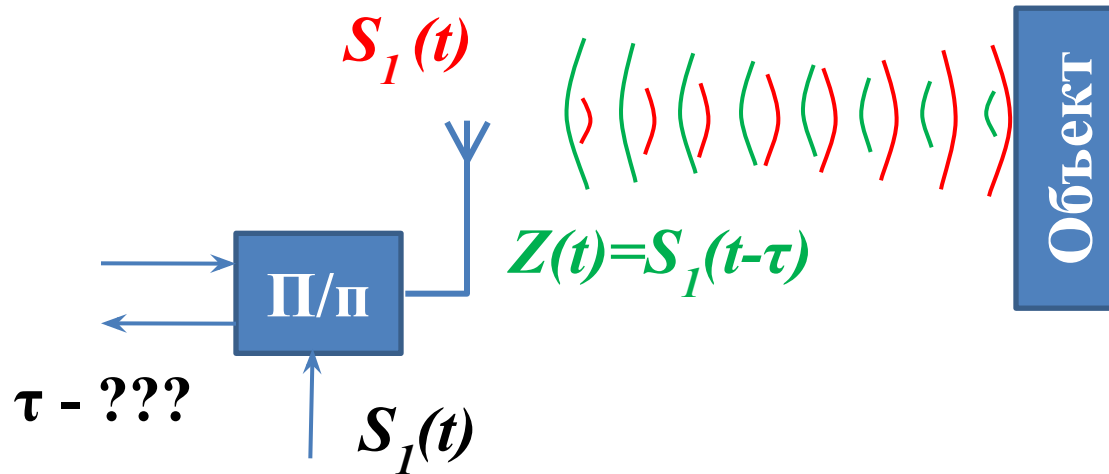
8.3. Корреляционные характеристики недетерминированных сигналов

Задача обнаружения сигналов

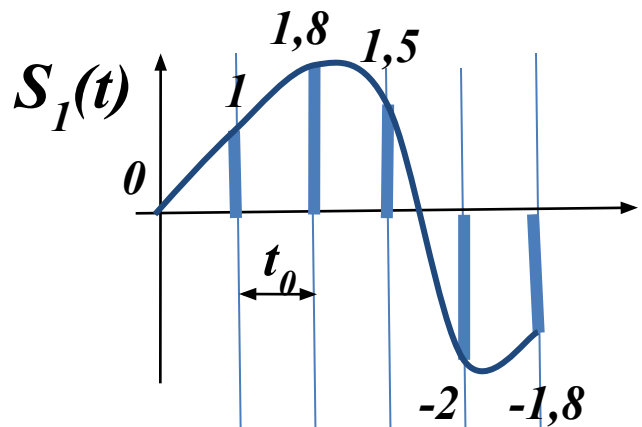


Степень похожести двух разных сигналов при
различных временных сдвигах - ??

Задача определения параметров обнаруженного сигнала



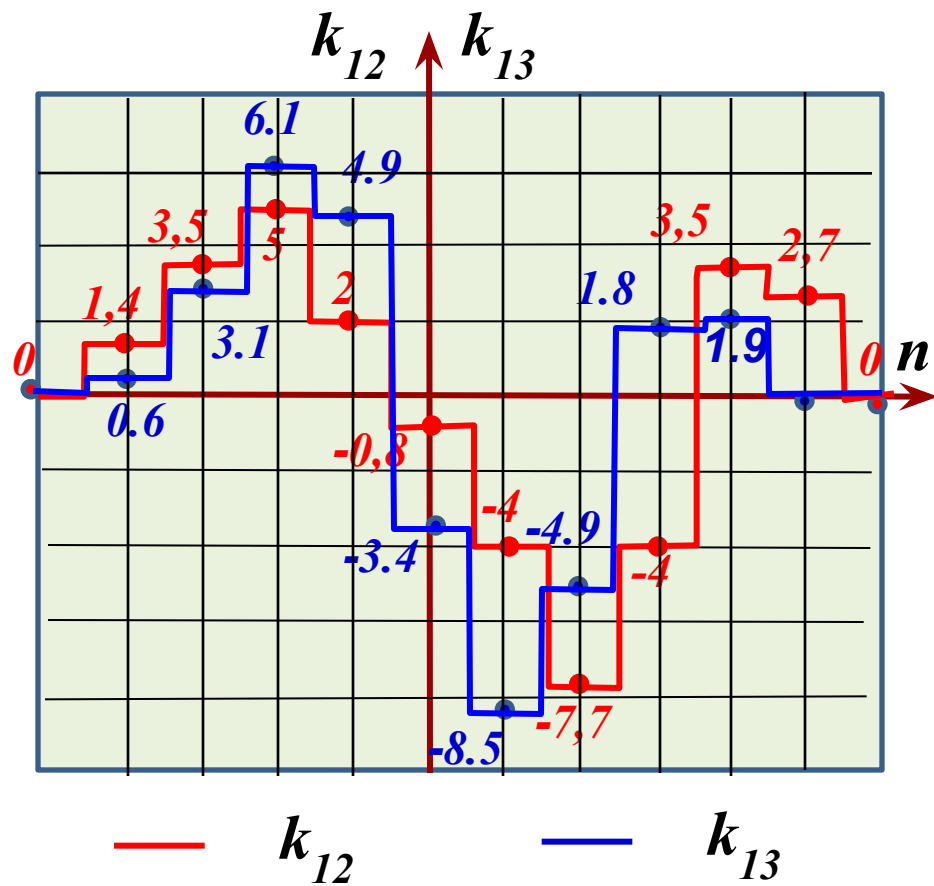
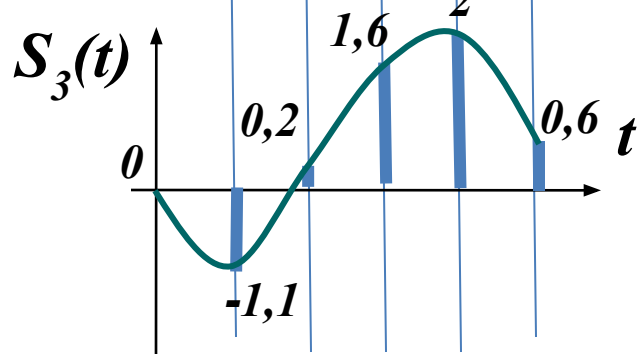
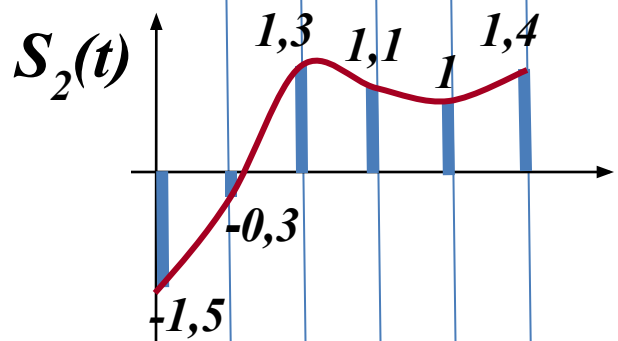
Степень похожести сигнала на свою копию при разных временных сдвигах - ??



$$k_{12}(0) = \sum_{i=-\infty}^k S_1(i)S_2(i)$$

$$k_{12}(n) = \sum_{i=-\infty}^{k-nt_0} S_1(i)S_2(i-nt_0)$$

$$k_{13}(0) = \sum_{i=-\infty}^k S_1(i)S_3(i)$$



$$t_0 \rightarrow 0 \Rightarrow nt_0 \rightarrow \tau$$

$$k_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_1(t)S_2(t-\tau)dt$$

**Функция взаимной
корреляции
ВКФ**

$$S_1(t) = S_2(t)$$

$$k_{11}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_1(t)S_1(t-\tau)dt$$

**Функция
автокорреляции
АКФ**

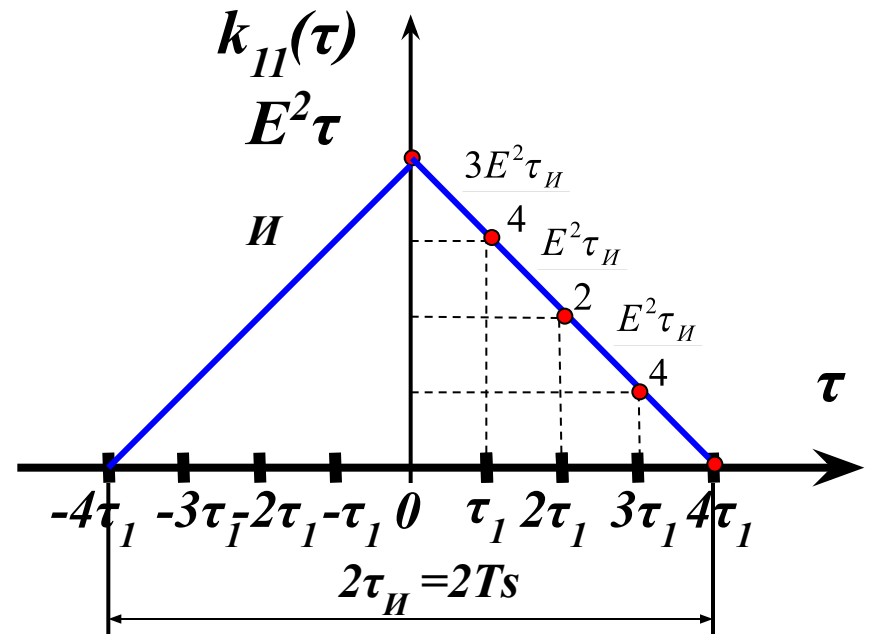
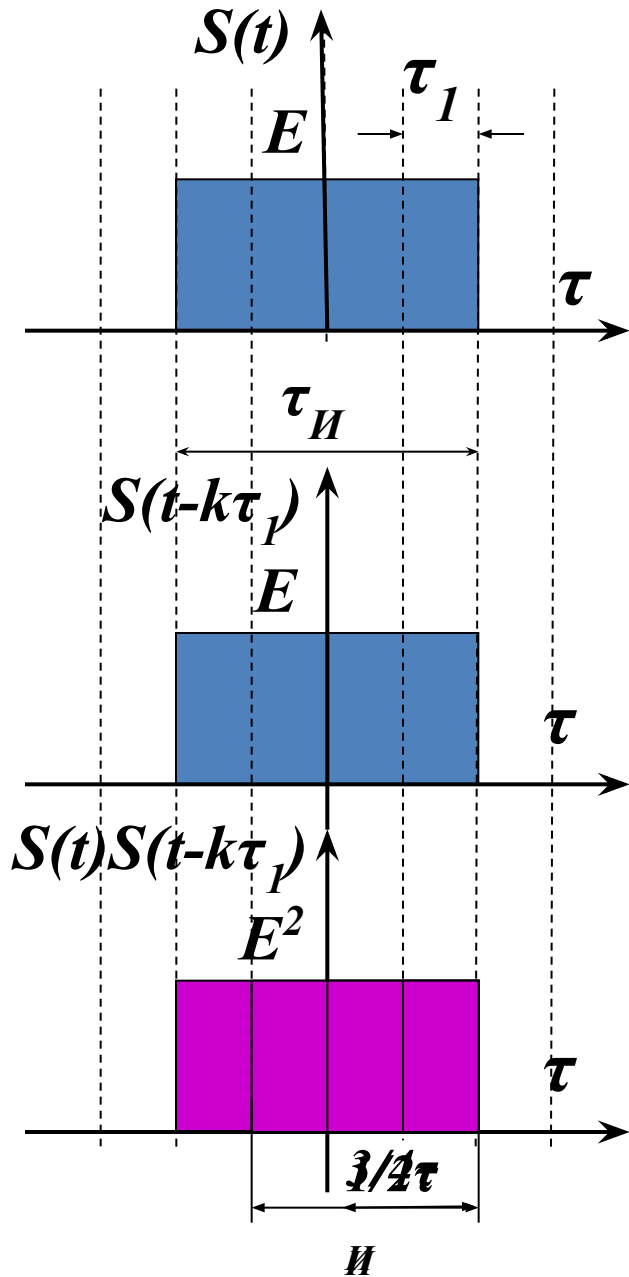
8.3.1. Свойства АКФ

1. При $\tau = 0$: $k_{11}(0) = k_{11 \max} = E_S$

$$k_{11}(0) = \int_{t_1}^{t_2} S_1(t) S_1(t - 0) dt = \int_{t_1}^{t_2} S_1^2(t) dt = E_S$$

2. АКФ – четная функция временного сдвига, т.е.:

$$k_{11}(\tau) = k_{11}(-\tau)$$



$$\tau_1 = \frac{\tau_H}{4}$$

- 3. АКФ сигнала с бесконечной длительностью имеет размерность средней мощности сигнала:**

$$k_{11}(\tau) = \lim_{T_S \rightarrow \infty} \frac{1}{T_S} \int_{-\infty}^{\infty} S(t)S(t - \tau) dt$$

- 4. АКФ сигнала периодического сигнала является периодической функцией с тем же периодом**

$$k_{11}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A \cos(\omega_0 t - \varphi_0) A \cos(\omega_0 t - \varphi_0 - \tau) dt$$

$$S(t) = A \cos(\omega_0 t - \varphi_0)$$

$$k_{11}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A \cos(\omega_0 t - \varphi_0) A \cos(\omega_0 t - \varphi_0 - \tau) dt$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\begin{aligned}
k_{11}(\tau) &= \frac{A^2}{2T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos(\omega_0 t - \varphi_0 - \omega_0 t + \omega_0 \tau + \varphi_0) dt + \\
&+ \frac{A^2}{2T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos(\omega_0 t - \varphi_0 + \omega_0 t - \omega_0 \tau - \varphi_0) dt = \\
&\frac{A^2}{2T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos \omega_0 \tau dt + \frac{A^2}{2T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos(2\omega_0 t - \omega_0 \tau - 2\varphi_0) dt = \\
&\frac{A^2}{2T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos \omega_0 \tau dt + \underbrace{\frac{A^2}{2T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos(2\omega_0 t - \omega_0 \tau - 2\varphi_0) dt}_{\text{гармоника с удвоенной частотой}} = \\
&= \frac{A^2}{2T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos \omega_0 \tau dt \qquad = 0
\end{aligned}$$

АКФ не зависит от начальной фазы сигнала!

5. АКФ и энергетический спектр сигнала связаны между собой парой преобразований Фурье (теорема Винера-Хинчина)

$$S(t) \leftrightarrow \mathfrak{S}(\omega)$$

$$S(t - \tau) = S_\tau(t) \leftrightarrow \mathfrak{S}_\tau(\omega) = |\mathfrak{S}(\omega)| e^{-j\omega(t-\tau)}$$

$$k_{11}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t) S_\tau(t) dt = (SS_\tau)$$

$$(SS_\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{S}_S(\omega) \mathfrak{S}_\tau^*(\omega) d\omega$$

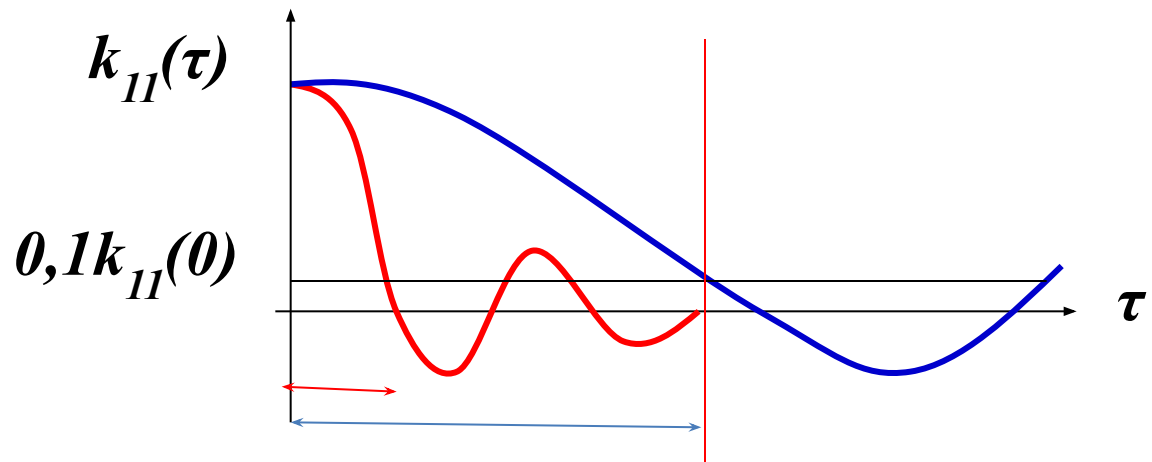
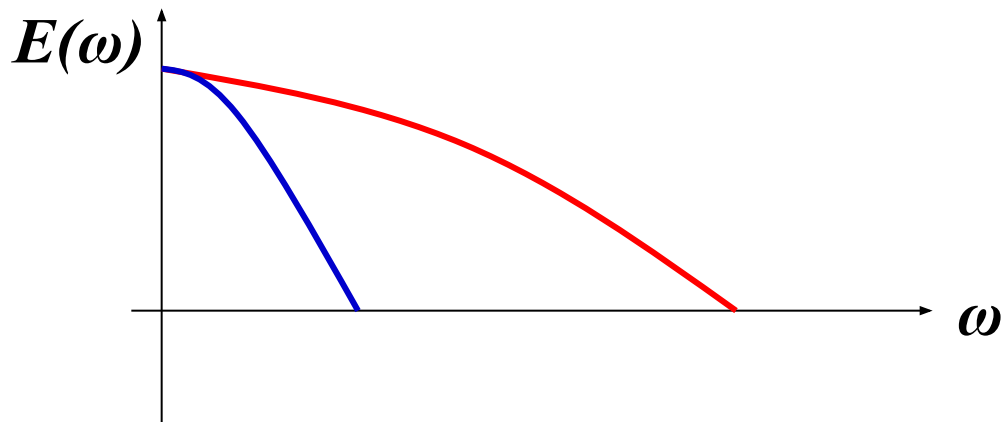
**Обобщенная формула
Релея**

$$\begin{aligned}
k_{11}(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{S}_S(\omega) \mathfrak{S}_\tau^*(\omega) d\omega = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{S}_S(\omega) \mathfrak{S}_\tau(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\mathfrak{S}_S(\omega)|^2 e^{j\omega\tau} d\omega
\end{aligned}$$

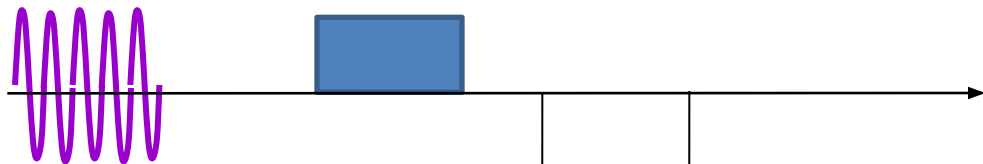
$$k_{11}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

$$E(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} k_{11}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

Теорема Винера - Хинчина



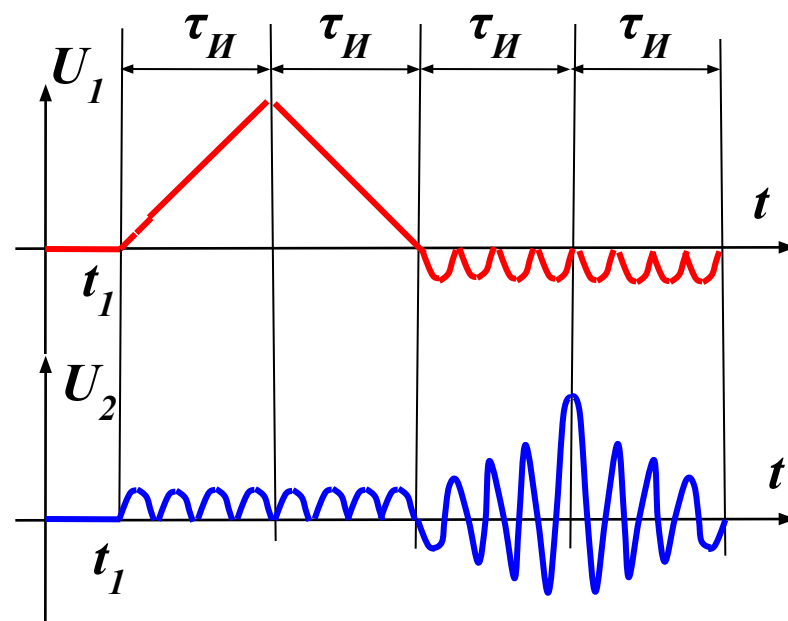
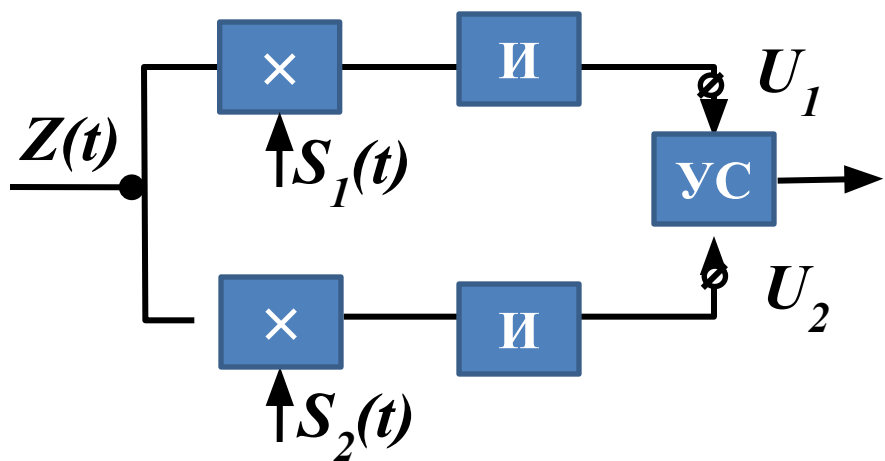
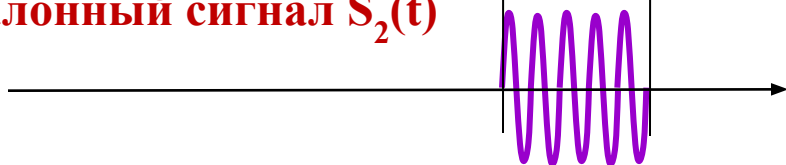
Принятый сигнал $Z(t)$



Эталонный сигнал $S_1(t)$



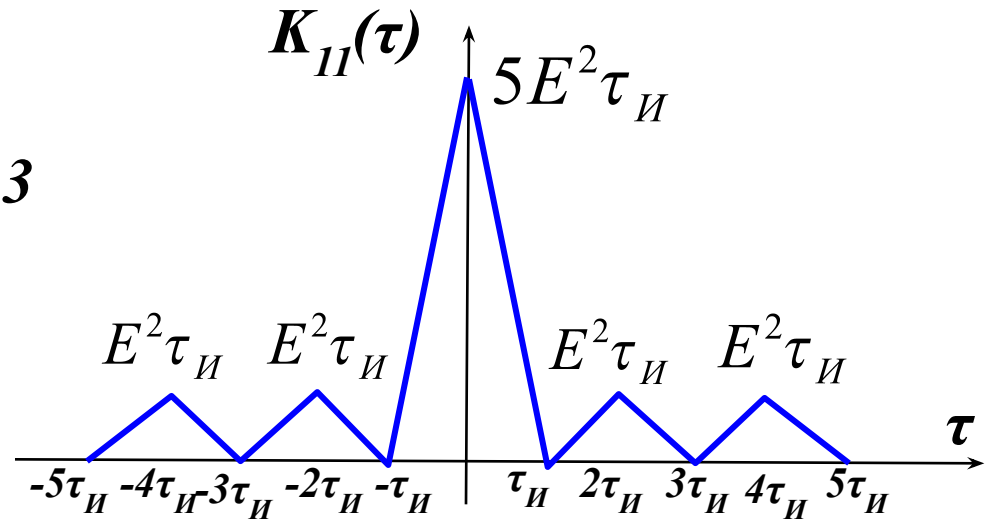
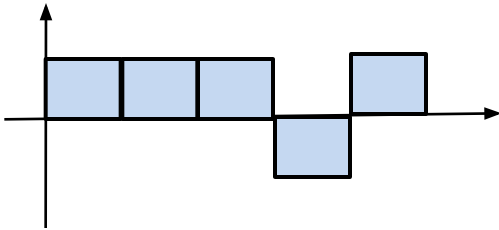
Эталонный сигнал $S_2(t)$



Блок-схема обнаружителя сигналов

Сигналы Баркера

$M = 2; 3; 4; 5; 7; 11; 13$



		$S(t) \rightarrow$									
		$+1$	$+1$	$+1$	-1	$+1$					
$S(t) \rightarrow$	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$	-1	$+1$					
	-1		-1	-1	-1	$+1$	-1				
	$+1$			$+1$	$+1$	$+1$	-1	$+1$			
	$+1$				$+1$	$+1$	$+1$	-1	$+1$		
	$+1$					$+1$	$+1$	$+1$	-1	$+1$	
	Σ	$+1$	0	$+1$	0	$+5$	0	$+1$	0	$+1$	