GeekBrains

Понятие о множестве

Определение и свойства математического множества

В этом видео

1. Определение множества
2. Обозначение множества
3. Реализация концепции множества в программировании
4. Мощность множества

Множество

Множество символизирует объект, сам состоящий из других объектов (элементов), объединенных по одному признаку.

Кантор: “Не существует максимального кардинального числа”

Рассел: “По теории Кантора нельзя составить множество всех множеств”.

Аксиоматическая система Цермело-Френкеля (ZFC)

Аксиома экстенсиональности ZFC

$$\forall a_1 \forall a_2 \left(\forall b \left(b \in a_1 \leftrightarrow b \in a_2 \right) \rightarrow a_1 = a_2 \right)$$

Аксиомы ZFC о существовании множеств

$$\exists a \forall b \, (b \notin a)$$

$$\exists a \, (\varnothing \in a \; \wedge \; \forall b \, (b \in a \to b \cup \{b\} \in a) \,)$$

Аксиомы ZFC об образовании множеств

1. Аксиома пары
2. Декларации о семействах множеств
3. Схемы образования с помощью суждений

Аксиомы ZFC об упорядоченности множеств

1. Аксиома регуляности
2. Аксиома выбора

Обозначения множества

Множество обозначается латинской заглавной буквой, кроме C, R, Z, N и Q - букв, которыми обозначены фундаментальные числовые множества.

Например:

$$A = \{5; 1; 2\}$$

$$B = [4; 3; 5; 1]$$

$$0 = \{\} = \varnothing$$

Способы задания множеств

1. A = {“карандаш”; “бумага”; “ластик”}

$$B = \{x \mid 3 < x < 9 \,\&\, x \in \mathbb{N}\}$$

2.
   1. $2 \in C$
   2. Если $x \in C$, то $2^x \in C$
   3. Повторить

GeekBrains

Множество в языках программирования

JavaScript

```
let arr = [1, 1, 2, 3, 4, 5, 2, 4];
let numbers = new Set(arr);
console.log(numbers);                    // Set(5) {1, 2, 3, 4, 5}
```

Python 3

```
>>> a = set('hello')
>>> a
{'h', 'o', 'l', 'e'}
```

GeekBrains

Мощность множества - количество его элементов.

Например:

1. $A = \{7, 13\}$ - множество, состоящее из двух элементов.
2. $B = \{13, 7\}$ - множество, тождественно равное множеству А
3. $D = \{7, 13, 7, 7, 13\}$ - мультимножество
4. $|D| = 5$ - эта запись означает, что мощность D равна пяти.

Итоги

1. Множество обозначается латинской заглавной буквой
2. Элементы множества перечисляются в фигурных или квадратных скобках
3. Мощность множества это количество его элементов

Конечность множества. Подмножество.

Определение подмножества и концепция конечности множеств

В этом видео

1. Определение и проблема конечности множества
2. Эквивалентность множеств
3. Подмножества и надмножества.

Множество P называется индуктивным, если

$$\exists n \in \mathbb{N}^+ : |P| = n$$

рефлексивным, если

$$\exists P_0 \subseteq P : P_0 \sim P$$

Множество P называется конечным, если оно эквивалентно $\{1; 2; 3; ..; n\}$ при неотрицательном целом n.

$$P \text{ - конечно} \Leftrightarrow P \sim \{1; 2; 3; ..; n\} : n \in \mathbb{N}$$

Теорема Трахтенброта
гласит, что истинность высказываний
логики первого порядка для
конечных моделей неразрешима.

Множества называются эквивалентными, если их мощности равны.

$A \sim B$ или $|A|=|B|$

Принцип Дирихле:
если одно конечное множество приведено в полное соответствие меньшему конечному множеству, то как минимум одному элементу второго множества соответствует более одного элемента первого множества.

Мощности бесконечных множеств называются алефами и обозначаются $\aleph_n$ - где n - порядковый номер упорядоченного ряда алефов.

$$|\mathbb{N}| = \aleph_0$$

Элементы счётного множества можно пронумеровать натуральными числами.

Подмножество и надмножество

1. Подмножество - множество, состоящее из элементов другого множества.
2. Надмножество - исходное множество, для которого множество является подмножеством (понятие, обратное по смыслу подмножеству).

Подмножество и надмножество

1. $A \subseteq B$ - A является подмножеством B
2. $A \subset B$ - A является собственным подмножеством B, то есть $B \neq A$

Свойства подмножеств

$$\varnothing \subset B; \; B \subset B$$

1. $$(A \subset B \wedge B \subset A) \Leftrightarrow (A = B)$$

$$(A \subset B \wedge B \subset C) \Rightarrow (A \subset C)$$

$$(A \subset B) \Leftrightarrow A \cap B = A \wedge A \cup B = B$$

Например:

1. Для множества A = {x | x ∈ $\mathbb{N}$} примерами подмножеств будут:

$$A_1 = \{x|\ x \in \mathbb{N}, x\ mod\ 2 = 0\}$$

$$A_2 = \{x|\ x \in \mathbb{N}, x\ mod\ 2 = 1\}$$

$$A_3 = A$$

2. Множество A является надмножеством для A_1, A_2 и A_3.

Итоги

1. Даны определения конечности множества и подмножества
2. Определена мощность бесконечного множества
3. Сформировано понятие об эквивалентности множеств

GeekBrains

Часть 2 Тема 3

Операции над множествами

Понятие о бинарной и унарной операциях, определения

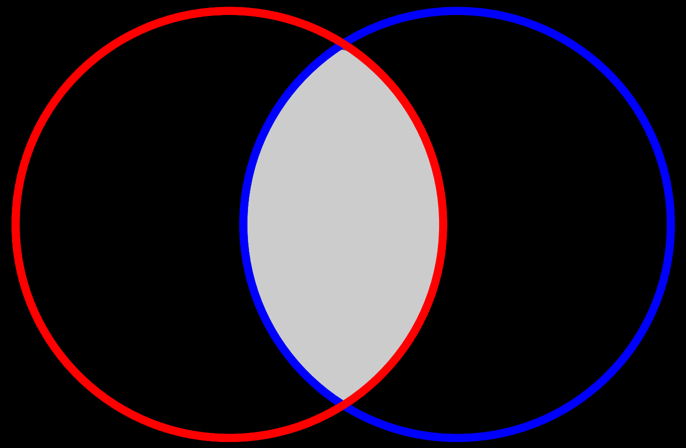
В этом видео

1. Бинарные операции
2. Унарные операции
3. Приоритет операций

Бинарными называются операции, производимые над двумя множествами

Пересечение

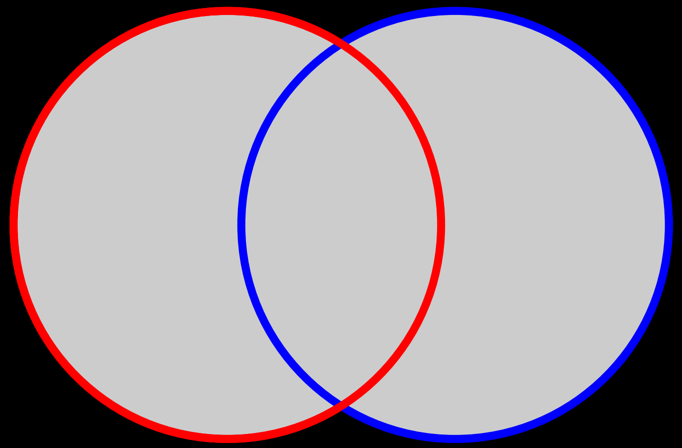
$$A \cap B = \{x | x \in A \,\&\, x \in B\}$$



Объединение

$$A \cup B = \{x | x \in A || x \in B\}$$

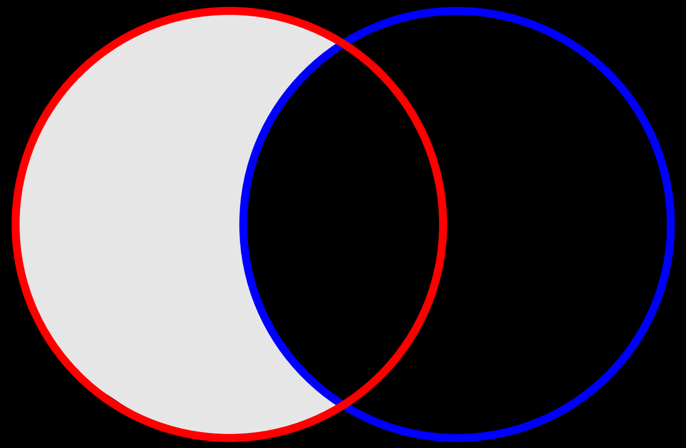
$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$



$$A \setminus B = A \cap \bar{B} = \{x | x \in A \& x \notin B\}$$

$$|A \setminus B| = |A| - |A \cap B|$$

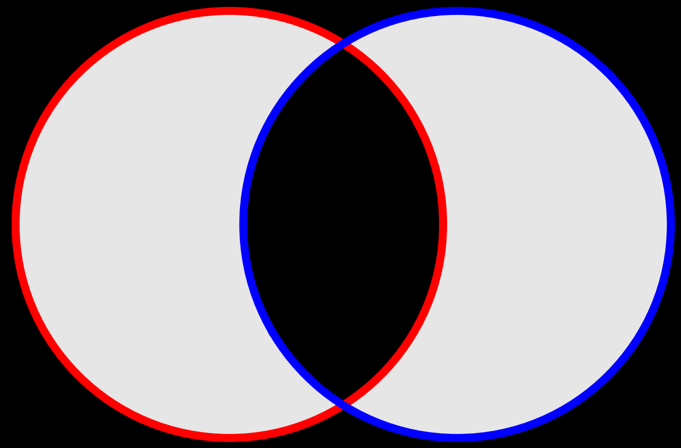
Разность



Симметрическая разность

$$A \triangle B = \{x | x \in A \oplus x \in B\}$$

$$|A \triangle B| = |A| + |B| - 2|A \cap B|$$



GeekBrains

Декартово произведение

$$A \times B = \{(a;b)|a \in A, b \in B\}$$

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

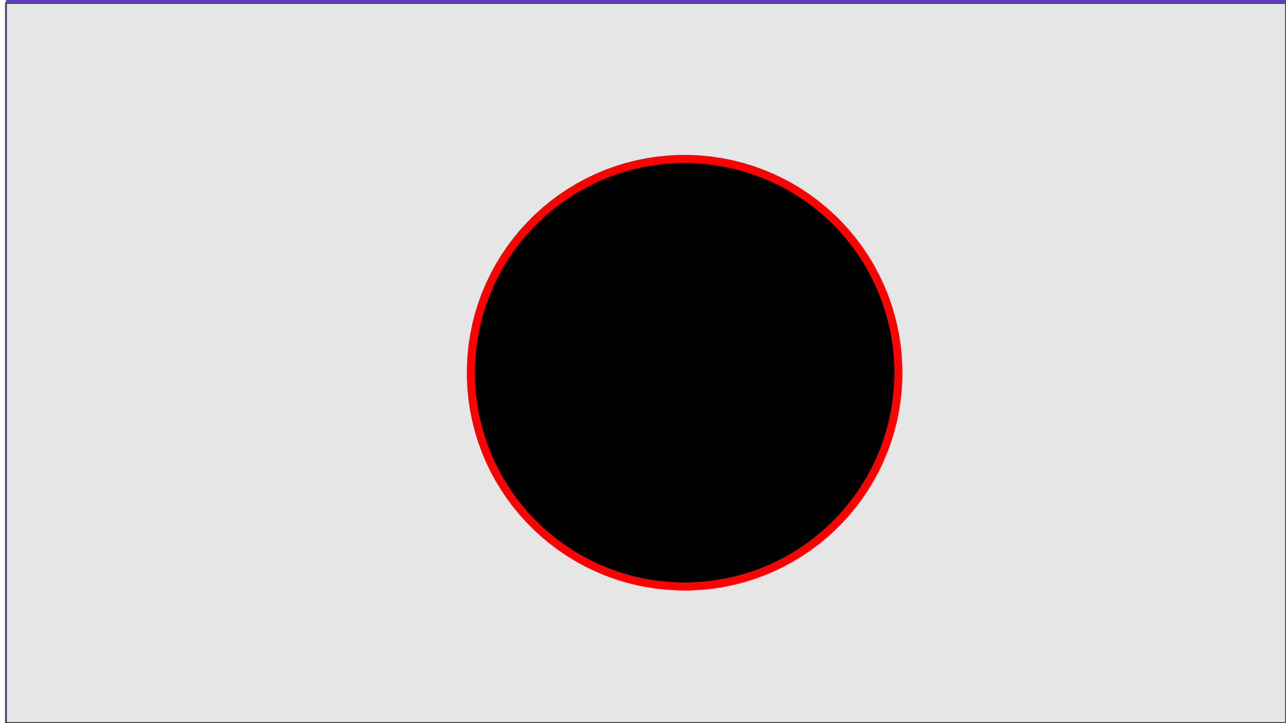
$$A = \{3;5\}, B = \{1;2;3\}$$

$$A \times B = \{(3;1);(5;1);(3;2);(5;2);(3;3);(5;3)\}$$

Унарными называются операции, производимые над одним множеством

Дополнение

$$\bar{A} = U \setminus A = \{x | x \notin A\}$$



GeekBrains

Булеан

$$\mathscr{P}X = \{A | A \subset X\}$$

$$|\mathscr{P}X| = 2^{|X|}$$

В первую очередь выполняются унарные операции, во вторую - пересечение, в третью - все прочие, имеющие равный приоритет.

$$A = \{20; 40; 60\}, B = \{30; 40; 50\}, U = \{10; ..; 90\}$$

1. $A \cap B$ = {20; 40; 60} ∩ {30; 40; 50} = {40}
2. $A \cup B$ = {20; 40; 60} ∪ {30; 40; 50} = {20; 30; 40; 50; 60}
3. $A \setminus B$ = {20; 40; 60} \ {30; 40; 50} = {20; 60}
4. $B \setminus A$ = {30; 40; 50} \ {20; 40; 60} = {30; 50}

$$A = \{20; 40; 60\}, B = \{30; 40; 50\}, U = \{10; \dots; 90\}$$

5. $A \triangle B$ = {20; 40; 60} $\triangle$ {30; 40; 50} = {20; 30; 50; 60}
6. $A \times B$ = {20; 40; 60} $\times$ {30; 40; 50} =

{{20; 30}; {20; 40}; {20; 50};

{40; 30}; {40; 40}; {40; 50};

{60; 30}; {60; 40}; {60; 50}}

$$A = \{20; 40; 60\}, B = \{30; 40; 50\}, U = \{10; ..; 90\}$$

7. $\overline{A} = \{10; 20; 30; 40; 50; 60; 70; 80; 90\} \setminus \{20; 40; 60\} = \{10; 30; 50; 70; 80; 90\}$

8. $\mathscr{P}A = \mathscr{P}\{20; 40; 60\} = \{ \{\ \}; \{20\}; \{40\}; \{60\}; \{20; 40\}; \{20; 60\}; \{40; 60\}; \{20; 40; 60\} \}$

$$A = \{20; 40; 60\}, B = \{30; 40; 50\}, C = \{10; 20; 30\}$$

9. $A \cup B \cap \mathbf{C} = \{20; 40; 60\} \cup \{30; 40; 50\} \cap \{10; 20; 30\} =$
$= \{20; 40; 60\} \cup \{30\} = \{20; 40; 60; 30\}$

10. $(A \cup B) \cap \mathbf{C} = (\{20; 40; 60\} \cup \{30; 40; 50\}) \cap \{10; 20; 30\} =$
$= \{20; 40; 60; 30; 50\} \cap \{10; 20; 30\} = \{20; 30\}$

$$A = \{20; 40; 60\}, B = \{30; 40; 50\}, U = \{10; ..; 90\}$$

11. $$\overline{A \cap B} = \{10; ..; 90\} \setminus \{20; 40; 60\} \cap \{30; 40; 50\} =$$
$$= \{10; 20; 30; 50; 60; 70; 80; 90\}$$
$$\overline{A \cup B} = \{10; ..; 90\} \setminus \{20; 40; 60\} \cup \{30; 40; 50\} =$$
$$= \{10; 70; 80; 90\}$$

Итоги

1. Операции над множествами бывают бинарные и унарные
2. Каждая из операций похожа на операцию двоичной логики