

Конечные автоматы

Абстрактные автоматы.

Структурные автоматы.

Синтез конечных автоматов.

Синтез МПА.

Определение

Абстрактным автоматом называют модель, описываемую пятиместным кортежем:

$$A = (X, Y, S, f_y, f_s),$$

где первые три компонента – непустые множества:

X – множество входных сигналов AA ,

Y – множество выходных сигналов AA ,

S – множество состояний AA .

Два последних компонента кортежа – характеристические функции:

f_y – функция выходов;

f_s – функция переходов AA из одного состояния в другое.

Если множества X, Y, S – конечные, то такой AA называют **конечным автоматом (КА)**.

Классификация

I. По определенности характеристических функций.

В автоматах *полностью определенных* областью определения функций f_s и f_u является множество всех пар $(s_i, x_k) \in S \times X$, где $s_i \in S$, $x_k \in X$. В автоматах *частично определенных* либо обе характеристические функции определены не для всех пар (s_i, x_k) .

II. По однозначности функции переходов.

В *детерминированных* автоматах выполняется условие однозначности переходов: если АА находится в некотором состоянии $s_i \in S$, то под воздействием произвольного входного сигнала $x_k \in X$ автомат может перейти в одно и только одно состояние $s_j \in S$, причем ситуация $s_i = s_j$ вовсе не исключается. В автоматах *вероятностных* при воздействии одного и того же входного сигнала возможны переходы из состояния s_i в различные состояния из множества S с заданной вероятностью.

III. По устойчивости состояний:

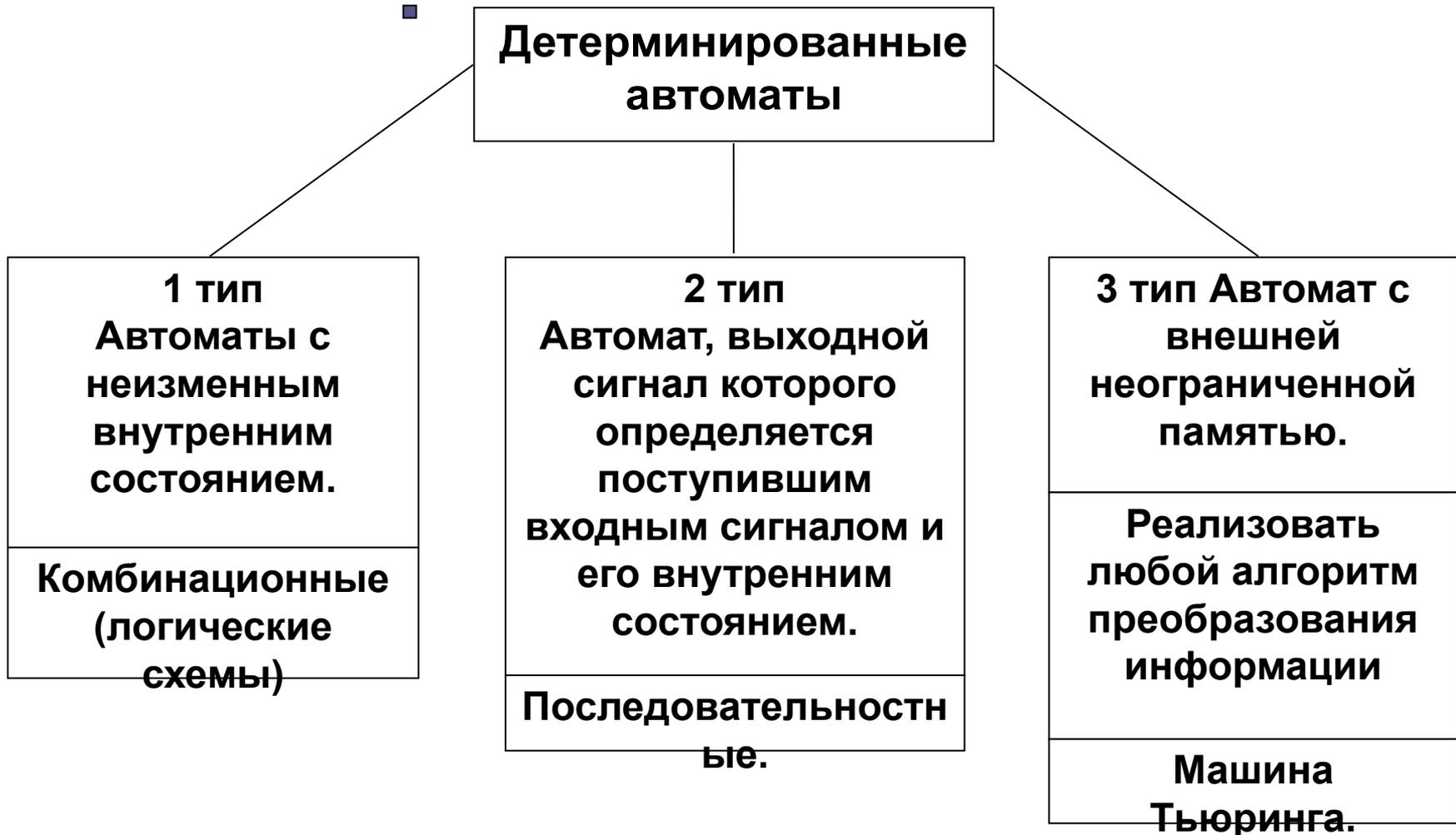
В *устойчивых* автоматах выполняется условие устойчивости: если автомат под воздействием входного сигнала $x_k \in X$ оказался в состоянии $s_i \in S$, то выход из него и переход в иное состояние возможен только при поступлении на вход автомата другого сигнала $x_z \in X$, $x_z \neq x_k$. Если условие устойчивости не выполняется хотя бы для одного состояния $s_j \in S$, то такой автомат называют *неустойчивым*.

Дальнейшее изложение будем вести, исходя из практических соображений, применительно к **полностью определенным, детерминированным и устойчивым конечным автоматам.**

Классификация

- Автоматы → удобный язык для описывания законов взаимодействия сложных систем → метаязык кибернетики (фон Нейман)
- Можно выделить два основных аспекта «работы» автомата:
- а) автоматы распознают входные слова, т. е. отвечают на вопрос, принадлежит ли поданное на вход слово данному множеству (это автоматы-распознаватели);
- б) автоматы преобразуют входные слова в выходные, т.е. реализуют автоматные отображения (это автоматы-преобразователи).

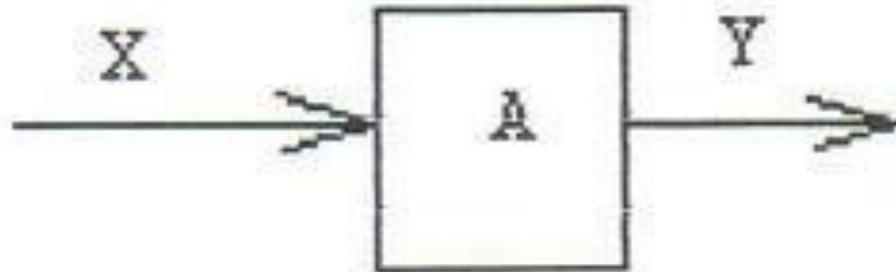
Классификация



Теория автоматов

Абстрактный автомат

- **Абстрактный автомат** – позволяет абстрагироваться от конкретной схемы, можно рассматривать как «**черный ящик**»

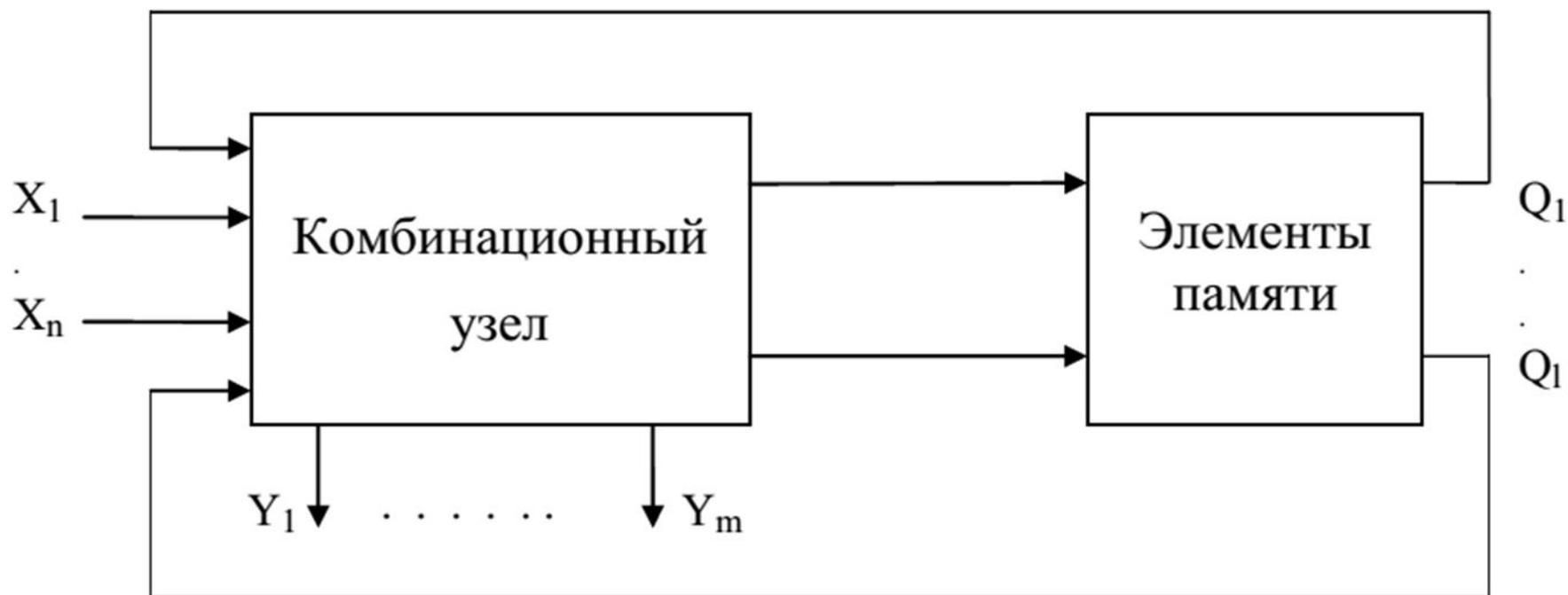


- Для построения УАЖЛ, используется теория абстрактных конечных автоматов (КА). Для построения используется две базовые модели КА, функционально аналогичные: автомат Мура и автомат Мили.
- Любой ЦА описывается следующим кортежем: $M = \{X, Y, A \setminus S, \delta, \lambda, s_0\}$, где X, Y, S – соответственно множества входных, выходных значений ЦА и внутренних

Теория автоматов

Абстрактный автомат

- *Абстрактный автомат – обобщенная схема.*



Теория автоматов

Автомат Мили.

В автомате Мили функция выходов λ определяет значение выходного символа по классической схеме абстрактного автомата. Математическая модель автомата Мили и схема рекуррентных соотношений не отличаются от математической модели и схемы рекуррентных соотношений абстрактного автомата.

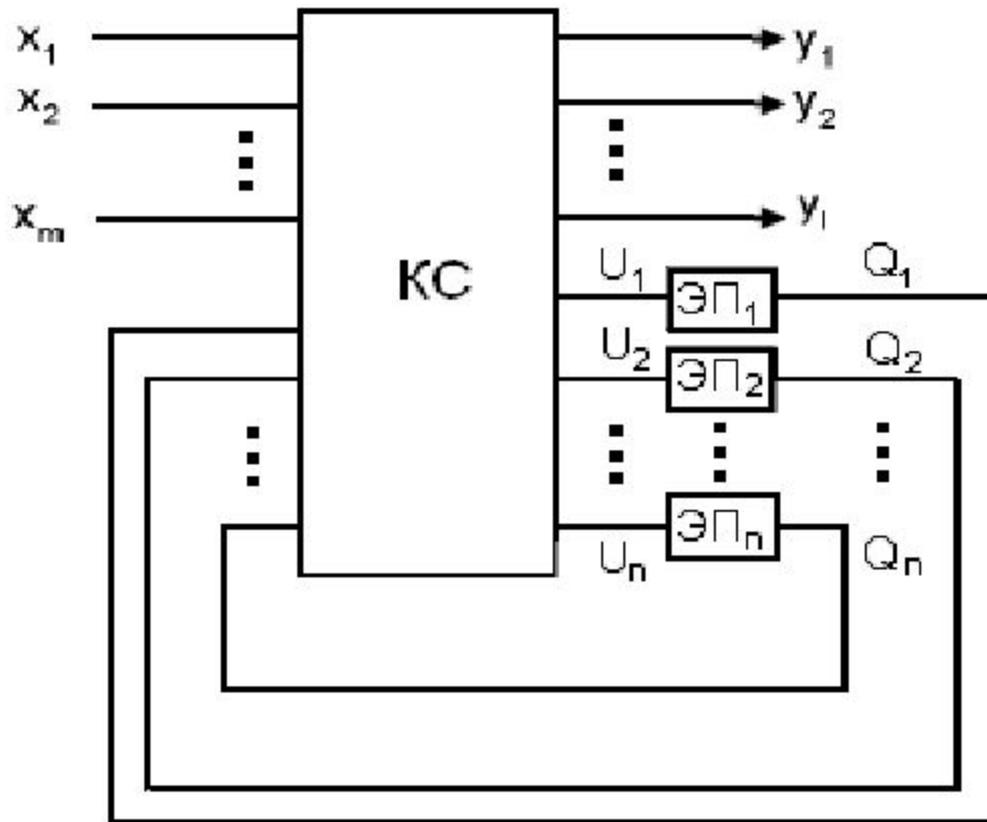
Законы функционирования: $a(t+1) = \delta[a(t), x(t)]$
 $y(t) = \lambda[a(t), x(t)]$

Отображения δ и λ получили названия, соответственно, **функции перехода** и **функции выхода** автомата.

Особенностью автомата Мили является то, что функция выходов является двухаргументной и символ в выходном канале $y(t)$ обнаруживается только при наличии символа во входном канале $x(t)$. Функциональная схема не отличается от схемы абстрактного автомата.

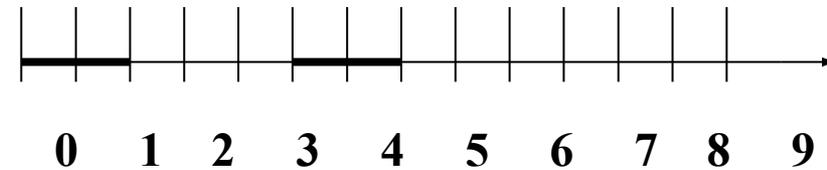
Теория автоматов

Автомат Мили.



$(t), x(t)$

$$y(t) = \lambda [a(t), x(t)]$$



Теория автоматов

Автомат Мура.

Зависимость выходного сигнала *только от состояния автомата* представлена в автоматах Мура. В автомате Мура функция выходов определяет значение выходного символа только по одному аргументу — состоянию автомата. Эту функцию называют также функцией меток, так как она каждому состоянию автомата ставит метку на выходе.

Законы функционирования: $a(t+1) = \delta[a(t), x(t)]$
 $y(t) = \lambda[a(t)]$

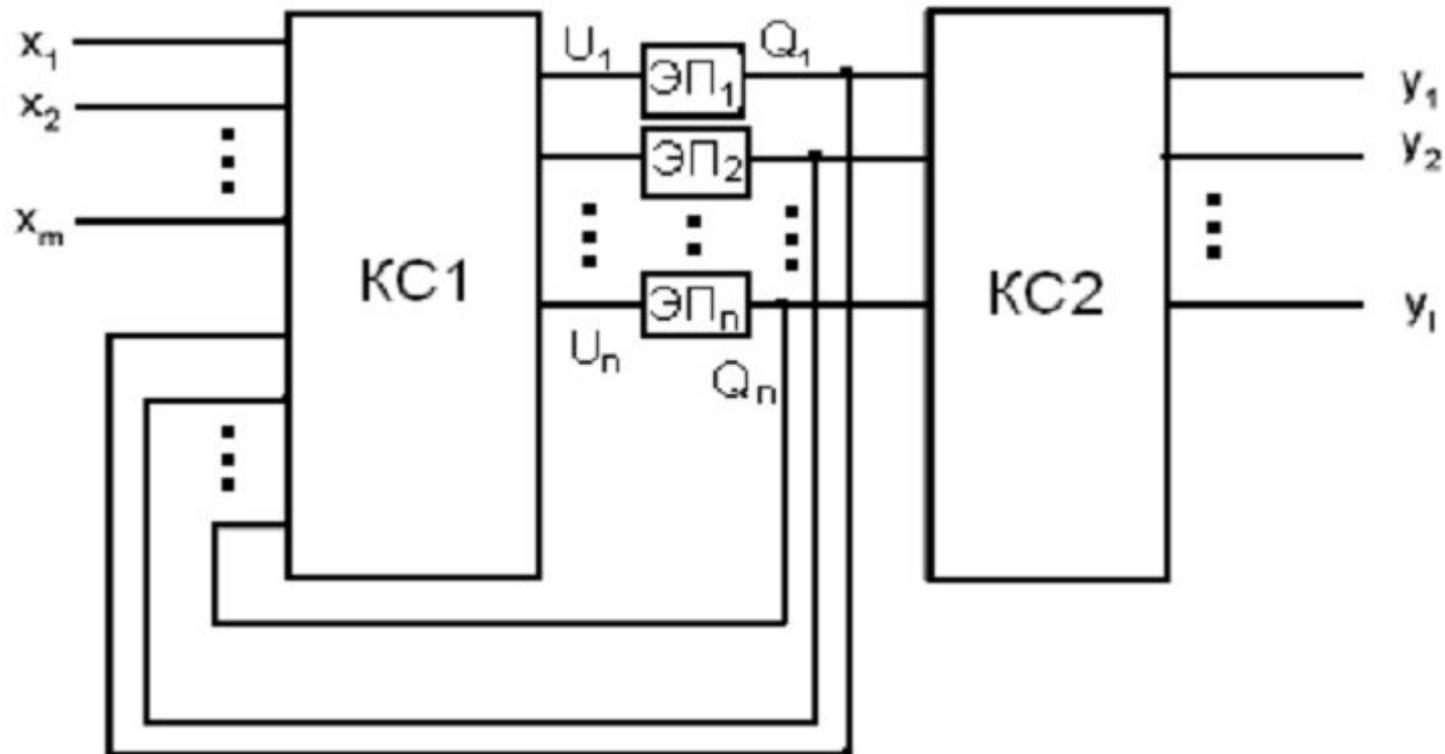
Пример автомата Мура:

Очевидно, что автомат Мура можно рассматривать как частный случай автомата Мили.

Теория автоматов

Автомат Мура.

$$a(t+1) = \delta[a(t), x(t)]$$
$$y(t) = \lambda[a(t)]$$



Автомат Мили

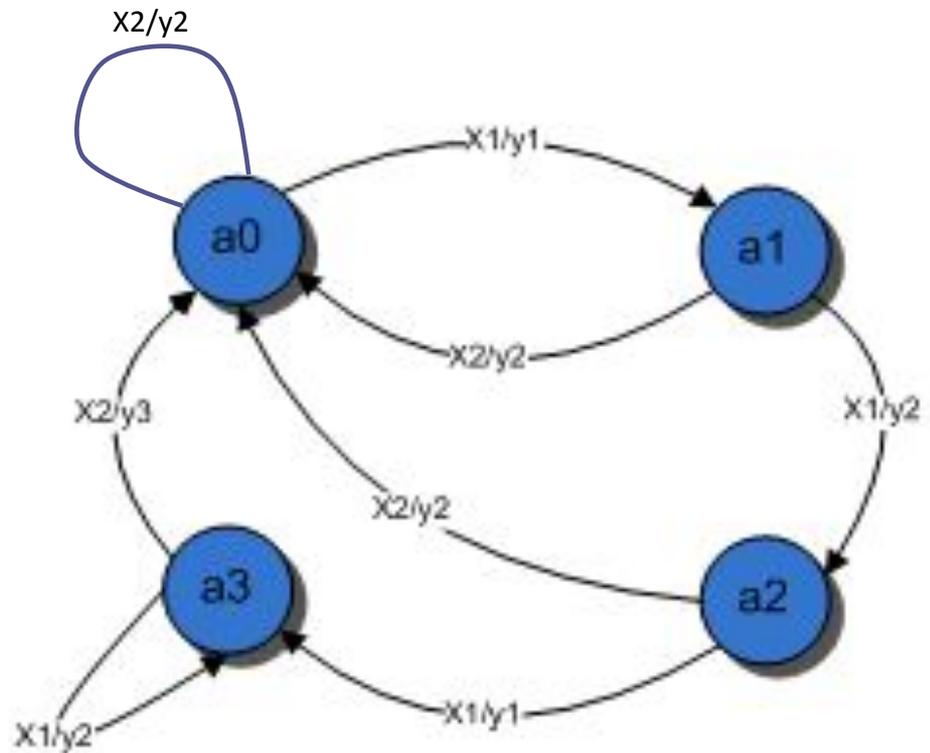
Граф автомата, заданного приведенными таблицами, переходов и выходов будет иметь вид:

δ

ВХ	a_0	a_1	a_2	a_3
x_1	a_1	a_2	a_3	a_3
x_2	a_0	a_0	a_0	a_0

λ

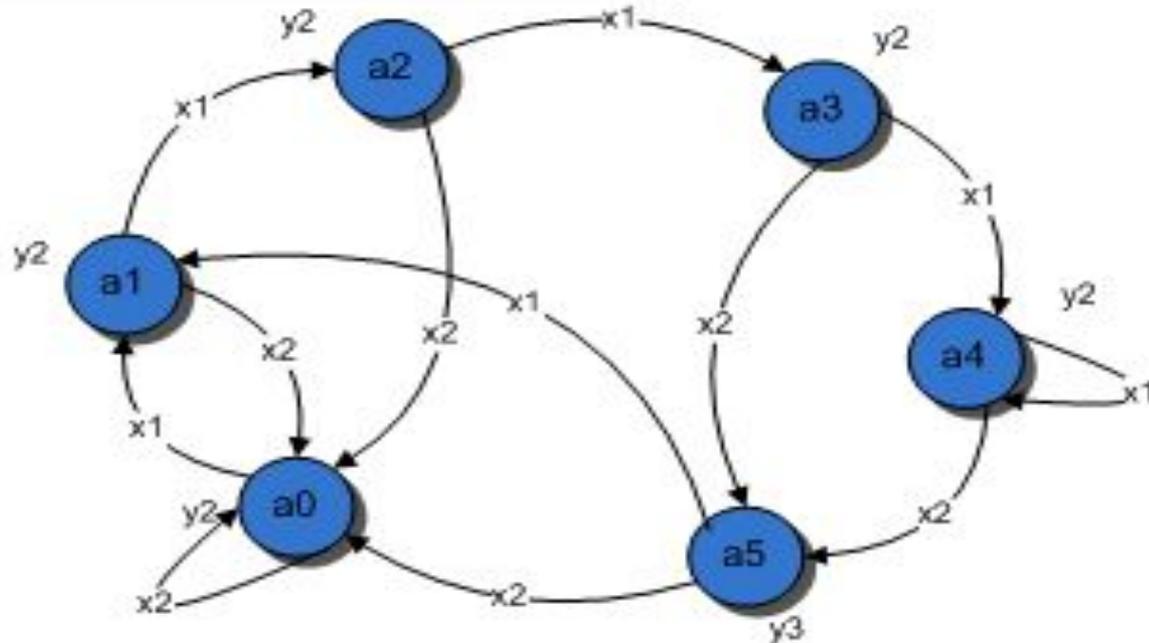
ВХ	a_0	a_1	a_2	a_3
x_1	y_2	y_2	y_1	y_2
x_2	y_2	y_2	y_2	y_3



Теория автоматов

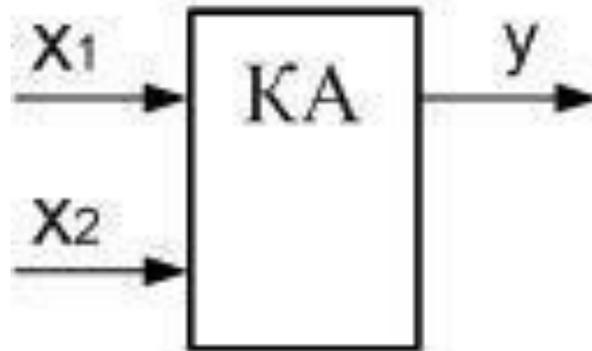
Автомат Мура

	y_2	y_2	y_2	y_2	y_2	y_3
	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
$X1$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_4	a_1
$X2$	a_0	a_0	a_0	a_5	a_5	a_0



Пример

«Автомат имеет два входа x_1 , x_2 и один выход y . В начальный момент времени $y = 0$. На вход подаются сигналы: $(x_1, x_2) = (0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$ и $(1,1)$. В случае входной комбинации $(1,0)$ на выходе формируется значение 1; если $(x_1, x_2) = (0,1)$, то выдается $y = 2$. В остальных случаях $y = 0$ ».



Зададим множества, входящие в описание модели.

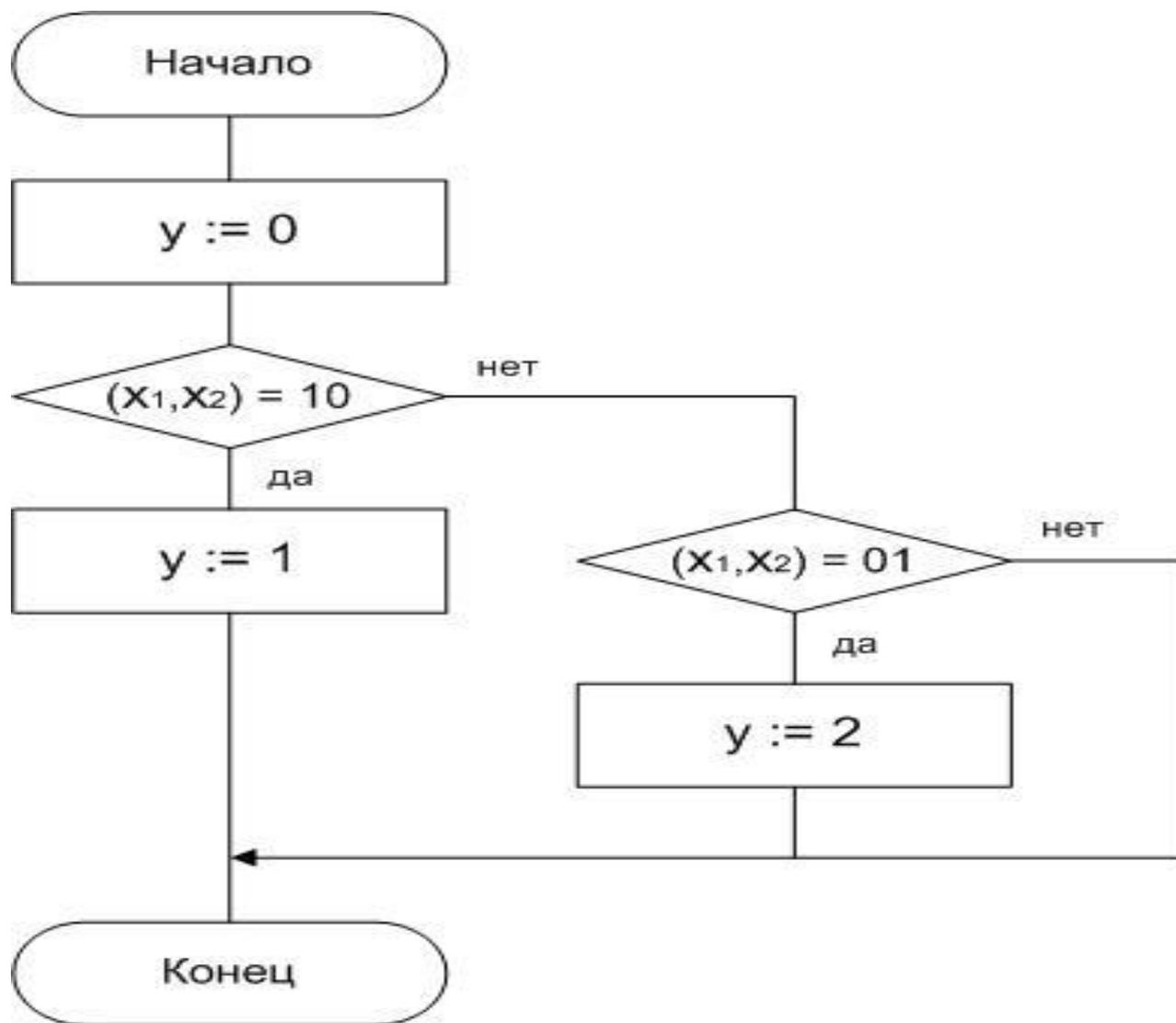
$X = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$, где первый элемент каждой пары соответствует x_1 , второй элемент – x_2 . Для краткости запишем: $X = \{00, 01, 10, 11\}$.

$Y = \{0, 1, 2\}$.

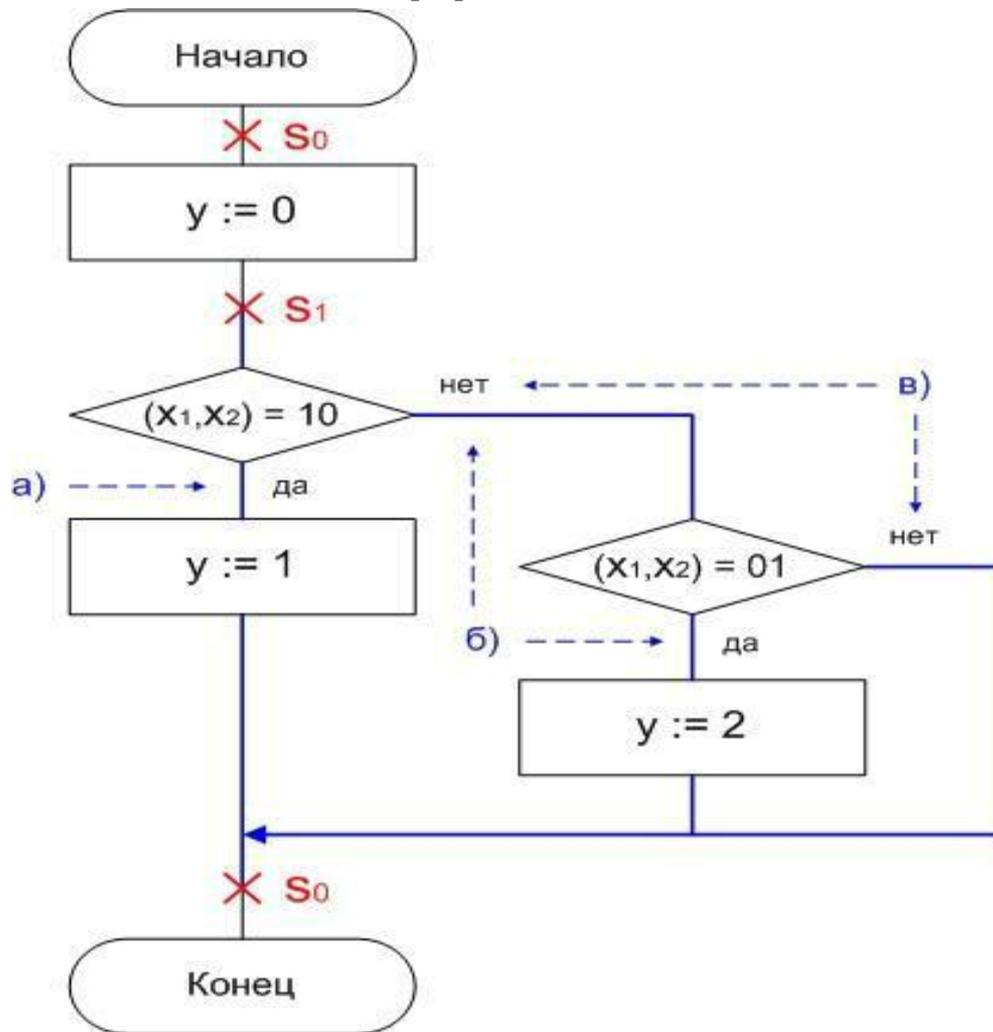
Множество состояний S видно наглядно, если алгоритм представить в виде *граф-схемы алгоритма*. Если каждый шаг алгоритма принять за *микрокоманду*, то схема алгоритма является наглядным изображением *микропрограммы*

автомата как последовательности микрокоманд. Схема алгоритма заданного автомата представлена на рис.

Граф-схема алгоритма

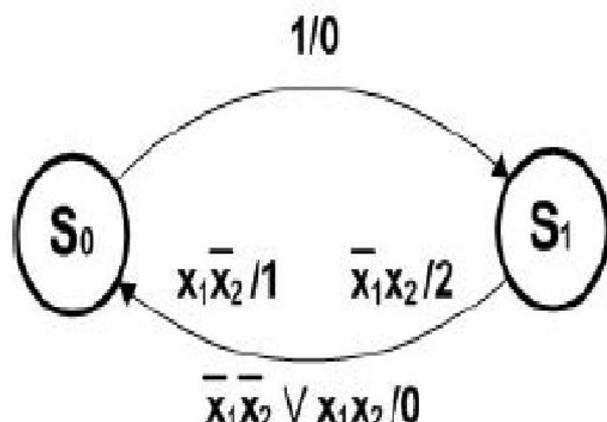


Разметка схемы алгоритма для модели Мили



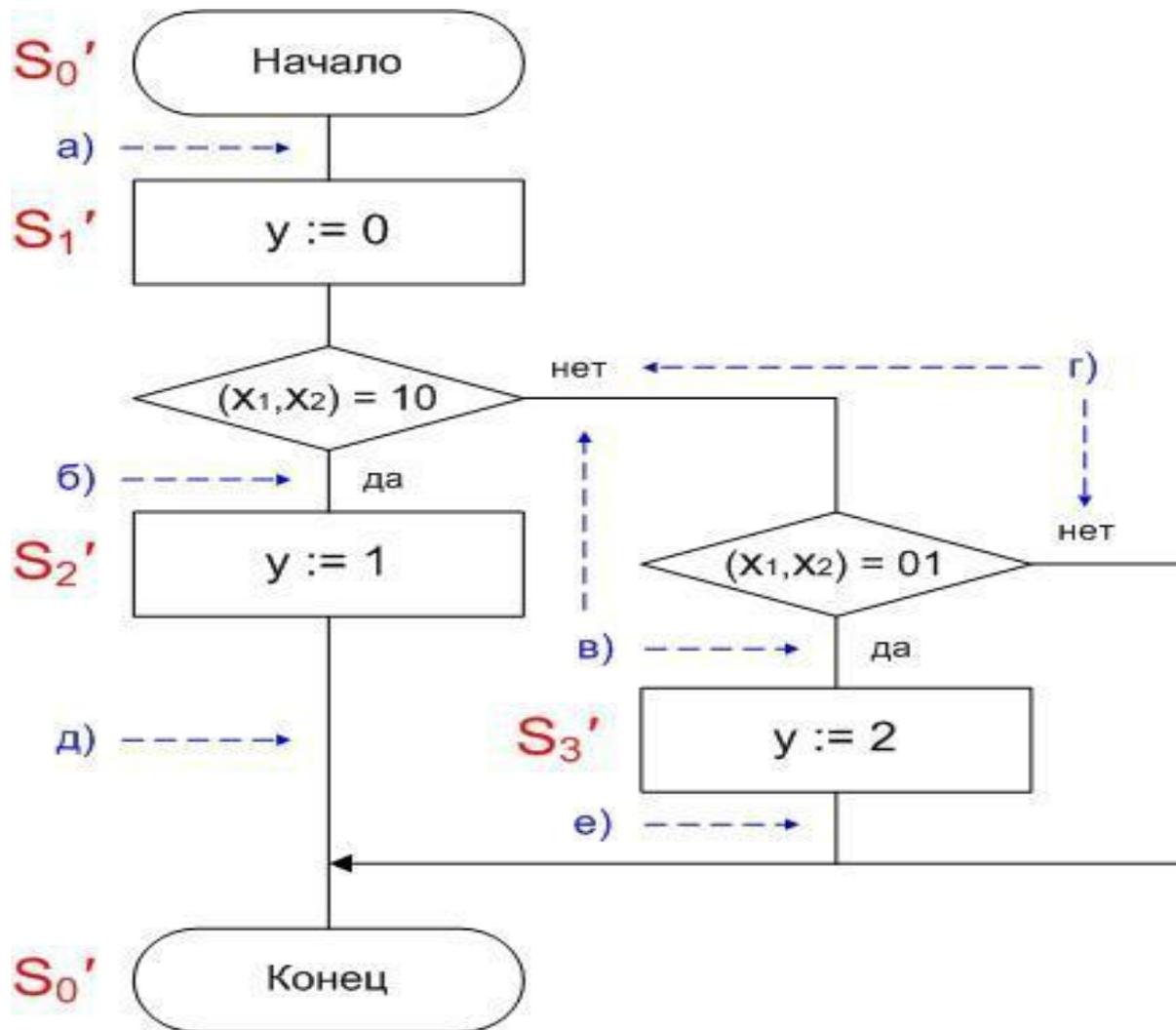
Результат абстрактного синтеза автомата Мили:

- а) $x_1\bar{x}_2$ – истинно первое условие $(x_1, x_2) = 10$, выдается выходной сигнал $y = 1$;
- б) $\overline{x_1\bar{x}_2} \wedge \bar{x}_1x_2 = (\bar{x}_1 \vee x_2) \wedge \bar{x}_1x_2 = \bar{x}_1x_2$ – ложно первое условие, истинно второе условие $(x_1, x_2) = 01$, $y = 2$;
- в) $\overline{x_1\bar{x}_2} \wedge \overline{\bar{x}_1x_2} = (\bar{x}_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2) = \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_1x_2$ – ложны оба условия, на данной ветви алгоритма операторные блоки отсутствуют, на выходе автомата сохраняется прежний сигнал $y = 0$.



		y(t)				s(t+1)			
		$\bar{x}_1\bar{x}_2$	\bar{x}_1x_2	$x_1\bar{x}_2$	x_1x_2	$\bar{x}_1\bar{x}_2$	\bar{x}_1x_2	$x_1\bar{x}_2$	x_1x_2
s(t)	x(t)								
s0		0	0	0	0	s1	s1	s1	s1

Разметка схемы алгоритма для случая КА Мура



Условия переходов КА Мура

а) $s_0 \rightarrow s_1$ – безусловно;

б) $s_1' \rightarrow s_2'$ – $X_1\bar{X}_2$;

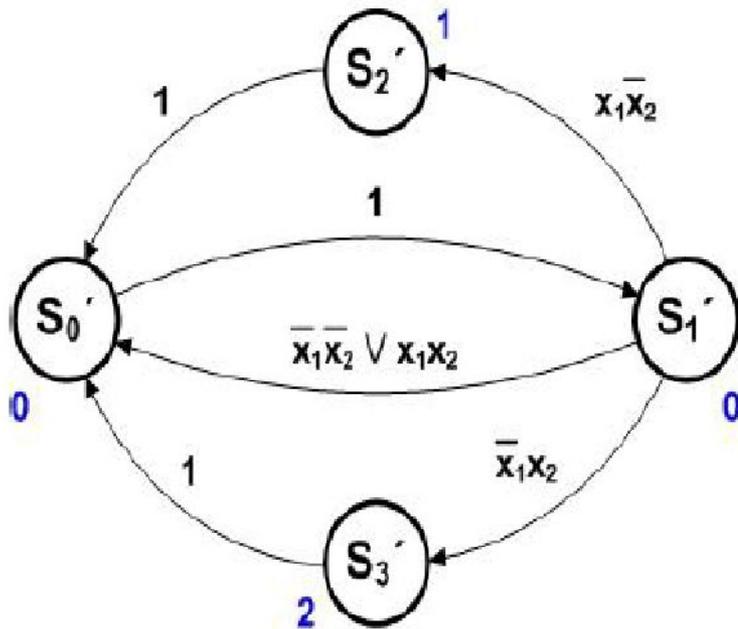
в) $s_1' \rightarrow s_3'$ – $\overline{X_1\bar{X}_2} \wedge \bar{X}_1X_2 = \bar{X}_1X_2$;

г) $s_1' \rightarrow s_0'$ – $\overline{X_1\bar{X}_2} \wedge \overline{\bar{X}_1X_2} = \bar{X}_1\bar{X}_2 \vee X_1X_2$;

д) $s_2' \rightarrow s_0'$ – безусловно;

е) $s_3' \rightarrow s_0'$ – безусловно.

Результат абстрактного синтеза автомата Мура



a

$y(t)$	0	0	1	2
$s'(t)$	s_0'	s_1'	s_2'	s_3'
$x(t)$				
$\bar{x}_1\bar{x}_2$	s_1'	s_0'	s_0'	s_0'
\bar{x}_1x_2	s_1'	s_3'	s_0'	s_0'
$x_1\bar{x}_2$	s_1'	s_2'	s_0'	s_0'
x_1x_2	s_1'	s_0'	s_0'	s_0'

$s'(t+1)$

b

Абстрактный синтез автоматов

Задача структурного синтеза состоит в построении схемы автомата минимальной сложности. На первом этапе необходимо получить минимальную структуру абстрактного автомата.

Минимизация

Будем рассматривать в качестве

примера следующий автомат:

Входные сигналы: 0, 1.

Таблица переходов:

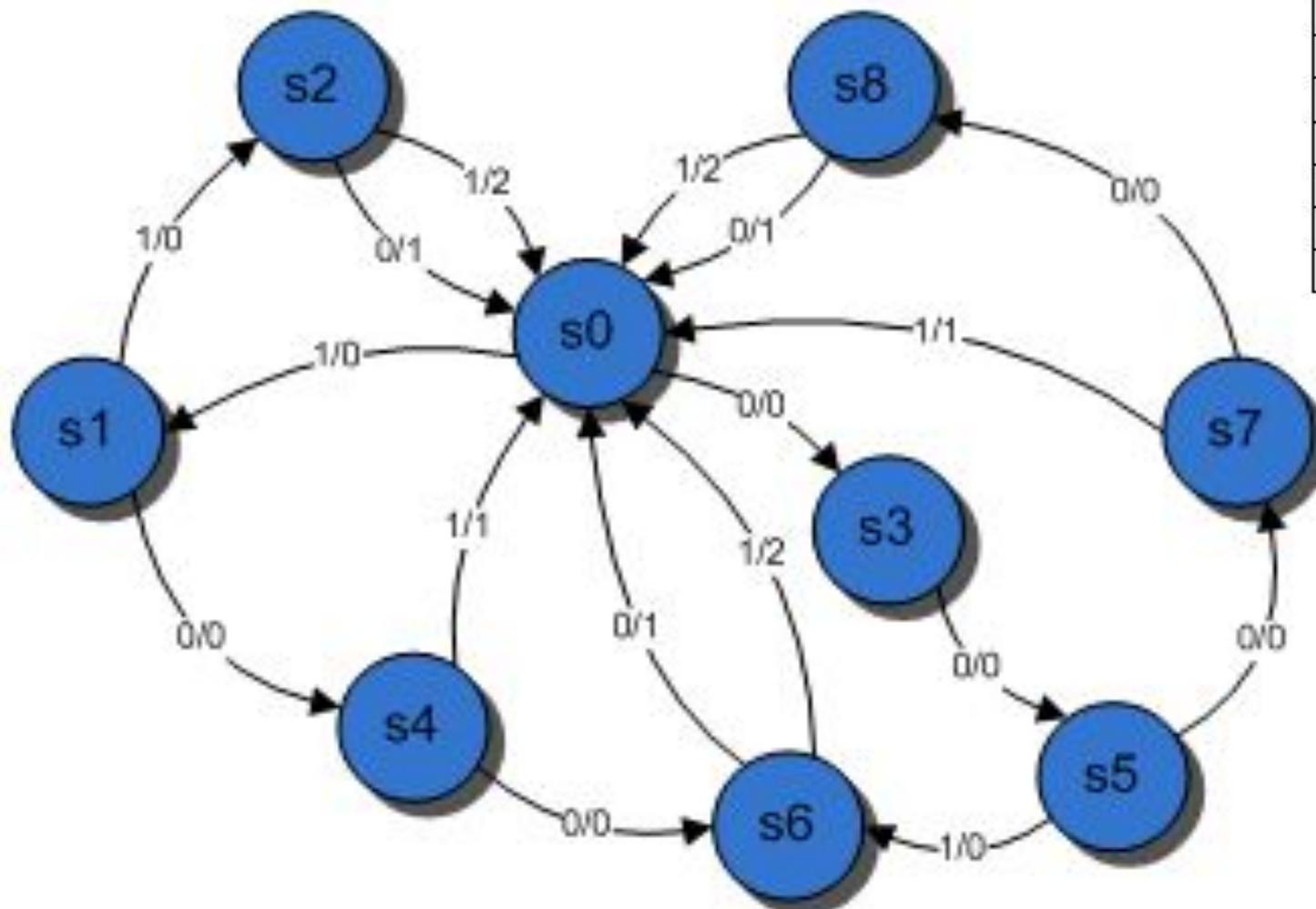
Выходные сигналы: 0, 1, 2.

S_0 – начальное состояние.:

Сост.	0	1
a_0	0/ a_3	0/ a_1
a_1	0/ a_4	0/ a_2
a_2	1/ a_0	2/ a_2
a_3	0/ a_5	0/ a_4
a_4	0/ a_6	1/ a_0
a_5	0/ a_7	0/ a_6
a_6	1/ a_0	2/ a_0
a_7	0/ a_8	1/ a_0
a_8	1/ a_0	2/ a_0

Теория автоматов

Абстрактный синтез автомата



<i>Сост.</i>	<i>0</i>	<i>1</i>
a ₀	0/ a ₃	0/ a ₁
a ₁	0/ a ₄	0/ a ₂
a₂	1/ a₀	2/ a₂
a ₃	0/ a ₅	0/ a ₄
a ₄	0/ a ₆	1/ a ₀
a ₅	0/ a ₇	0/ a ₆
a₆	1/ a₀	2/ a₀
a ₇	0/ a ₀	1/ a ₀
a₈	1/ a₀	2/ a₀

Абстрактный синтез автоматов

Для упрощения автомата в первую очередь необходимо выделить эквивалентные состояния.

Условия эквивалентности Колдуэлла:

1. Необходимое условие: внутренние состояния a_i и a_j называются **эквивалентными**, если при подаче произвольной входной последовательности с начальными состояниями a_i и a_j образуются одинаковые выходные последовательности.

2. Достаточное условие: если две одинаковые строки выходят в следующее состояние, то эти состояния **эквивалентны**.

Условия эквивалентности Колдуэлла состоит из 2 условий:

- **Условие совпадения выходов (необходимое)**
- **Условие совпадения следующих состояний (достаточное)**

Для нашего примера:

$$G_1 = \{(a_0, a_1, a_3, a_5), (a_2, a_6, a_8), (a_4, a_7)\}$$

Абстрактный синтез автоматов

Далее необходимо рассмотреть все возможные пары состояний для каждого из классов и отбросить те из них, которые переводятся по какому-либо символу входного алфавита за пределы этого класса. Эту процедуру нужно повторять до тех пор, пока следующее множество классов эквивалентности не совпадёт с предыдущим. В нашем примере окончательным будет уже второе разбиение:

$$G_2 = \{(a_0), (a_1, a_5), (a_3), (a_2, a_6, a_5), (a_4, a_7)\}$$

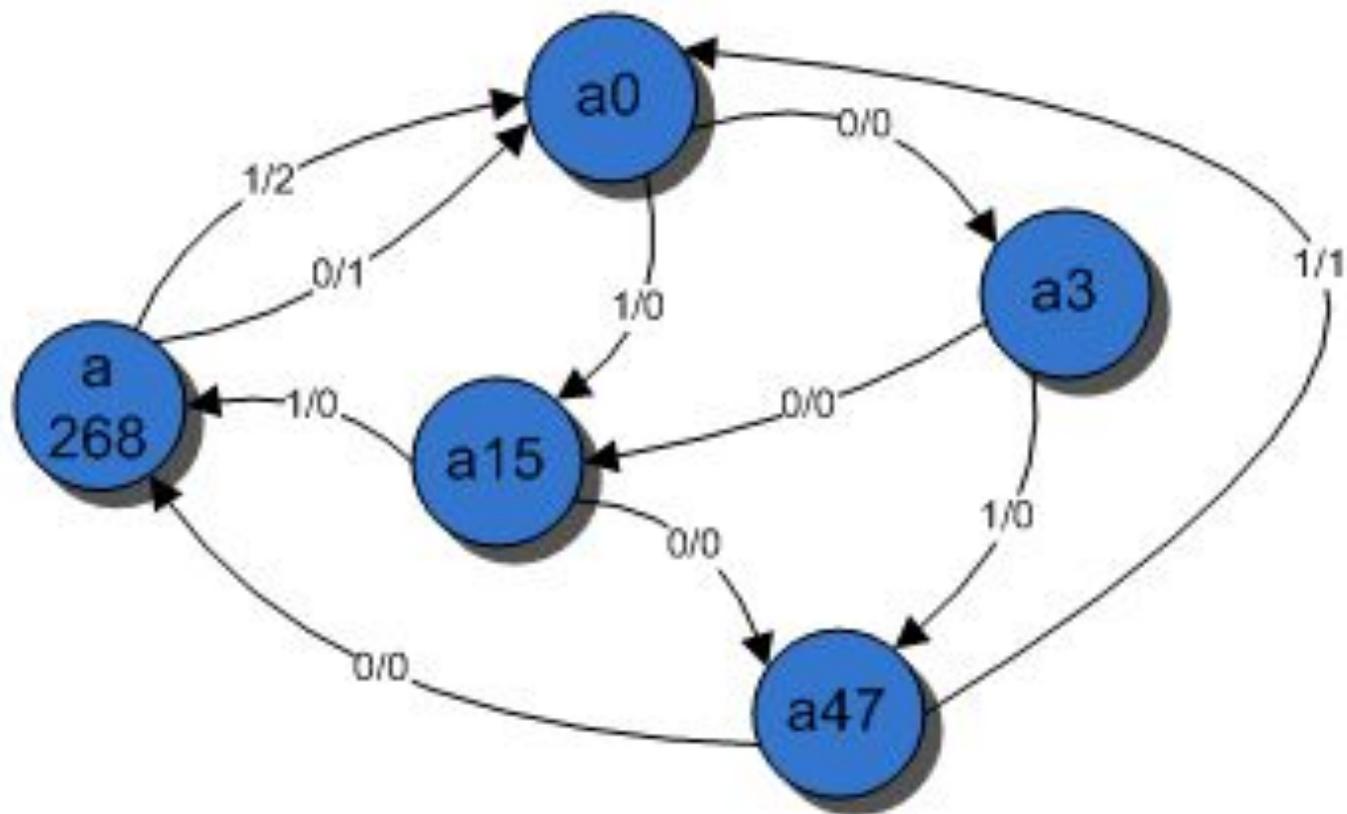
Новая таблица переходов:

	<i>0</i>	<i>1</i>
a_0	0/a3	0/a15
a_{15}	0/a47	0/a268
a_3	0/a15	0/a47
a_{268}	1/a0	2/a0
a_{47}	0/a268	1/a0

Теория автоматов

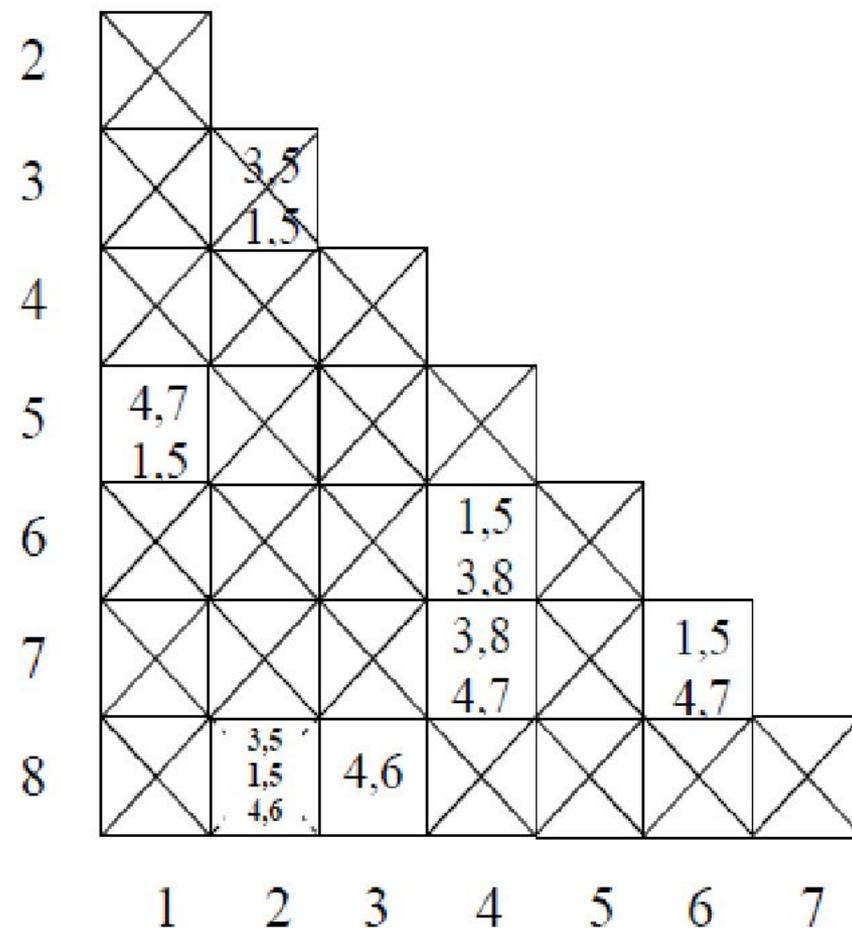
Абстрактный синтез автоматов

Граф минимизированного автомата:



Метод треугольной матрицы

$P_k \backslash S_i$	a	b	c
1	4 / 1	2 / 2	5 / 1
2	5 / 2	1 / 1	4 / 2
3	3 / 2	5 / 1	4 / 2
4	5 / 1	8 / 2	4 / 2
5	7 / 1	2 / 2	1 / 1
6	1 / 1	3 / 2	4 / 2
7	5 / 1	3 / 2	7 / 2
8	3 / 2	5 / 1	6 / 2



Результат

$S_i \backslash P_k$	a	b	c
1'	4'/1	2'/2	1'/1
2'	1'/2	1'/1	4'/2
3'	3'/2	1'/1	4'/2
4'	1'/1	3'/2	4'/2
1'	4'/1	2'/2	1'/1
4'	1'/1	3'/2	4'/2
4'	1'/1	3'/2	4'/2
3'	3'/2	1'/1	4'/2

Таблица 2.9

$S_i \backslash P_k$	a	b	c
1'	4'/1	2'/2	1'/1
2'	1'/2	1'/1	4'/2
3'	3'/2	1'/1	4'/2
4'	1'/1	3'/2	4'/2

Автомат Мура \square Автомат Мили

Автомат Мура и соответствующий ему автомат Мили:

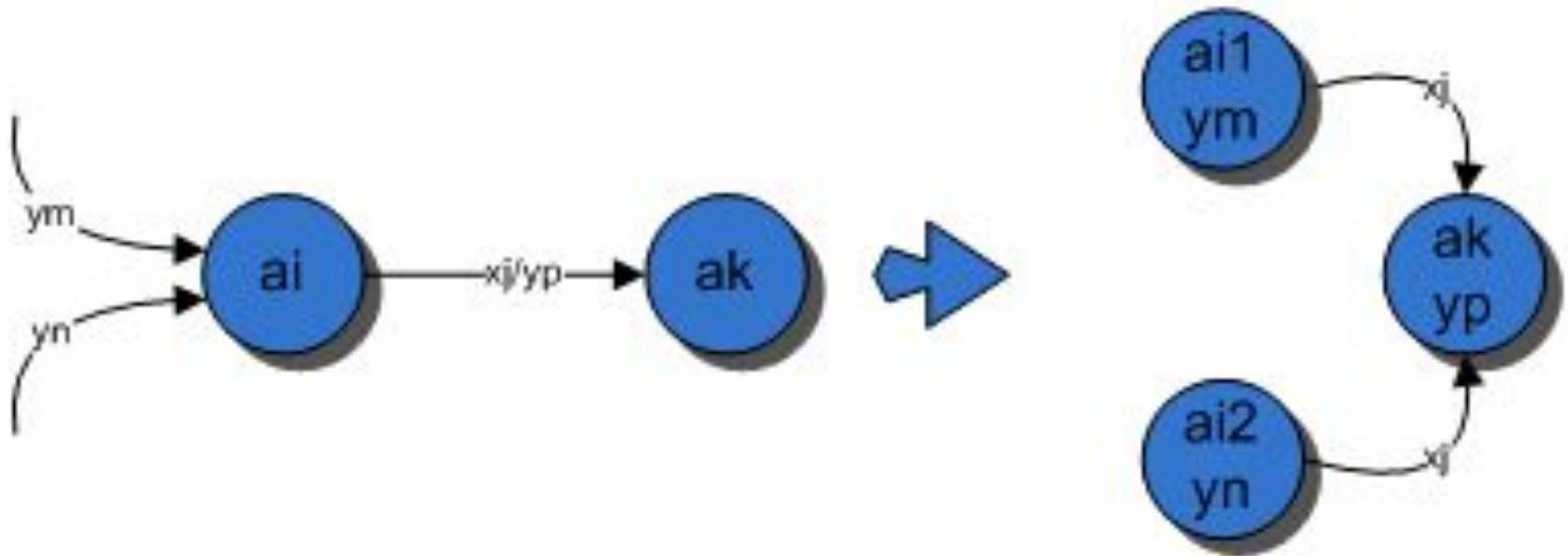


Переход от автомата Мили к автомату Мура:

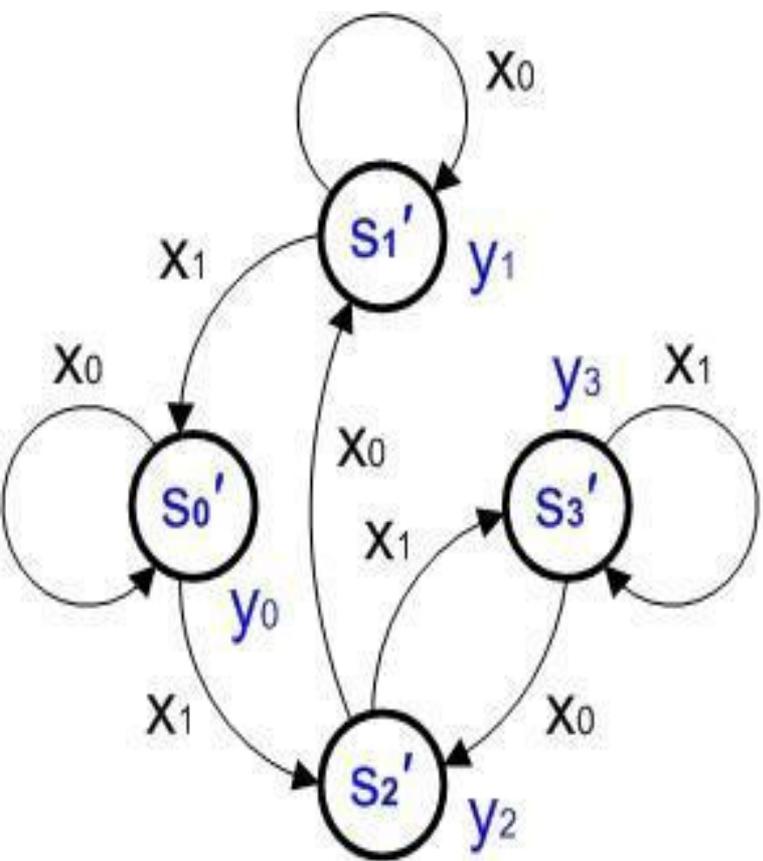
От каждого автомата Мили можно перейти к эквивалентному ему автомату Мура. Если к одной вершине подходят дуги, отмеченные разными выходными сигналами, то производится разбиение на несколько вершин, каждая из которых отмечается своим выходным сигналом, и от каждой из этих вершин выводятся все дуги, существующие в графе автомата Мили.

Автомат Мили \square Автомат Мура

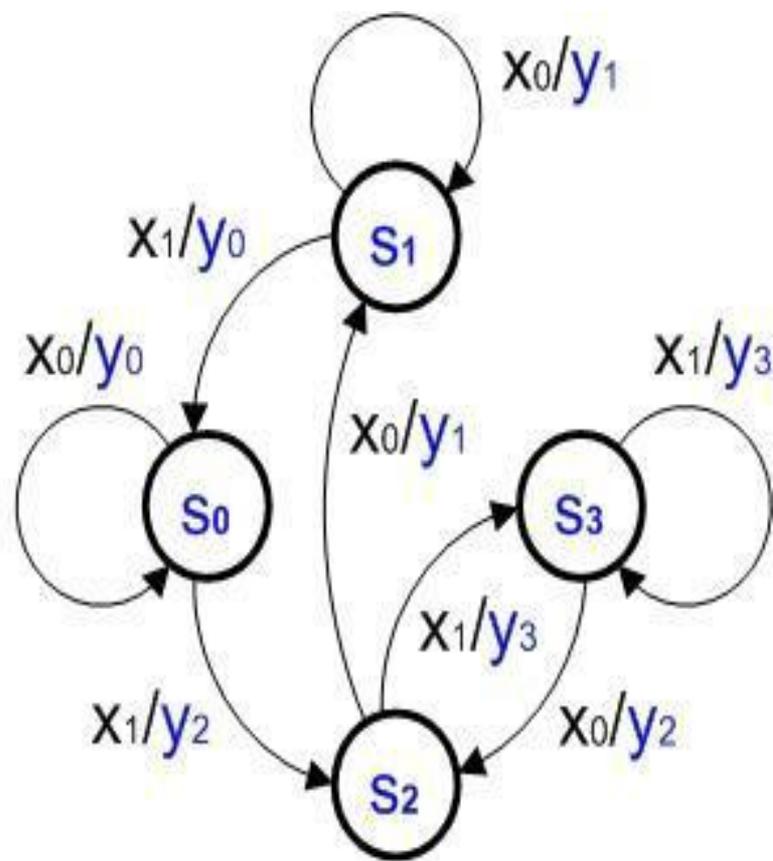
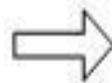
Переход от автомата Мили к эквивалентному автомату Мура:



Переход от автомата Мура к автомату Мили



Автомат Мура



Автомат Мили

Алгоритм синтеза конечных автоматов

Автомат Мили

- 1 шаг. Построение диаграммы переходов (графа конечного автомата).*
- 2 шаг. Для заданной ДС составляем таблицы переходов и выходов.*
- 3 шаг. Определяем количество ЭП, количество входов и выходов.*
- 4 шаг. Кодлируем состояния, входы и выходы конечного автомата.*
- 5 шаг. Составляем по таблице выходов - минимальные функции выходов.*
- 6 шаг. Составляем таблицу возбуждения памяти и функции ВП (миним.)*
- 7 шаг. Все логические функции приводим к единому базису И-НЕ.*
- 8 шаг. Составляем логическую функцию КА в базисе И-НЕ*

Функциональные схемы

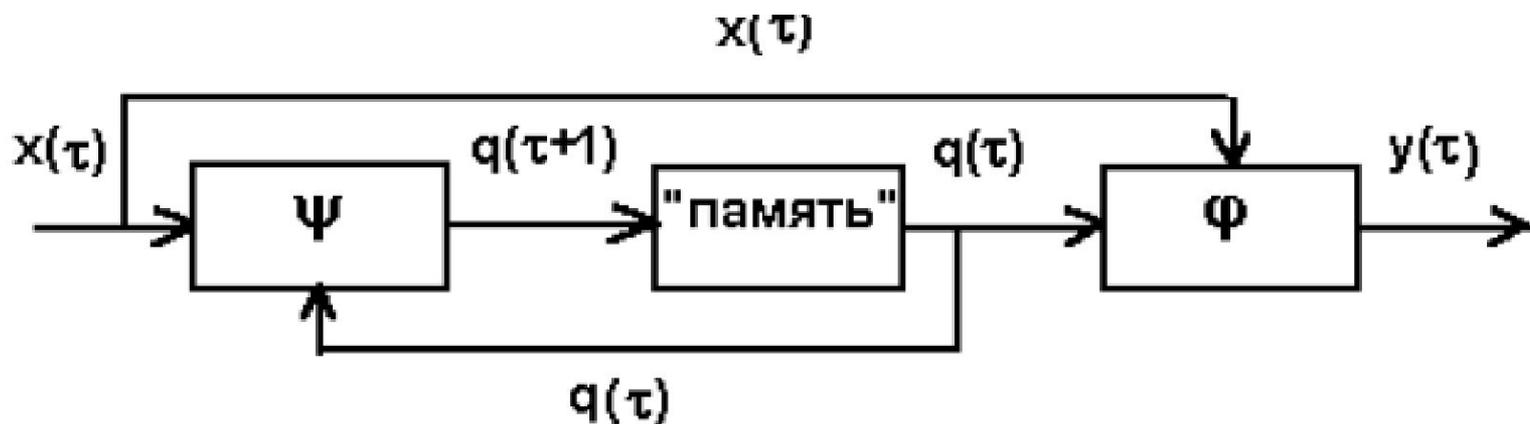


Рис. 1.3. Функциональная схема автомата Мили.

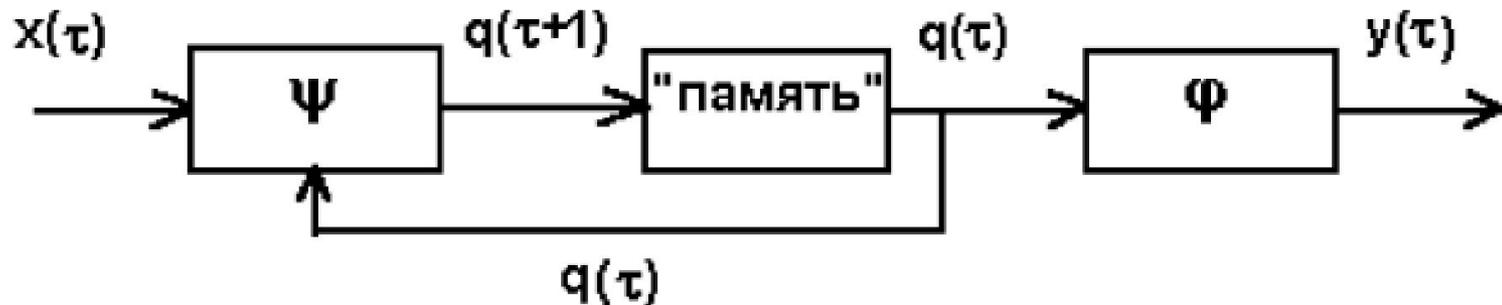
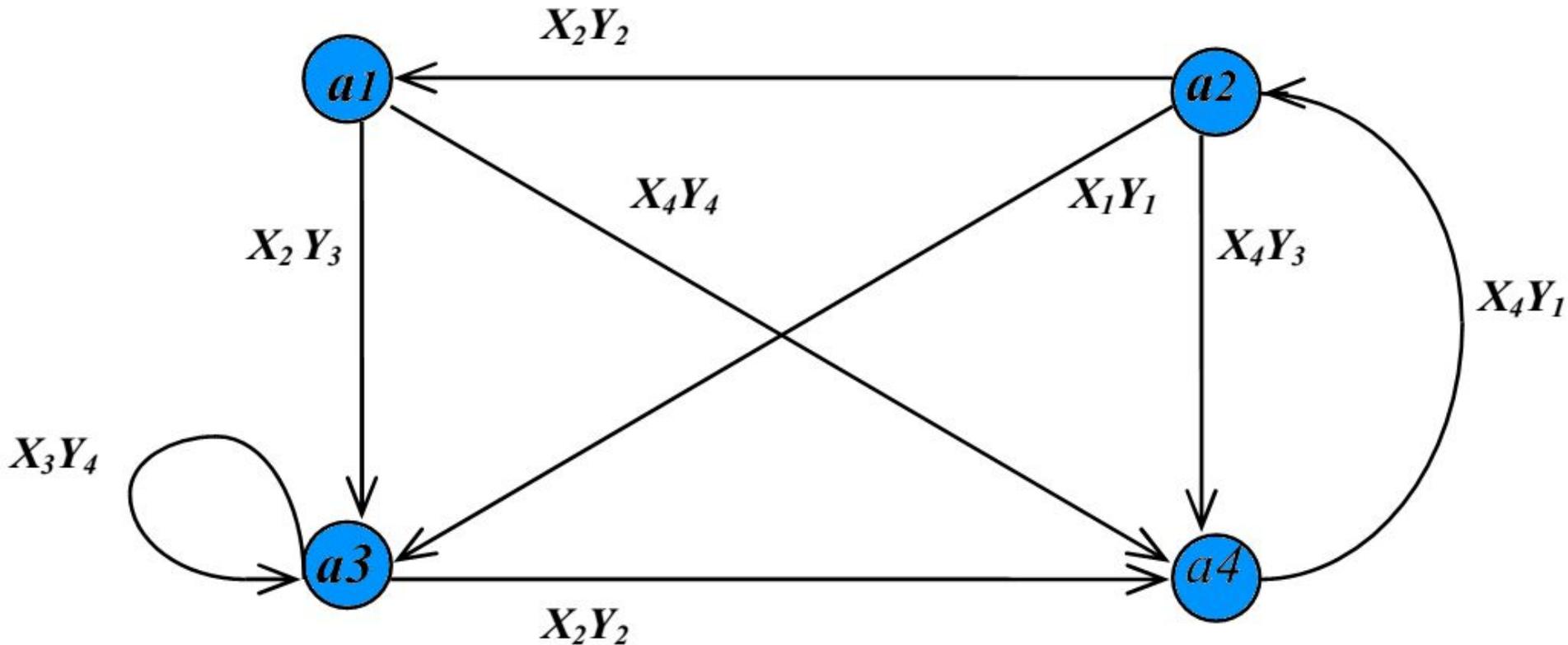


Рис. 1.4. Функциональная схема автомата Мура.

Синтез конечных автоматов (v.1)

1 шаг. Построение диаграммы переходов.



**Автомат
Мули**

Синтез конечных автоматов (v.1)

2 шаг. Таблицы переходов и выходов.

$$a(t+1) = \delta[a(t); X(t)]$$

Сост. вх.	a_1	a_2	a_3	a_4
X_1	—	a_3	—	—
X_2	a_3	a_1	a_4	—
X_3	—	—	a_3	—
X_4	a_4	a_4	—	a_2

$$Y(t) = \lambda[a(t); X(t)]$$

Сост. вх.	a_1	a_2	a_3	a_4
X_1	—	Y_1	—	—
X_2	Y_3	Y_2	Y_2	—
X_3	—	—	Y_4	—
X_4	Y_4	Y_3	—	Y_1

Автомат

Миди

Синтез конечных автоматов (v.1)

3 шаг. Определение входных данных

Для этого используем

$$K=4 \quad [a_k]$$

$$P=4 \quad [X_i]$$

$$A=4 \quad [Y_j]$$

Определяем число элементов памяти:

$$r \geq \log_2 K = 2$$

Число разрядов входной шины:

$$n \geq \log_2 P = 2$$

Число разрядов выходной шины:

$$m \geq \log_2 S = 2$$

Автомат

Миди

Синтез конечных автоматов (v.1)

4 шаг. Кодируем состояния, входы и выходы.

Внутреннее состояние		Входные шины		Выходные шины	
$a_1=$	00	$X_1=$	00	$Y_1=$	00
$a_2=$	01	$X_2=$	01	$Y_2=$	01
$a_3=$	10	$X_3=$	10	$Y_3=$	10
$a_4=$	11	$X_4=$	11	$Y_4=$	11
	Q_1Q_2		x_1x_2		y_1y_2

Автомат

Миди

Синтез конечных автоматов (v.1)

4 шаг. Кодируем переходы и выходы.

Таблица переходов

x_1x_2 Q^1Q^2	00	01	10	11
00	—	10	—	—
01	10	00	11	—
10	—	—	10	—
11	11	11	—	01

Таблица выходов

x_1x_2 Q^1Q^2	00	01	10	11
00	—	00	—	—
01	10	01	01	—
10	—	—	11	—
11	11	10	—	00

Автомат
Мульти

Синтез конечных автоматов (v.1)

5 шаг. Минимизация функций выходов.

$$y_1 = \overline{x_1}x_2\overline{Q_1}Q_2 \vee x_1x_2\overline{Q_1}Q_2 \vee x_1x_2\overline{Q_1}Q_2 \vee x_1\overline{x_2}Q_1\overline{Q_2}; \quad (1)$$

$$y_2 = x_1x_2\overline{Q_1}Q_2 \vee \overline{x_1}x_2\overline{Q_1}Q_2 \vee \overline{x_1}x_2Q_1\overline{Q_2} \vee x_1\overline{x_2}Q_1\overline{Q_2}. \quad (2)$$

x_1x_2 Q_1Q_2	00	01	11	10
00	X		X	X
01	1			X
11	1	1		X
10			X	1

x_1x_2 Q_1Q_2	00	01	11	10
00	X		X	X
01		1		1
11	1	X		X
10			X	1

$$y_1 = Q_1\overline{Q_2} \vee x_2\overline{Q_2} \vee \overline{Q_1}x_1x_2;$$

$$y_2 = Q_1\overline{Q_2} \vee \overline{Q_1}x_1x_2 \vee x_2\overline{Q_1}Q_2.$$

Автомат

Мини

Синтез конечных автоматов (v.1)

6 шаг. Функции возбуждения памяти (ВП)
 строятся на основе таблицы переходов и таблицы истинности триггеров различных типов, которые являются основой элементов памяти (ЭП) конечного автомата .

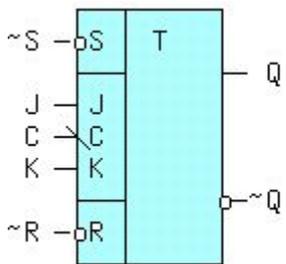
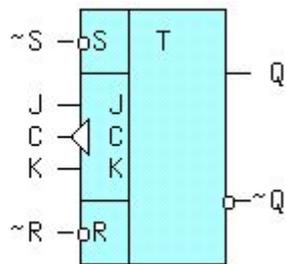


Рис.45.



$Q(t)$	$Q(t+1)$	S	R	D	J	K
0	0	0	X	0	0	X
0	1	1	0	1	1	X
1	0	0	1	0	X	1
1	1	X	0	1	X	0

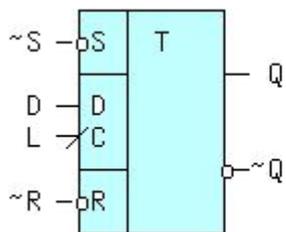
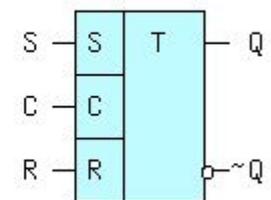
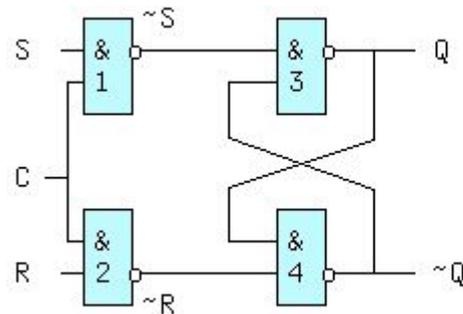
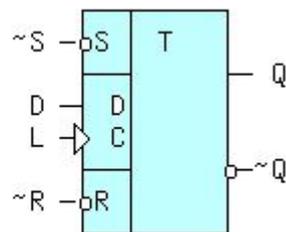


Рис.43.



**Автомат
Мульти**

Синтез конечных автоматов (v.1)

6 шаг. Таблица функций ВП.

вх. сигн	Q ₁ 0 Q ₂ 0				Q ₁ 0 Q ₂ 1				Q ₁ 1 Q ₂ 0				Q ₁ 1 Q ₂ 1			
	R ₁	S ₁	R ₂	S ₂	R ₁	S ₁	R ₂	S ₂	R ₁	S ₁	R ₂	S ₂	R ₁	S ₁	R ₂	S ₂
x ₁ x ₂																
00	○				0	1	1	0	○				○			
01	0	1	-	0	-	0	1	0	0	-	0	1	○			
10	○				○				0	-	-	0	○			
11	0	1	0	1	0	1	0	-	○				1	0	0	-

$$\begin{cases} R_1 = x_1 x_2 Q_1 Q_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_1 = \overline{x_1} x_2 \overline{Q_1} \overline{Q_2} \vee x_1 \overline{x_2} \overline{Q_1} \overline{Q_2} \vee \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{Q_1} Q_2 \vee x_1 x_2 \overline{Q_1} Q_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_2 = \overline{\overline{x_1} \overline{x_2} \overline{Q_1} Q_2} \vee \overline{x_1} x_2 \overline{Q_1} Q_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_2 = x_1 x_2 \overline{Q_1} \overline{Q_2} \vee \overline{x_1} x_2 Q_1 \overline{Q_2} \end{cases}$$

Автомат

Мульти

Синтез конечных автоматов (v.1)

6 шаг. Минимизация функций ВП.

x_1x_2 Q_1Q_2	00	01	11	10
00				
01		X		
11			1	
10				

$$R_{1min} = x_1x_2Q_1Q_2$$

x_1x_2 Q_1Q_2	00	01	11	10
00		1		
01	1			X
11	1	1		
10				X

$$S_{1min} = x_2\bar{Q}_1\bar{Q}_2 \vee x_1x_2\bar{Q}_1 \vee x_1x_2Q_1Q_2$$

x_1x_2 Q_1Q_2	00	01	11	10
00		1		
01	X	1		
11				
10				X

$$R_{2min} = \bar{x}_1\bar{Q}_1Q_2$$

x_1x_2 Q_1Q_2	00	01	11	10
00				
01				1
11	1	X	X	
10				

$$S_{2min} = x_1x_2\bar{Q}_1 \vee \bar{x}_1x_2Q_1\bar{Q}_2$$

Автомат

Мульти

Синтез конечных автоматов (v.1)

7 шаг. Система уравнений (И-НЕ) – структура КА

$$R_1 = x_1 x_2 Q_1 Q_2$$

$$S_1 = \overline{(x_2 Q_1 Q_2)} \overline{(x_1 x_2 Q_1)} \overline{(x_1 x_2 Q_1 Q_2)}$$

$$R_2 = \overline{x_1 Q_1 Q_2}$$

$$S_2 = \overline{(x_1 x_2 Q_1)} \overline{(x_1 x_2 Q_1 Q_2)}$$

$$y_1 = \overline{(Q_1 Q_2)} \overline{(x_2 Q_2)} \overline{(x_1 x_2 Q_1)}$$

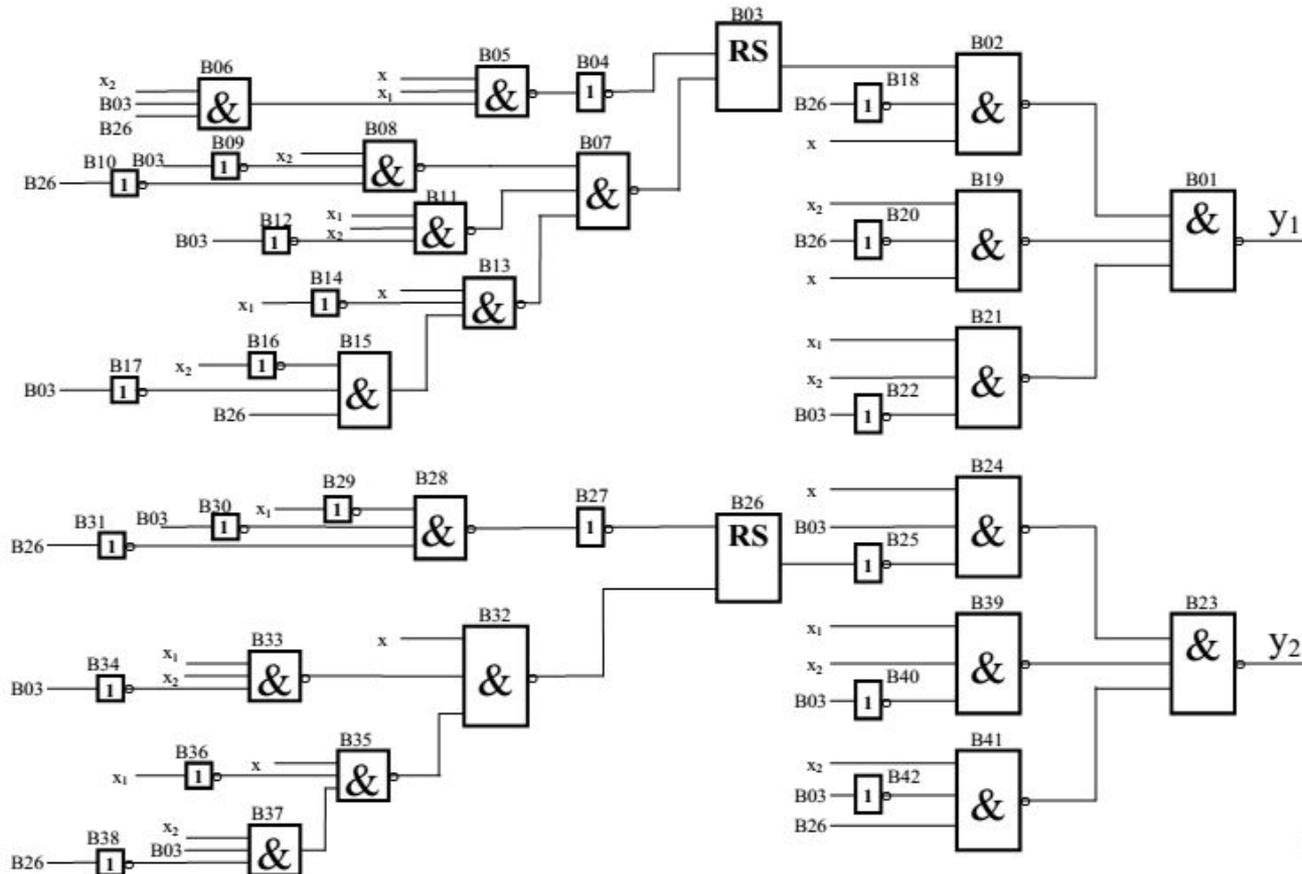
$$y_2 = \overline{(Q_1 Q_2)} \overline{(x_1 x_2 Q_1)} \overline{(x_2 Q_1 Q_2)}$$

Автомат

Мульти

Синтез конечных автоматов (v.1)

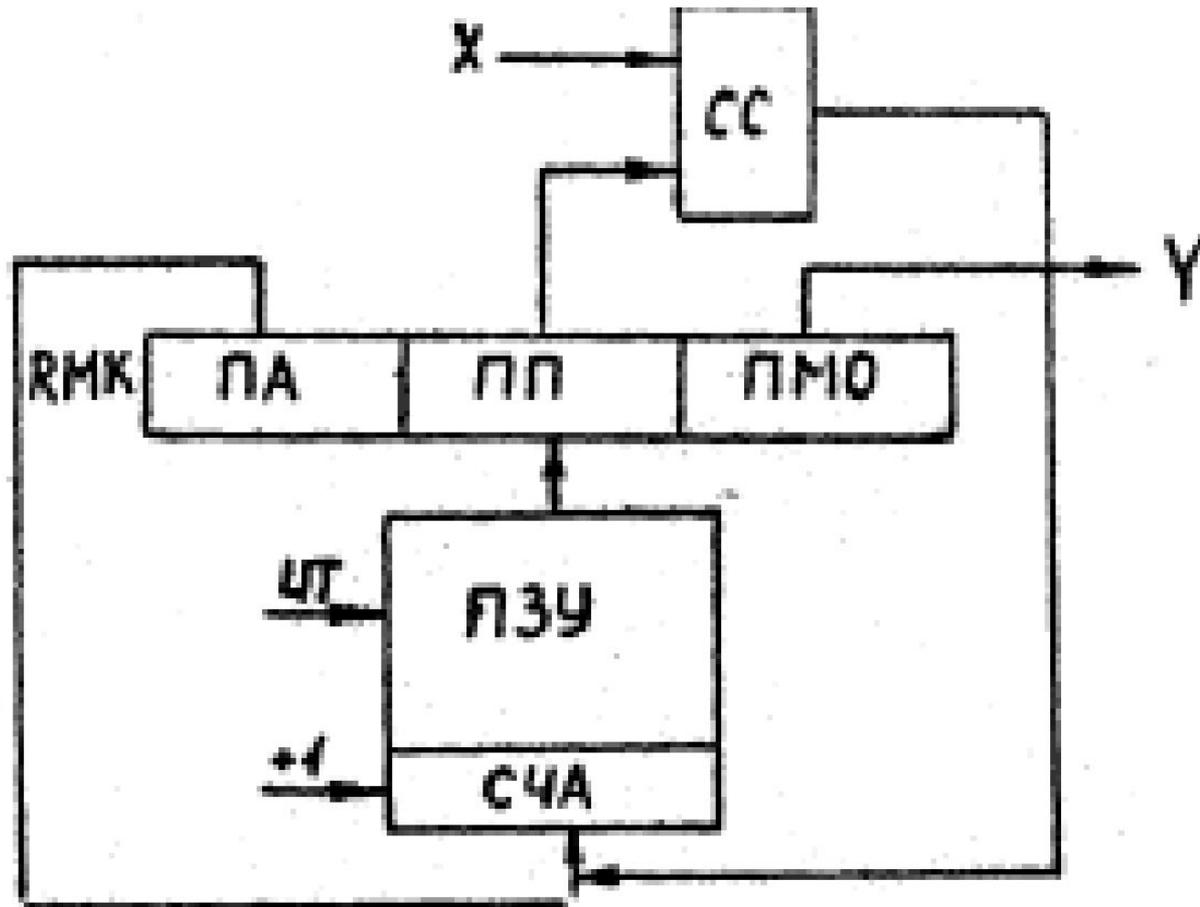
7 шаг. Логическая структура КА



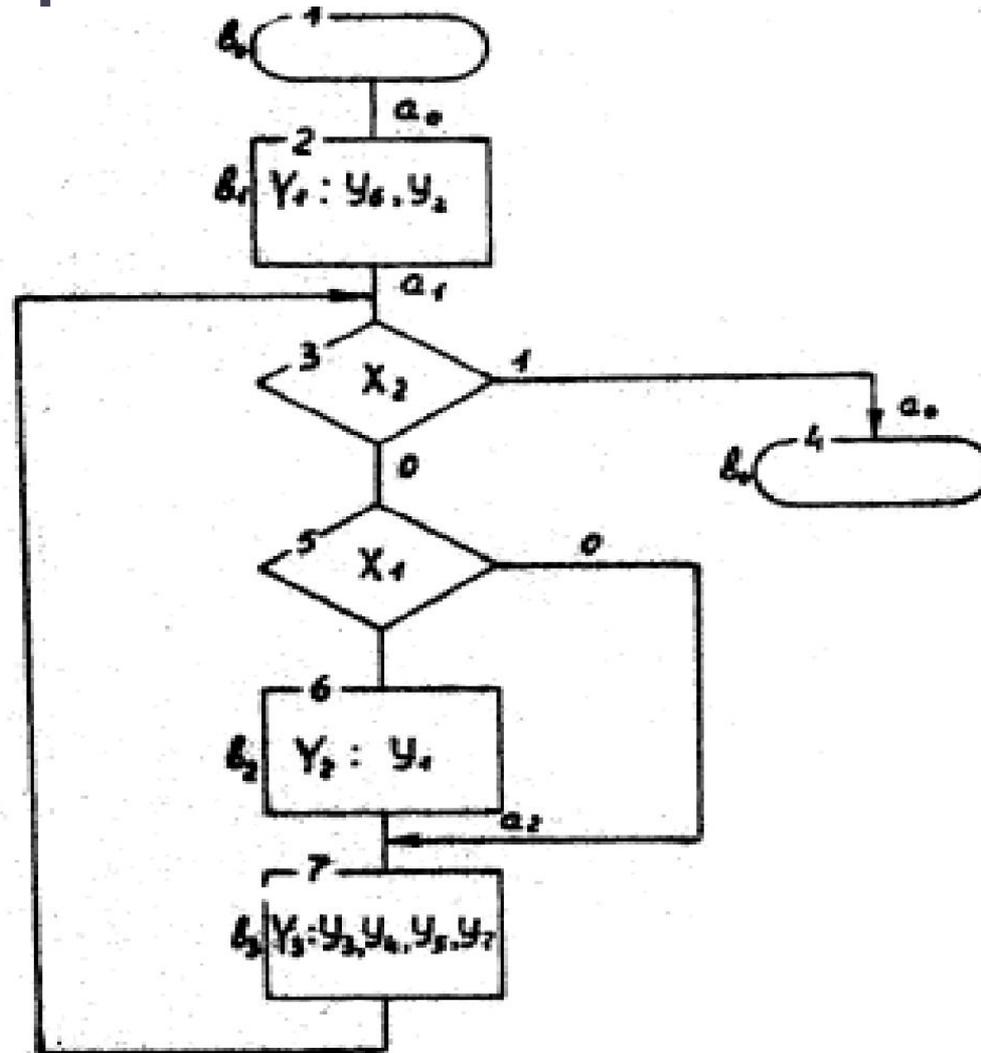
Автомат

Мульти

Реализация с программируемой логикой



Микропрограмма автомата



Содержимое ПЗУ

Адрес ПЗУ	$A_3 A_2 A_1 A_0$	$\Pi \lambda_1 \lambda_2$	$y_7 y_6 y_5 y_4 y_3 y_2 y_1 y_0$	Номер оператора на рис. 4.
0 0 0 0		0 * *	0 1 0 0 0 1 0	2
0 0 0 1	0 0 0 0	1 * 1	0 0 0 0 0 0 0	3
0 0 1 0	0 1 0 0	1 0 1	0 0 0 0 0 0 0	5
0 0 1 1		0 * *	1 0 0 0 0 0 0	5
0 1 0 0		0 * *	0 0 1 1 1 0 1	7
0 1 0 1	0 0 0 1	1 * *	0 0 0 0 0 0 0	