Раздел 2. Основы математической логики

Высказывания

Математическая логика — современный вид формальной логики, изучающей умозаключения с позиций их формального строения путем математических операций. Первичным понятием математической логики является ***высказывание***— имеющее смысл языковое выражение, допускающее однозначную констатацию: либо — истина, либо — ложь.

Примеры:

Минск — столица Беларуси (истина).

Заяц — хищное животное (ложь).

Который час? (не высказывание).

В отличие от привычной нам арифметики, в которой любое число составляется из цифр 1, 2, ..., 0, в математической логике всего два числа: «истина» и «ложь». Значение «истина» обычно обозначается цифрой «1», а «ложь» — цифрой «0». Тогда высказывания *A*и *B* символически запишутся в виде: *A*= 1; *B*= 0.

Высказывания принято обозначать латинскими буквами. Если высказывание представляет одно утверждение типа: 1 или 0, то его называют простым (или элементарным). С помощью простых высказываний можно (как и в обычных речевых конструкциях) строить более сложные — составные высказывания и различные функции от высказываний. Для таких построений используются логические операции, похожие на операции с арифметическими числами и, в большей степени, на операции с множествами.

Отметим, что в математической логике все высказывания рассматриваются только как однозначные логические значения, без их житейского содержания и контекста. Не являются высказываниями утверждения, которые допускают неоднозначную трактовку (типа: «Сегодня хорошая погода»).

Операции над высказываниями

Логической операцией над высказываниями(или отдельным высказыванием) называется построение нового высказывания из исходных высказываний. Знаки логических операций' называются логическими связками (или просто связками). Они могут быть одноместными (или унарными) — применяются к одному высказыванию, двуместными (или бинарными) — для двух высказываний, трехместными и т. д. Рассмотрим наиболее распространенные операции.

Отрицание (негация)

Отрицанием (негацией) высказывания x называется новое высказывание *x* , которое является истиной, если x=0, и ложью, если x=1. Запись:□*x* = ¬x (читается: «не *x*»). Ясно, что *«¬»* — унарная связка, так как применяется только к одному утверждению. Таким образом, возможны следующие варианты:

а) x=1, :□*x* = ¬x=0; *б)* x=0, :□*x* = ¬x=1.

Эти два варианта полностью определяют свойства операции *«¬».* Принято описывать свойства операций с помощью таблицы:

x	¬x
1	0
0	1

Такие таблицы называются *таблицами истинности.* Связка] может использоваться и несколько раз. К примеру: *x* = 1,]x = 0,]]x =](]x) =](0) = 1 = x, 0 и т. д.

Конъюнкция (логическое умножение)

Конъюнкцией (логическим умножением) двух высказываний *x* и *y* называется новое высказывание *z*, которое является истиной только при истинности обоих высказываний x и y, и ложью, если хотя бы одно из высказываний x или y ложно. Запись: z = x∧y (иногда встречаются *x&y* и x *y),* читается *«x* и *y».* Связка «∧» — бинарная, связывает два высказывания. Таблица истинности имеет вид:

x	y	x∧y
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Таким образом, конъюнкция двух высказываний позволяет получить новое высказывание с точным значением истины или лжи.

Например: x = «6 делится на 2» = 1;

y = «6 делится на 3» = 1. Тогда $z1 = x \wedge y$ = «6 делится на 2 и на 3» = 1.

Другой пример:

x = «Минск — столица Беларуси» = 1; y = «Минск расположен в Азии» = 0.

Тогда $z2 = x \wedge y ==$ «Минск — столица Беларуси и расположен в Азии» = 0. Возможно и комбинирование связок.

Так $\neg z1 = \neg(x \wedge y) = \neg(1) = 0$ или $\neg Z2 = \neg(x \wedge y) = \neg(0) = 1$.

Дизъюнкция (логическое сложение)

Дизъюнкцией (логическим сложением) двух высказываний x и y называется новое высказывание z, которое является истиной, если хотя бы одно из высказываний x или y истинно, и ложью, только в случае ложности как x, так и y. Запись: z= xvy (иногда x + *y)* читается «x или *y». Связка* ∨ бинарная. Таблица истинности:

x	y	x∨y
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

ПРИМЕР: x = «6 × 3= 18» = 1; y = «18 - трехзначное число» = 0. Тогда *z* = *x*∨y = «6 x 3= 18 или 18 - трехзначно» = 1, так как одно из утверждений — истинно.

Импликация

- ***Импликацией*** двух высказываний x и y называется новое высказывание *z*, которое будет ложным только в случае, когда x — истинно, а y — ложно, и истинным во всех остальных случаях. Запись: z= x → y (встречаются обозначения x => y, x ⊃y). Чтение: «если x, то *y*» или «из x следует *y*», или «*x* влечет *y*». В этом высказывании x часто называется условием или посылкой, а y - следствием или заключением. Таблица истинности:

x	y	x→y
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

ПРИМЕР: x =«6 × 3 = 18» = 1;y= «18: 6 = 7» = 0.

Тогда z= x→ y = «Если 6 × 3 = 18, то 18 : 6 = 7» = 0.

Эквиваленция

Эквиваленцией двух высказываний x и y называется новое высказывание z, которое будет истинным, только когда оба высказывания x и y одновременно истинны или одновременно ложны, и ложным в остальных случаях. Запись: $z = x \leftrightarrow y$ (встречаются обозначения *x~ y*, x $\Leftrightarrow$ *y).* Чтение: «x эквивалентно *y»* или *«x* тогда и только тогда, когда *y»,* или «для того, чтобы x, необходимо и достаточно, чтобы *y».* Таблица истинности:

x	y	x↔y
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Например, пусть x = «2 > 3» = 0; y = «6 : 2 =3» = 1. Тогда $z = x \leftrightarrow y$ = «2 > 3 тогда и только тогда, когда 6 : 2 = 3» = 0.

Исключающее «или» (неравнозначность)

Исключающее «или» (неравнозначность) Неравнозначностью двух высказываний A и B называется высказывание, истинное, когда истинностные значения A и B не совпадают, и ложное — в противном случае. Обозначается: $A \oplus B$. Читается: «либо A, либо B» (понимается — в разделительном смысле). Таблица истинности для неравнозначности име

A	B	$A \oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Формулы алгебры логики

С помощью логических операций над высказываниями можно строить различные сложные высказывания. Порядок выполнения операций регулируется: 1) скобками; **2)** соглашением о старшинстве операций: $\neg$; $\wedge$; $\vee$**;** $\rightarrow$**;** $\leftrightarrow$(в порядке убывания).

Неделимое высказывание называется *элементарным*. Всякое высказывание, которое может быть получено из элементарных высказываний путем применения конечного числа логических операций, называется *формулой алгебры логики*.

ПРИМЕРЫ: $p = (x \wedge y) \vee z; q = x \rightarrow \rceil (y \vee (x \wedge z))$ или $q=x \rightarrow (y \vee (x \wedge z))$. С учетом соглашения о старшинстве эти формулы могут быть записаны и в виде: $p = x \wedge y \vee z$; $q=x \rightarrow y \vee x \wedge z$.

Логическое значение формулы определяется заданными логическими значениями входящих в нее элементарных высказываний. Пусть, к примеру, $x=1, y=1, z=0$. Определим значение формулы $P= \neg x \wedge \neg y \vee z$.

Последовательно: $P\ \neg x \wedge \neg y \vee z = \neg (x \wedge y) \vee z = \neg (1) v z = 0 \text{ v } 0 = 0$.

Если же ставится задача определить все возможные значения формулы в зависимости от всех возможных значений входящих в нее элементарных высказываний, то она может быть решена путем перебора с помощью построения *таблицы истинности*.

Например, для формулы $z = x \wedge \neg y \rightarrow \neg x \vee y$ такой перебор имеет вид:

x	y	¬x	¬y	$x \wedge \neg y$	$\neg x \vee y$	z
1	1	0	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	1	1

Число значений формулы определяется числом n элементарных высказываний и равно 2^n (это же и число строк таблицы). Так, в нашем примере всего два элементарных высказывания x и *y*, т. е. $n = 2$ и число значений для z равно $2^2 = 4$ (четыре строки таблицы).

Отметим также, что составные части формулы, которые являются элементарными выражениями, уже не будут жестко заданными, а зависят от конкретных логических значений, определяемых извне, т. е. элементарные выражения в формуле — <u>переменные.</u>

Равносильные формулы

Две формулы алгебры логики *A и B* называются *равносильными*, если они принимают одинаковые логические значения при любом наборе значений элементарных высказываний, входящих в формулы. Обозначение: $A \equiv B$ (можно $A \leftrightarrow B$). Чтение: «*A* равносильно В».

ПРИМЕРЫ: $x = \rceil\rceil x$; $x = x \wedge x$; $x \wedge 0 = 0$; $x \vee x = 1$ и т. д. Легко видеть, что если $A = B$, то и □***A*** **=**□***B.***

Тождественно истинная (тавтология)

Формулу *A* назовем тождественно истинной (или **тавтологией**), если она принимает значение 1 при всех значениях входящих в нее переменных.

ПРИМЕРЫ тавтологий: $x \vee \neg x$ и $x \to (y \to x)$. В этом легко убедиться, составив таблицы истинности:

x	¬x	X ⋁¬x	…	x	y	y→x	x→(y→x)
1	0	1		1	1	1	1
1	0	1		1	0	1	1
0	1	1		0	1	0	1
0	1	1		0	0	1	1

Тождественно ложная (противоречие)

Формулу*A* назовем **тождественно ложной**, если она принимает значение 0 при всех значениях входящих в нее переменных.

ПРИМЕР: $x \wedge \neg x$, которая всегда ложна.

Свойства алгебры логики

Из определений равносильных формул следует, что отношение равносильности обладает свойствами:

- $A = A$ (рефлексивно).
- Если $A = B$, то $B = A$ (симметрично).
- Если $A = B$ *и* $B = C$, *то* $A = C$ (транзитивно).

Приведем три важнейшие группы равносильностей алгебры логики:

- ***Основные равносильности***

- $x \wedge x = x$; $x \vee x = x$ — идемпотентность;
- $x \wedge 1 = x$; $x \vee 1 = 1$; $x \wedge 0 = 0$; $x \vee 0 = x$; $x \wedge (y \vee x) = x$; $x \vee (y \wedge x) = x$— законы поглощения;
- $x \wedge \neg x = 0$ — закон противоречия;
- $x \vee \neg x = 1$ — закон исключенного третьего;
- $\neg\neg x = x$ — закон отрицания противоречия.

- Любая из этих и последующих равносильностей доказывается составлением таблицы истинности. ' •

- ***Равносильности преобразований***
- $x \leftrightarrow y = (x \to y) \wedge (y \to x)$ — закон контрапозиции;
- $x \to y = \bar{x} \vee y$;
- $\overline{x \wedge y} = \bar{x} \vee \bar{y}$; $\overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge \bar{y}$ — законы де Моргана;
- $x \wedge y = \overline{\neg x \vee \neg y}$; $x \vee y = \overline{\neg x \wedge \neg y}$; — следствия законов де Моргана;
- $(x \wedge y) \vee (x \wedge \bar{y}) = x$; $(x \vee y) \wedge (x \vee \bar{y}) = x$ — формулы расщепления.
- $x \oplus y = \bar{x}\, y \vee x\, \bar{y}$.
- $\bar{x} = 1 \oplus x$.
- $x \vee y = x \oplus y \oplus xy$.

- **Равносильности алгебры логики**
- $x \wedge y = y \wedge x; x \vee y = y \vee x$ — коммутативность;
- $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z; x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ — ассоциативность;
- $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z); x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ — дистрибутивность.

С помощью приведенных здесь равносильностей можно упрощать логические выражения, т. е. уменьшать количество формул и операций. При этом следует стремиться к замене связок $\leftrightarrow$ и $\rightarrow$ на $\wedge$ и $\vee$. Отрицание же ($\neg$) относится к элементарным операциям.

Контактные схемы

Рассмотрим практическое применение булевой алгебры в электротехнике.

К.С. – это устройства релейно-контактного действия, которые широко используются в ЭВМ. К.С. состоит из переключателей, соединяющих проводов и полюсов. Каждый переключатель может находиться в одном из двух состояний (замкнутом – 1 и разомкнутом – 0), т.е. переключатель представляет собой булеву функцию. Если значение этой функции =1 (переключатель замкнут), ток проходит через переключатель. При нулевом значении булевой функции ток через переключатель не проходит (переключатель разомкнут).

Булевой функции f(x)=x соответствует контактная схема

--- x ---

С помощью контактной схемы **---**□x --- **получают отрицание** □x. Конъюнкция xy реализуется контактной схемой --x--y--

Способы задания булевых функций

1. Таблицей истинности
2. Аналитические формы задания булевой функции в виде формулы
3. Из табличной формы задания б.ф. набор значений переменных рассматривается как число, записанное в n-разрядном двоичном коде, где n – число переменных. Например, для б.ф. 3 переменных будем иметь номера 0,1,2,3,4,5,6,7. Поэтому б.ф. можно задать, указав номера наборов, на которых она =1.
4. Также происходит из табличной формы. Б.ф. задается в векторной форме, компоненты вектора равны 0 и 1. В этом векторе i-тая компонента равна 1, если б.ф. на i–том наборе =1. Аналогично, в векторе i-тая компонента равна 0, если б.ф. на i–том наборе =0.
5. Представление Булевой функции в виде КНФ

Функциональная полнота

Теорема 1. *Всякая логическая функция может быть представлена булевой формулой,* т.е. как суперпозиция дизъюнкций, конъюнкций и отрицания. Из этого следует, что система булевых функций(операций) Σ={&, ∨, ¬} функционально полна.

Наряду с определением свойств функций набора для доказательства его функциональной полноты достаточно показать, что через функции набора можно выразить дизьюнкцию, конъюнкцию и отрицание. Справедливо и более общее утверждение

Алгебра(P_2, &, ∨, ¬), основным множеством которой является множество всех логических функций P_2, а операциями – конъюнкция, дизъюнкция и отрицание, называется *булевой алгеброй логических функций*. Операции и формулы булевой алгебры часто называют *булевыми*.

Система операций булевой алгебры {&, ∨, ¬} функционально полна. Это означает, что переход задания любой логической функции к формуле булевой алгебры, или булевой формуле,

Способ перехода от табличного задания логической функции к булевой формуле:

для каждого набора значений переменных $x_{1,\ldots,}$ x_n, на котором функция $f(x_1,\ldots,x_n)$ равна 1, выписываются конъюнкции всех переменных: над теми переменными, которые на этом наборе равны 0, ставятся отрицания; все такие конъюнкции соединяются знаками дизъюнкции.

Полученная таким образом формула называется *совершенной дизъюнктивной нормальной формой (СДНФ)* логической функции $f(x_1,\ldots,x_n)$.

Для каждой функции СДНФ *единственна* (с точностью до перестановок переменных или конъюнкций). Например, для функции, заданной таблице., СДНФ имеет вид (для удобства ее восприятия используем в формуле другой, более употребимый в алгебре логики символ конъюнкции):

$$x_1 \cdot \square x_2 \cdot \square x_3 \vee x_1 \cdot \square x_2 \cdot \square x_3 \vee x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$$

$x_1\, x_2\, x_3$	$\neg x_1$	$\neg x_1 \vee x_2$	$x_1 \& x_3$	$(\neg x_1 \vee x_2) \rightarrow (x_1 \vee x_3)$
000	1	1	0	0
001	1	1	0	0
010	1	1	0	0
011	1	1	0	0
100	0	0	0	1
101	0	0	1	1
110	0	1	0	0
111	0	1	1	1

Пример 1. В алгебре **(***P_2***; &, ⊕,** 1), называемой *алгеброй Жегалкина,* ее сигнатура ∑ = {&, ⊕, 1} является функционально полной системой. Это означает, что любая логическая функция может быть представлена формулой над ∑, т.е. формулой, содержащей только символы переменных, скобки и символы операций из {&, ⊕, 1}.

Опираясь на теоремы 1 и 2, пояснить, почему для доказательства функциональной полноты {&, Ф, 1} достаточно подтверждения :

а)□x *x* =x⊕ 1,

б) x_1 X, V X_2 = $x_1 \cdot$ $x_2 \oplus x_1 \oplus x_2$.

Убедиться в справедливости указанных соотношений стандартным методом доказательства эквивалентности формул.

Построенные таблицы истинности левых и правых частей соотношений и подтверждают справедливость последних.

x		1	$x \oplus 1$
01	10	11	10

$x_1 x_2$	$x_1 \vee x_2$	$x_1 \cdot x_2$	$x_1 \cdot x_2 \oplus x_1$	$x_1 \cdot x_2 \oplus x_1 \oplus x_2$
00	0	0	0	0
01	1	0	0	1
10	1	0	1	1
11	1	1	0	1

Приведение к дизъюнктивной нормальной форме(ДНФ)

1. Все отрицания донести до переменных с помощью законов де Моргана и отрицания
2. Раскрыть скобки с помощью ассоциативного, коммутативного и дистрибутивного законов
3. Удалить лишние конъюнкции и повторения переменных в конъюнкциях
4. Удалить константы.

Пример 1. Доказать справедливость обобщенного склеивания методом эквивалентных преобразований (используя основные эквивалентные соотношения).

Выполним эквивалентные преобразования, указывая под знаком равенства номер используемого соотношения:

$xz \vee \bar{y}z \vee xy = xz \vee yz \vee xy \cdot 1 = xz \vee yz \vee \bar{x}y(z \vee z) = xz \vee yz \vee \bar{x}yz \vee xy\bar{z} = xz \vee yz$

Приводим справедливость использованного выше соотношения

$x \vee xy = x \cdot 1 \vee xy = (1 \vee y) = x$

приведение к конъюнктивной нормальной форме(КНФ).

КНФ называется конъюнкция элементарных дизъюнкций. Пример КНФ

$(x \vee y) \cdot (x \vee z) \cdot (x \vee y \vee z)$

Пример. Пусть ДНФ F имеет вид $F=k_1 \vee k_2 \vee \dots \vee k_m$, где $k_1, k_2, \dots, k_m$ – элементарные конъюнкции.

Процедура приведения ДНФ и КНФ:

$F=\overline{\overline{k_1 \vee k_2 \vee \dots \vee k_m}}$ и привести $\overline{k_1 \vee k_2 \vee \dots \vee k_m}$ к ДНФ $k_1' \vee k_2' \vee \dots \vee k_p'$, где $k_1', k_2', \dots, k_p'$ – элементарные конъюнкции. Тогда $F=\overline{\overline{k_1 \vee k_2 \vee \dots \vee k_m}} = \overline{k_1' \vee k_2' \vee \dots \vee k_p'}$

С помощью правил де Моргана освободиться от второго отрицания и преобразовать отрицания элементарных конъюнкций в элементарные дизъюнкции $D_1, D_2, \dots, D_p$. Тогда $F=\overline{k_1' \vee k_2' \vee \dots \vee k_p'} = \overline{k_1'} \cdot \overline{k_2'} \cdot \dots \cdot \overline{k_p'} = D_1, D_2, \dots, D_p$.

Двойственность булевой функции

Функция $F^*(x, \dots, x_n)$ называется двойственной к функции $F(x, \dots, x_n)$, если $F^*(x, \dots, x_n) = \overline{F}(\overline{x}, \dots, \overline{x}_n)$.

Отношение двойственности между функциями симметричны т.е. если F^* двойственна к F, то F двойственна к F^*.

$$F(x_1,\dots,x_n)=F^*(x_1,\dots,x_m)= F(x_1,\dots,x_n)$$

Функция двойственная к самой себе, называется самодвойственной

Пример самодвойственной функции. $F=-x$; $\rho=xy \vee xz \vee yz$

Множество всех булевых функций обозначается P_2 . $|P_2|={}_2 2^n$.

Принцип двойственности

Принцип двойственности в булевой алгебре: если в формуле конъюнкции заменить на дизъюнкции , дизъюнкции на конъюнкции, 1 на 0, 0 на 1, то получим формулу F^*, представляющую функцию F^*, двойственную F.

Справедливо утверждение: если функции равны, т.е. $F_1=F_2$, то и двойственные функции равны, т.е. $F_1^* = F_2^*$.

Совершенной конъюнктивной нормальной формой (СКНФ) называется КНФ, каждая элементарная дизъюнкция которой содержит все переменные.

Понятие предиката

- Сказуемое в высказывании называется предикатом. Высказывание состоит из подлежащего и сказуемого. Например, пусть предикат P(x) означает, что «x есть чётное число». Тогда запись A={x|P(x)} читается, что множество A состоит из элементов x таких, что x–четное число; или x есть P(x).

Можно определить двухместный и многоместный предикаты. С помощью логических связок, определенных для высказываний, можно образовывать сложные предикаты.

Например, предикат $\overline{\mathrm{P}(\mathrm{x})}$ будет означать, что x – нечетное число. Кроме логических связок в исчислении предикатов используют кванторы общности и существования. Операция ¬ преобразует кванторы друг в друга.

$\overline{\forall \mathrm{x}}\mathrm{P}(\mathrm{x}) = \exists \mathrm{x}\overline{\mathrm{P}(\mathrm{x})}$ и $\overline{\exists \mathrm{x}}\mathrm{P}(\mathrm{x}) = \forall \mathrm{x}\overline{\mathrm{P}(\mathrm{x})}$.