# ЛОГИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭВМ

# Алгебра логики

- **Алгебра логики (булева алгебра)** – это раздел математики, возникший в XIX веке благодаря усилиям английского математика Дж. Буля. Поначалу булева алгебра не имела никакого практического значения. Однако уже в XX веке ее положения нашли применение в описании функционирования и разработке различных электронных схем. Законы и аппарат алгебры логики стал использоваться при проектировании различных частей компьютеров (память, процессор).

# Алгебра логики

- Основными понятиями алгебры логики являются понятие логической переменной и логической функции.
- Логической переменной (аргументом) называется величина которая может принимать одно из двух значений («0» или «1»)
- Логической функцией называется функция двоичных переменных которая также может принимать одно из двух возможных состояний («0» или «1»)

# Алгебра логики

- Алгебра логики предусматривает множество логических операций. Однако три из них заслуживают особого внимания, т. к. с их помощью можно описать все остальные, и, следовательно, использовать меньше разнообразных устройств при конструировании схем.

Такими операциями являются:

- **Конъюнкция** – логическое умножение (И) – **and, &, ∧,***.
- **Дизъюнкция** – логическое сложение (ИЛИ) – **or, ||, v,+**.
- **Отрицание** (НЕ) – **not, ¬**.

# Приоритет логических операций

- 1. Операция Инверсия (отрицания)
- 2. Операция Конъюнкция (логического умножения)
- 3. Операция Дизъюнкция (логического сложения)

# Таблицы истинности

- Конъюнкция

| A | B | A&B |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

- Дизъюнкция

| A | B | A\|\|B |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

- Отрицание

| A | ¬A |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

# Законы алгебры логики

- ***Законы рефлексивности***

$a \lor a = a$

$a \land a = a$

- ***Законы коммутативности***

$a \lor b = b \lor a$

$a \land b = b \land a$

- ***Законы ассоциативности***

$(a \land b) \land c = a \land (b \land c)$

$(a \lor b) \lor c = a \lor (b \lor c)$

- ***Законы дистрибутивности***

$a \land (b \lor c) = (a \land b) \lor (a \land c)$

$a \lor (b \land c) = (a \lor b) \land (a \lor c)$

- ***Закон отрицания отрицания***

$\neg (\neg a) = a$

- ***Законы де Моргана***

$\neg (a \land b) = \neg a \lor \neg b$

$\neg (a \lor b) = \neg a \land \neg b$

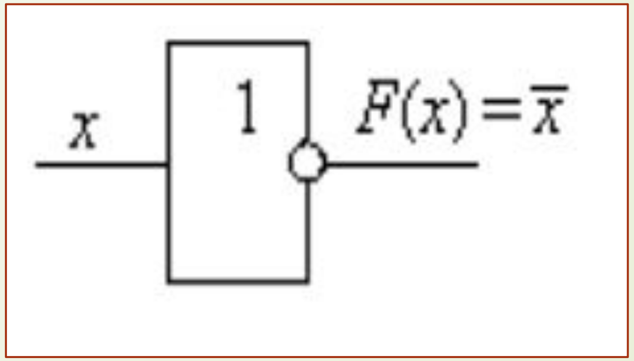
- ***Законы поглощения***

$a \lor (a \land b) = a$

$a \land (a \lor b) = a$

# Логическая связь НЕ (логическое отрицание)

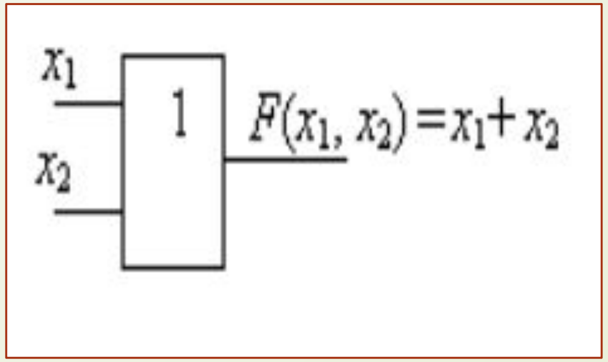
- Отрицанием высказывания x называют сложное высказывание F(x), которое истинно, когда x ложно и ложно, когда x истинно.
- Аналитическая функция: $F(x) = \bar{x}$




| x | F(x) |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

# Логическая связь ИЛИ – сложение (дизъюнкция) высказываний

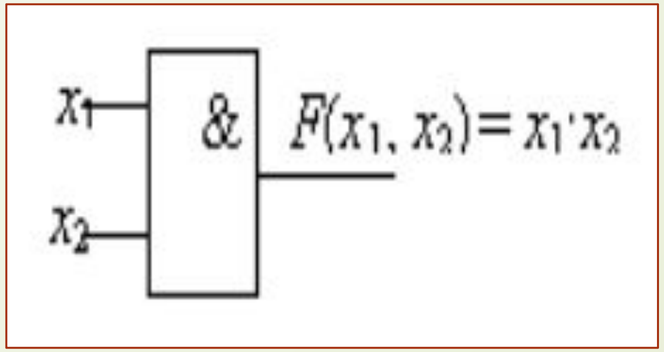
- Дизъюнкцией двух высказываний x1 и x2 называется сложное высказывание F(x1, x2), которое ложно только в одном случае, когда x1 и x2 одновременно ложны (x1 = 0 и x2 = 0). Во всех остальных случаях высказывание F(x1, x2) истинно.
- Аналитическая функция: $F(x_1, x_2) = x_1 \mathrm{V} x_2 = x_1 + x_2$




| | | |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

# Логическая связь И (конъюнкция высказываний)

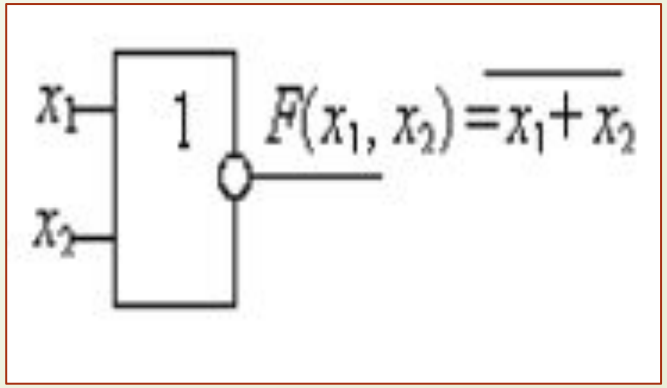
- Конъюнкцией высказываний x1 и x2, называется сложное высказывание F(x1, x2), которое истинно только в одном случае, когда x1 и x2 одновременно истинны (x1 = 1 и x2 = 1). Во всех остальных случаях высказывание F(x1, x2) ложно.
- Аналитическая функция: $F(x_1, x_2) = x_1 \wedge x_2 = x_1 \cdot x_2$




| | | |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

# Логическая связь отрицание дизъюнкции (операция Пирса)

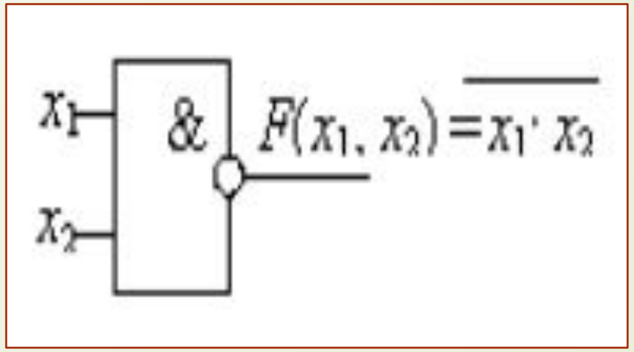
- Логической связью отрицание дизъюнкции высказываний x1 и x2, называется сложное высказывание F(x1, x2), которое истинно только в том случае, когда x1 и x2 одновременно ложны (x1 = 0 и x2 = 0). Во всех остальных случаях высказывание F(x1, x2) ложно.
- Аналитическая функция: $F(x_1, x_2) = x_1 \downarrow x_2 = \overline{x_1 + x_2}$




| | | |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 |

# Логическая связь отрицание конъюнкции (операция Шеффера)

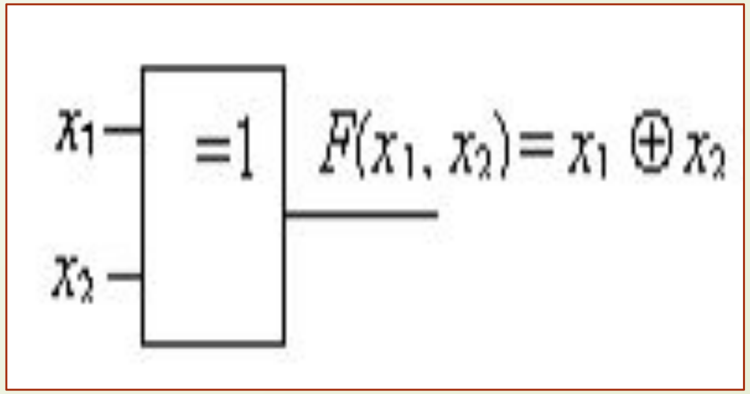
- Логической связью отрицание конъюнкции высказываний x1 и x2, называется сложное высказывание F(x1, x2), которое ложно только в том случае, когда x1 и x2 одновременно истинны (x1 = 1 и x2 = 1). Во всех остальных случаях
- Аналитическая функция: $F(x_1, x_2) = x_1 \uparrow x_2 = \overline{x_1 \cdot x_2}$




| | | |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

# Логическая связь отрицание равнозначности(операция ИЛИ-ИЛИ)

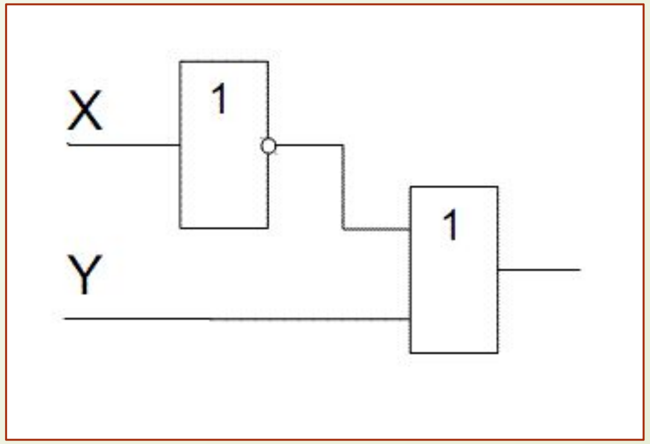
- Логической связью *отрицание равнозначности* высказываний x1 и x2, называется сложное высказывание *F*(x1, x2), которое истинно тогда, когда значения истинности высказываний x1 и x2 не совпадают и ложно, когда значения истинности высказываний x1 и x2 совпадают.
- Аналитическая функция: $F(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2$




| | | |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

# Импликация

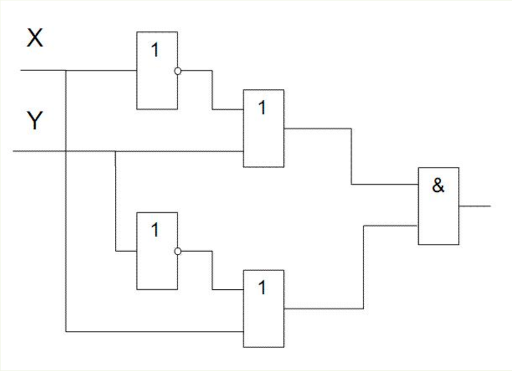
- Импликация — бинарная логическая связка, по своему применению приближенная к союзам «если… то…».
- Импликация записывается как посылка =>следствие; применяются также стрелки другой формы и направленные в другую сторону (остриё всегда указывает на следствие).
- Аналитическая функция: $F(x_1, x_2) = x_1 \rightarrow x_2$




| | | |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

# Логическая равнозначность (эквивалентность)

- **Логическая равнозначность** ( **эквивалентность**) — это сложное логическое выражение, которое является истинным тогда и только тогда, когда оба простых логических выражения имеют одинаковую истинность.
- Двуместная логическая операция обычно обозначается символом ≡ или ↔.
- Аналитическая функция: $F(x_1, x_2) = x_1 \equiv x_2$




| | | |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

# Синтез логических схем

Логические выражения можно получить двумя способами:

- на основе совершенной дизъюнктивной нормальной формы (СДНФ);
- на основе совершенной конъюнктивной нормальной формы (СКНФ).

# СДНФ

- **Совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ)** Функция представляется суммой групп. Каждая группа состоит из произведения, в которую входят все переменные.

- Например: $f(x1,x2,x3)=x1 \cdot x2 \cdot x3 + x1 \cdot x2 \cdot x3 + x1 \cdot x2 \cdot x3$

# СКНФ

- **Совершенная конъюнктивная нормальная форма (СКНФ)** Функция представляется произведением групп. Каждая группа состоит из суммы, в которую входят все переменные.
- Например: f(x1,x2,x3)=(x1+x2+x3) · (x1+x2+x3) · (x1+x2+x3)

# Таблица истинности

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

# СДНФ

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| **0** | **0** | **1** | **1** |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| **0** | **1** | **1** | **1** |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| **1** | **1** | **0** | **1** |
| **1** | **1** | **1** | **1** |

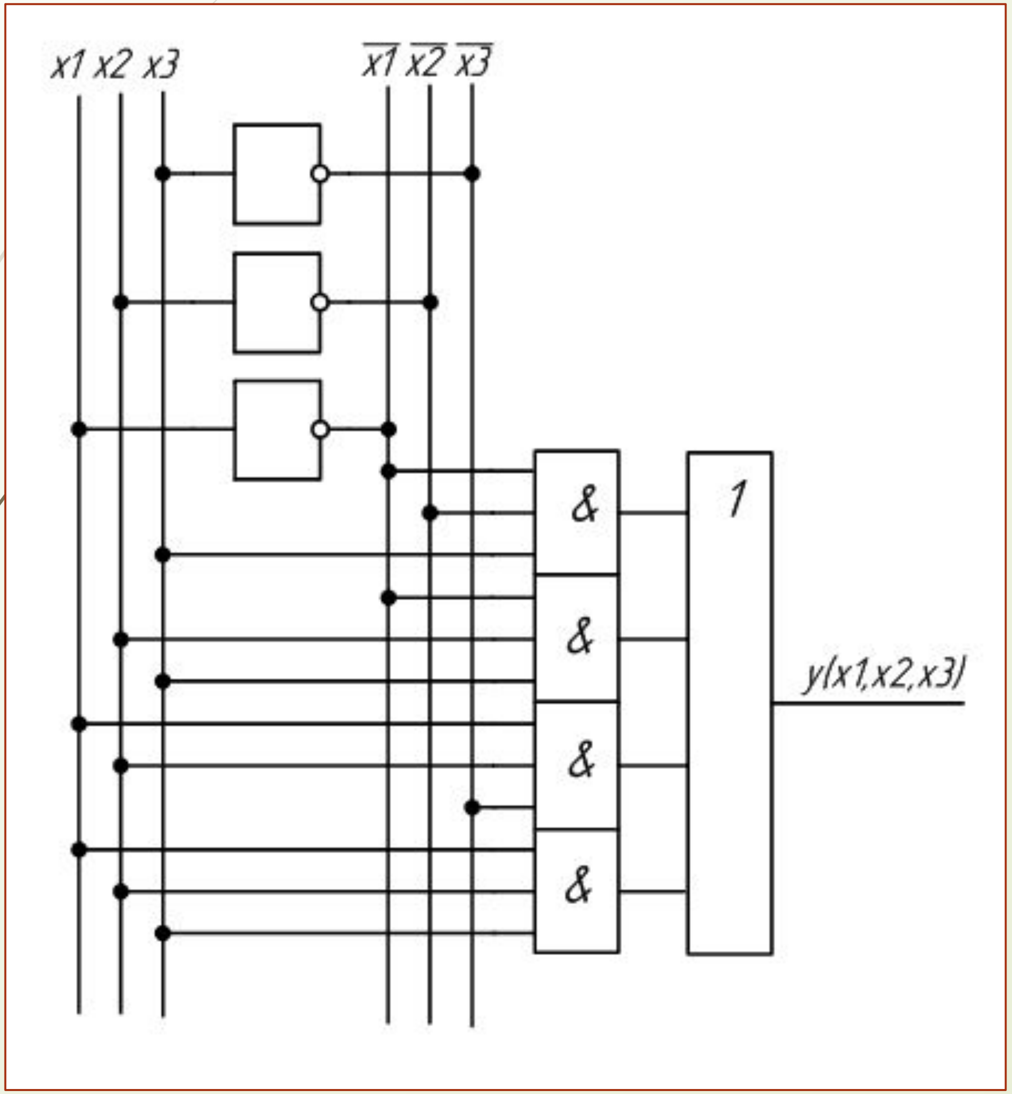
$$F(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \mathbf{x_3} + \overline{x_1} \cdot \mathbf{x_2} \cdot \mathbf{x_3} + x_1 \cdot \mathbf{x_2} \cdot \overline{x_3} + x_1 \cdot \mathbf{x_2} \cdot \mathbf{x_3}$$

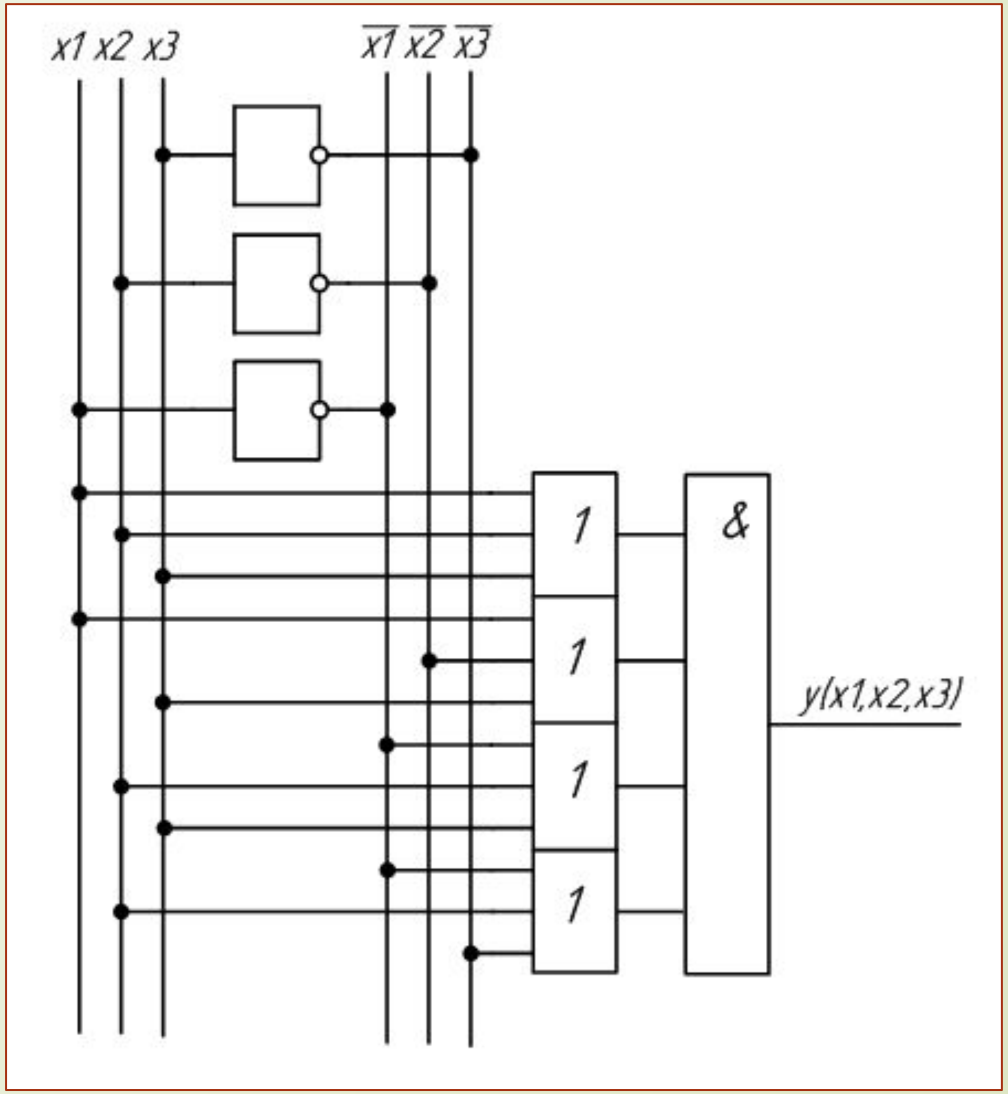
# СКНФ

| | | | |
|---|---|---|---|
| **0** | **0** | **0** | **0** |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| **0** | **1** | **0** | **0** |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| **1** | **0** | **0** | **0** |
| **1** | **0** | **1** | **0** |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

$$F(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + \mathbf{x_2} + \mathbf{x_3}) \cdot (x_1 + \overline{x_2} + \mathbf{x_3}) \cdot (\overline{x_1} + \mathbf{x_2} + \mathbf{x_3}) \cdot (\overline{x_1} + \mathbf{x_2} + \overline{x_3})$$

# СДНФ и СКНФ


x1 x2 x3
$\overline{x1}$ $\overline{x2}$ $\overline{x3}$
&
&
&
&
1
y(x1,x2,x3)


x1 x2 x3
$\overline{x1}$ $\overline{x2}$ $\overline{x3}$
1
1
1
1
&
y(x1,x2,x3)

# Минимизация СДНФ

$$F(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \mathbf{x_3} + \overline{x_1} \cdot \mathbf{x_2} \cdot \mathbf{x_3} + x_1 \cdot \mathbf{x_2} \cdot \overline{x_3} + x_1 \cdot \mathbf{x_2} \cdot \mathbf{x_3} =$$

$$= \overline{x_1} \cdot \mathbf{x_3} \cdot (\overline{x_2} + \mathbf{x_2}) + x_1 \cdot \mathbf{x_2} \cdot (\overline{x_3} + \mathbf{x_3}) =$$

$$= \overline{x_1} \cdot \mathbf{x_3} + x_1 \cdot \mathbf{x_2}$$