РАДИОАВТОМАТИКА

Лекция 4

ЧАСТОТНЫЕ КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ МИХАЙЛОВА

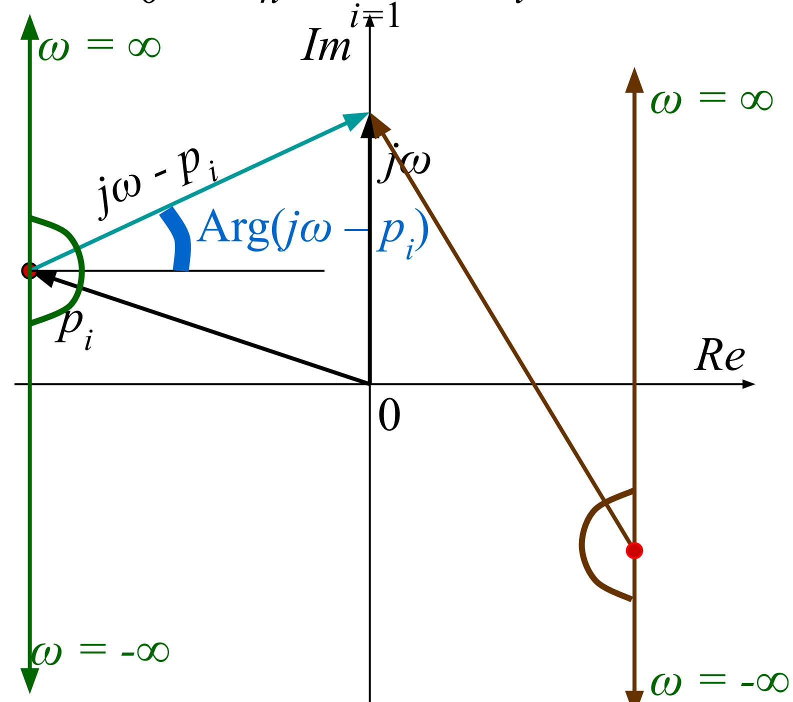
Критерий: Линейная система устойчива, если изменение аргумента частотного характеристического полинома (полинома Михайлова) при изменении частоты ω от $-\infty$ до ∞ равно $n\pi$ радиан, где n – порядок полинома.

Док – во: $G(j\omega) = a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \ldots + a_0 = a_n\prod_{i=1}^{n}(j\omega - p_i)$

$$\mathrm{Arg}G(j\omega) = \sum_{i=1}^{n}\mathrm{Arg}(j\omega - p_i)$$

$$\mathrm{Var}(\mathrm{Arg}G(j\omega)) = \sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}\ \mathrm{Arg}(j\omega - p_i)$$

Если корень p_i расположен в левой полуплоскости,то изменение аргумента полинома $j\omega - p_i$ равно π рад. Если – в правой, то $-\pi$ рад.

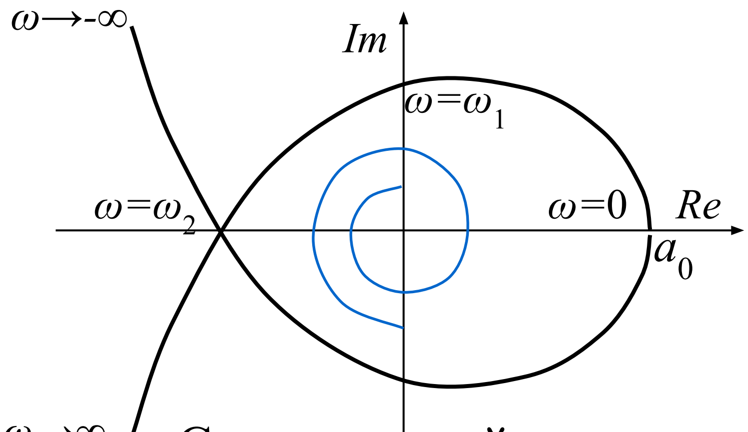


Для устойчивой системы все корни должны располагаться в левой полуплоскости .
Поэтому $\mathrm{Var}(\mathrm{Arg}G(j\omega)) = \sum_{i=1}^{n}\pi = n\pi$ рад.

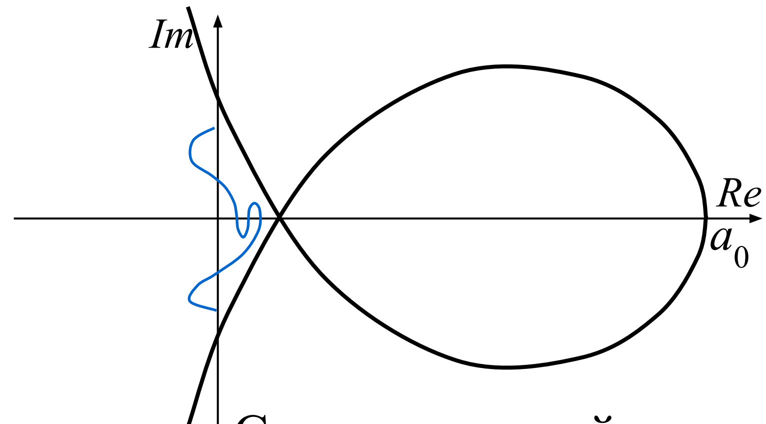
Для неустойчивой системы, m корней характеристического уравнения которой находятся в правой полуплоскости (следовательно, в левой $n - m$ корней), изменение аргумента полинома Михайлова равно $(n - m)\pi + m(-\pi) = (n - 2m)\pi$ рад.

Пример: Устойчивость линейной системы третьего порядка

$$G(j\omega) = a_3(j\omega)^3 + a_2(j\omega)^2 + a_1(j\omega) + a_0 = a_0 + ja_1\omega - a_2\omega^2 - ja_3\omega^3 =$$
$$= (a_0 - a_2\omega^2) + j\,(a_1\omega - a_3\omega^3)\ .$$



Система устойчива



Система неустойчива

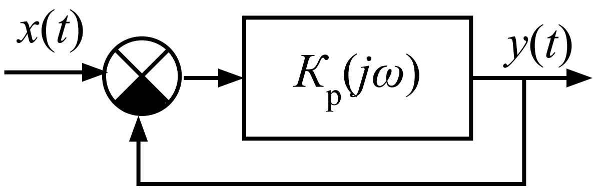
Годограф содержит две симметричные ветви для $\omega > 0$ и $\omega < 0$. Для одной ветви требуемое изменение аргумента уменьшается вдвое и равно $n\pi/2$ рад.

Можно получить требование к коэффициентам полинома из условия, что для устойчивой системы годограф по очереди пересекает действительную и мнимую оси. При $\omega = 0$ годограф пересекает действительную ось. При $\omega = \omega_1$ – мнимую: $a_0 - a_2\omega_1^{\,2} = 0$. При $\omega = \omega_2$ – опять действительную: $a_1 - a_3\omega_2^{\,2} = 0$.

Так как $\omega_2 > \omega_1$, то $\dfrac{a_1}{a_3} > \dfrac{a_0}{a_2}$. Отсюда $a_1a_2 > a_0a_3$

КРИТЕРИЙ НАЙКВИСТА

Критерий Найквиста применяется для определения устойчивости систем с обратной связью



Критерий: Замкнутая линейная система устойчива при неустойчивой разомкнутой, если изменение аргумента вектора $1 + K_р(j\omega)$ при изменении частоты от 0 до ∞ равно $m\pi$ рад., где m – количество корней характеристического уравнения разомкнутой системы, находящихся в правой полуплоскости.

Док-во:

Комплексная частотная характеристика разомкнутой системы записывается как отношение полиномов $K_р(j\omega) = \dfrac{N(j\omega)}{P(j\omega)}$. Тогда $1+K_р(j\omega) = 1+ \dfrac{N(j\omega)}{P(j\omega)} = \dfrac{P(j\omega)+N(j\omega)}{P(j\omega)}$.

Находим $\mathrm{VarArg}\{1 + K_р(j\omega)\} = \mathrm{VarArg}\, \dfrac{P(j\omega)+N(j\omega)}{P(j\omega)} = \mathrm{VarArg}\{P(j\omega) + N(j\omega)\}$ –
– $\mathrm{VarArg}\, P(j\omega)$.

$P(j\omega)$ – полином Михайлова разомкнутой системы, а $P(j\omega) + N(j\omega)$?

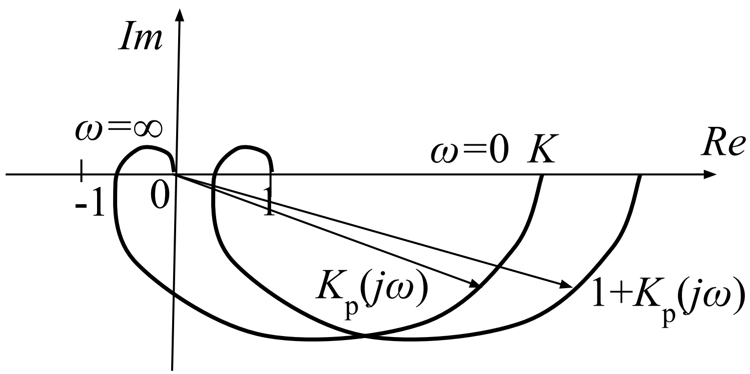
Запишем $$K_з(j\omega) = \frac{K_р(j\omega)}{1 + K_р(j\omega)} = \frac{N(j\omega)/\ P(j\omega)}{1 + N(j\omega)/\ P(j\omega)} = \frac{N(j\omega)}{P(j\omega) + N(j\omega)}\ .$$

$P(j\omega) + N(j\omega)$ – полином Михайлова замкнутой системы.

Степени полиномов Михайлова одинаковы и равны n. Так как замкнутая система должна быть устойчивой, то $\mathrm{VarArg}\{P(j\omega) + N(j\omega)\} = n\pi/2$ согласно критерию Михайлова. Разомкнутая система неустойчива, поэтому $\mathrm{VarArg}\, P(j\omega) = (n - 2m)\pi/2$

Следовательно VarArg$\{1 + K_р(j\omega)\} = n\pi/2 - (n - 2m)\pi/2 = m\pi$ рад.

Рассмотрим частный случай, когда разомкнутая система устойчива. Тогда VarArg$\{1 + K_р(j\omega)\} = 0$

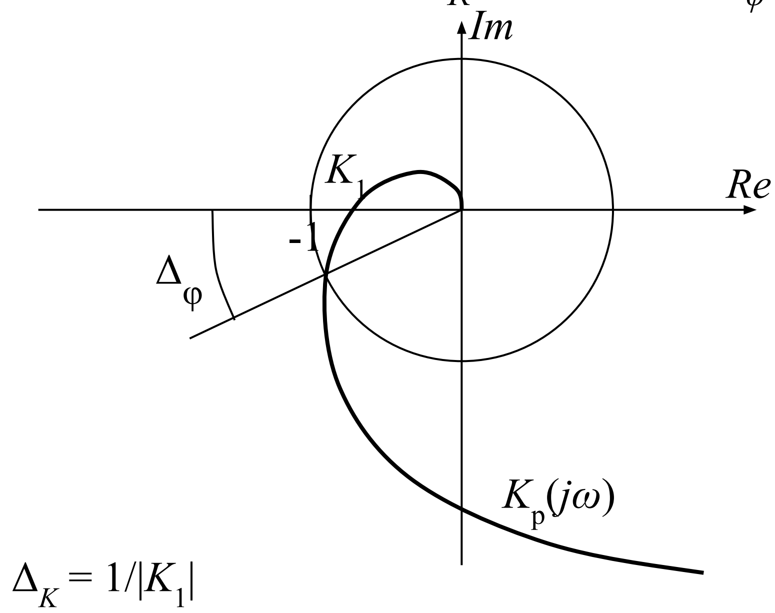


Замкнутая линейная система устойчива при устойчивой разомкнутой, если годограф частотной характеристики разомкнутой системы не охватывает точки (-1, 0).

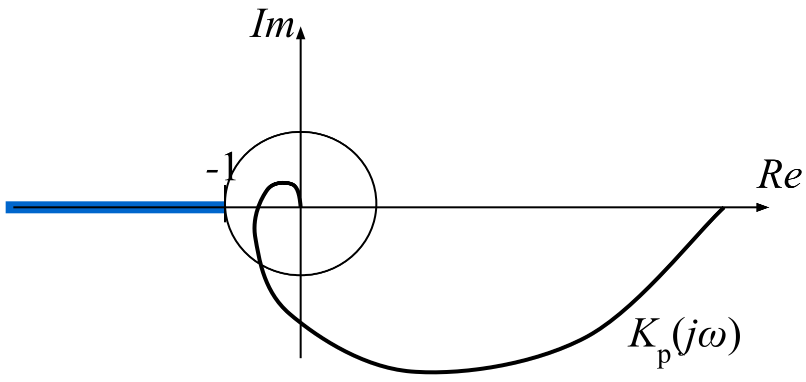
По частотной характеристике разомкнутой системы можно оценить и степень устойчивости. Используются запасы устойчивости: по усилению Δ_K и по фазе Δ_φ.

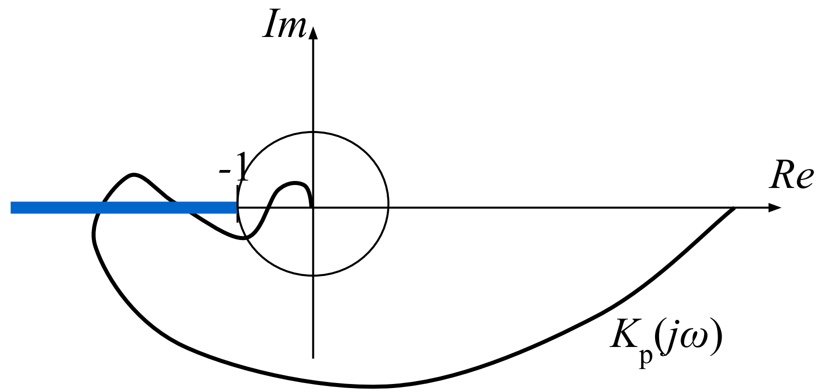
Запас устойчивости по усилению показывает, во сколько раз нужно изменить коэффициент передачи разомкнутой системы, чтобы замкнутая из устойчивой стала неустойчивой.

Запас устойчивости по фазе показывает, какой фазовый сдвиг надо ввести в разомкнутую систему, чтобы замкнутая из устойчивой стала неустойчивой.



Сформулируем критерий Найквиста для АЧХ и ФЧХ разомкнутой системы, основываясь на пересечении годографом $K_р(j\omega)$ участка действительной оси на интервале от -∞ до -1.





Критерий: Замкнутая линейная система устойчива при устойчивой разомкнутой, если в области частот, где АЧХ разомкнутой системы больше 1, ФЧХ разомкнутой системы или не пересекает значения $-\pi$, или пересекает его сверху вниз и снизу вверх одинаковое количество раз.