Тема: Дискретное преобразование Фурье и Z-преобразование.

Кафедра Радиоэлектроники.

Преподаватель:
Лазаренко
Сергей Валерьевич.

Учебные вопросы:

1. Спектральная плотность дискретного сигнала.
2. Дискретное преобразование Фурье и его основные свойства.
3. Быстрое преобразование Фурье.
4. Z-преобразование.

1. Спектральная плотность дискретного сигнала.

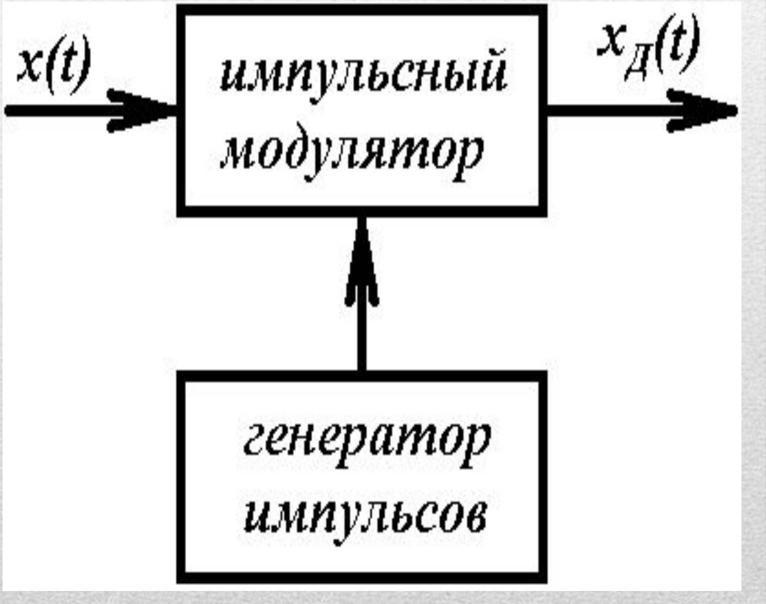
На практике, как правило, отсчеты дискретных сигналов берут во времени через равный промежуток Δ, называемый интервалом (шагом) дискретизации:

$$\Delta = t_0 - t_{-1} = t_1 - t_0 = \ldots = t_m - t_{m-1} = \ldots \qquad (1)$$

Операцию дискретизации, т.е. перехода от аналогового сигнала $x(t)$ к дискретному сигналу $x_Д(t)$, можно описать, введя в рассмотрение т.н. дискретизирующую последовательность

$$\eta(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k\Delta) \qquad (2)$$

где $\delta(t\text{-}k\Delta)$ - дельта – функция.



Импульсный модулятор представляет собой устройство с двумя входами, на один из которых подается аналоговый сигнал $x(t)$. На второй вход поступают короткие синхронизирующие импульсы с интервалом повторения Δ. Обозначим частоту повторения импульсов через $\omega_1=2\Pi/\Delta$.

Описанный принцип позволяет записать следующую математическую модель дискретного сигнала, полученного путем импульсной модуляции

$$x_Д(t) = x(t_k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\delta(t-k\Delta) \qquad (3)$$

Фактически это есть произведение двух сигналов *x(t)* и *η(t)*,. Найдем спектральную плотность $\dot{S}_{XД}(\omega)$ этого дискретного сигнала в предположении, что известна спектральная плотность сигнала $x(t) = \dot{S}_X(\omega)$.

Для этого вначале вспомним, что спектральная плотность произведения двух сигналов есть свертка спектральных плотностей этих сигналов

$$\dot{S}_{XД}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_\eta(\xi)\dot{S}_X(\omega-\xi)d\xi \qquad (4)$$

где $\dot{S}_\eta(\omega)$- спектральная плотность сигнала (2).

Для нахождения $\dot{S}_\eta(\omega)$ представим *η(t)* рядом Фурье, учитывая, что Δ - период следования δ- импульсов:

$$\eta(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{A}_k e^{jk\omega_1 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{A}_k e^{j\frac{2\pi k}{\Delta}t} \qquad (5)$$

Коэффициенты ряда $\dot{A}_k$ определяются обычным образом

$$\dot{A}_k = \frac{1}{\Delta}\int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} \delta(t)\cdot e^{-j\frac{2\pi k}{\Delta}t}dt = \frac{1}{\Delta} \qquad (6)$$

При выводе выражения (6) учтено фильтрующее свойство δ- функции. С учетом полученного результата формула (5) приобретает вид:

$$\eta(t) = \frac{1}{\Delta}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j\frac{2\pi k}{\Delta}t} \qquad (7)$$

Учитывая, что преобразованию Фурье присуще свойство линейности, спектральную плотность сигнала (7) можно определить, суммируя спектральные плотности $\dot{S}_1(\omega)$ функций вида $e^{j\frac{2\pi k}{\Delta}t}$.

$$\dot{S}_1(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\frac{2\pi k}{\Delta}t} e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\left(\omega - \frac{2\pi k}{\Delta}\right)t}dt = 2\pi\cdot\delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{\Delta}\right). \qquad (8)$$

Проверить правильность выражения (8) можно, определив обратное преобразование Фурье.

Таким образом, имеем

$$\dot{S}_{\eta}(\omega) = \frac{2\pi}{\Delta}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{\Delta}\right) \qquad (9)$$

Подставив (9) в (4), получим окончательно

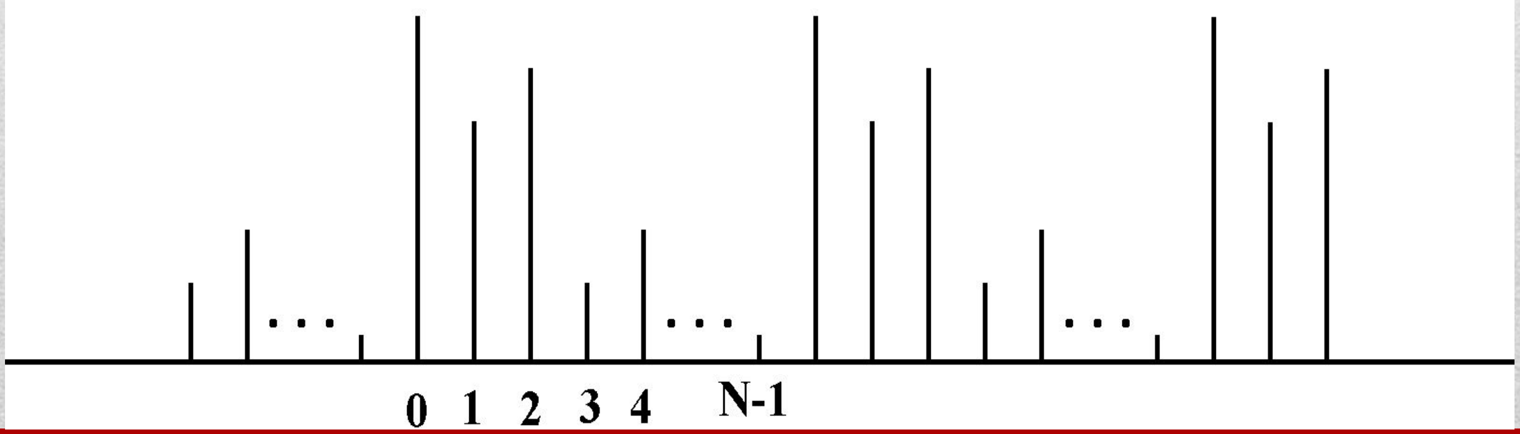
$$\dot{S}_{XД}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2\pi}{\Delta}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\xi - k\frac{2\pi}{\Delta}\right)\dot{S}_X(\omega-\xi)\,d\xi =$$

$$= \frac{1}{\Delta}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\dot{S}_X\left(\omega - k\frac{2\pi}{\Delta}\right). \qquad (10)$$

Таким образом, спектр дискретизированного сигнала представляет собой результат суммирования бесконечного числа "копий" спектра исходного сигнала. Эти копии располагаются на оси частот через промежутки *2П*/Δ, равные частоте дискретизации ω_1.

2. Дискретное преобразование Фурье и его основные свойства.

При исследовании сигналов с помощью цифровых ЭВМ непрерывный сигнал $x(t)$ на интервале времени наблюдения $[0,T]$ задается своими отсчетными значениями $x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}$ взятыми соответственно в моменты времени 0, Δ, 2Δ, ..., $(N\text{-}1)\Delta$. Полное число отсчетов $N=T/\Delta$. Массив этих чисел является единственной информацией, по которой можно судить о спектральных свойствах сигнала $x(t)$.Такому сигналу можно сопоставить некоторую математическую модель, раскладывая которую в ряд Фурье, можно найти соответствующие амплитудные коэффициенты. Совокупность этих коэффициентов образует спектр дискретного периодического сигнала.



Воспользуемся моделью сигнала в виде последовательности δ-импульсов

$$x_Д(t) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k\Delta)\delta(t - k\Delta) = \sum_{k=0}^{N-1} x_k \delta(t - k\Delta) \qquad (11)$$

Эта модель отличается от (3) ограниченным количеством отсчетов (сигнал рассматривается в пределах "периода" T). Представим сигнал (11) комплексным рядом Фурье

$$x_Д(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{A}_n e^{j\frac{2\pi n}{\Delta}t} \quad (12)$$ где коэффициенты $$\dot{A}_n = \frac{1}{T}\int_0^T x_Д(t)\cdot e^{-j\frac{2\pi n}{T}t}dt \quad (13)$$

Подставим в выражение (13) значение $x_Д(t)$ (11), и учтем что $T=\Delta N$.

$$\dot{A}_n = \frac{1}{N\cdot\Delta}\int_0^{N\cdot\Delta}\sum_{k=0}^{N-1} x_k \delta(t - k\cdot\Delta)\cdot e^{-j\frac{2\pi n}{N\cdot\Delta}t}dt$$

Введем безразмерную переменную $\xi=t/\Delta$. Тогда $t=\Delta\xi$, $dt=\Delta d\xi$. При $t=0$ $\xi=0$, при $t=T$ $\xi=N$

При этом получим

$$\dot{A}_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x_k \int_0^{N\cdot\Delta}\delta(\xi - k)\cdot e^{-j\frac{2\pi n\xi}{N}}d\xi = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-j\frac{2\pi nk}{N}} \qquad (14)$$

Из (14) следуют основные свойства ДПФ.

2.1 Дискретное преобразование Фурье есть линейное преобразование, т.е. сумме сигналов отвечает сумма их ДПФ.

2.2 Количество различных коэффициентов A_0, A_1, A_2, ... A_{N-1}, вычисляемых по формуле (14), равно числу N отсчетов за период: при $n=N$ коэффициент $A_N=A_0$ (показать).

2.3 Коэффициент A_0 (постоянная составляющая) является средним значением всех отсчетов

$$A_0 = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x_k \qquad (15)$$

2.4 Если N - четное, то

$$A_{N/2} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-j\frac{2\pi kN}{2N}} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x_k \left(-1\right)^k \qquad (16)$$

2.5 Если N - четное и x_k - вещественные числа, то коэффициенты ДПФ, номера которых располагаются симметрично относительно $N/2$, образуют комплексно-сопряженные пары. Действительно,

$$A_{N-n} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-j\frac{2\pi k\left(N-n\right)}{N}} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-j2\pi k} e^{j\frac{2\pi nk}{N}} \qquad (17)$$

Второй сомножитель в правой части выражения (17) всегда равен 1, Следовательно,

$$\dot{A}_{N-n} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{j\frac{2\pi nk}{N}} = \overset{*}{A}_n \qquad (18)$$

Если на основании совокупности отсчетов $x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}$ некоторого сигнала найдены коэффициенты ДПФ A_0, $\dot{A}_1$, $\dot{A}_2$, ... $\dot{A}_{N-1}$, то по ним всегда можно восстановить исходный сигнал *x(t)* с ограниченным спектром, который был подвергнут дискретизации. Ряд Фурье такого сигнала принимает вид конечной суммы:

$$x(t) = A_0 + 2A_1\cos\left(\frac{2\pi}{T} + \varphi_1\right) + 2A_2\cos\left(\frac{4\pi}{T} + \varphi_2\right) + \ldots + A_{\frac{N}{2}}\cos\left(\frac{N\pi}{T} + \varphi_{\frac{N}{2}}\right),$$

где $\varphi_i = \arg A_i$ - фазовый угол коэффициента ДПФ.

Формула (13) позволяет ввести в рассмотрение обратное ДПФ. Если положить $t = \Delta k$ и учесть, что суммируется конечное число членов ряда, то получим

$$x_k(t) = \sum_{n=0}^{N-1} \dot{A}_n e^{j\frac{2\pi kn}{N}}$$

3. Быстрое преобразование Фурье.

Разобьем входную последовательность $\{x_k\}$ на две части с четными и нечетными номерами:

$$\{x_k\}_{чт} = \{x_{2k}\} \qquad \{x_k\}_{нч} = \{x_{2k+1}\} \qquad (19) \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, \frac{N}{2} - 1$$

и представим n-ный коэффициент ДПФ в виде

$$\dot{A}_n = \frac{1}{N} \sum_{\substack{k=0 \\ k-четные}}^{N-1} x_k e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} + \frac{1}{N} \sum_{\substack{k=0 \\ k-нечетные}}^{N-1} x_k e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2k} e^{-j\frac{2\pi}{N}n2k} + \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2k+1} e^{-j\frac{2\pi}{N}n(2k+1)} =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2k} e^{-j\frac{4\pi}{N}nk} + \frac{1}{N} e^{-j\frac{2\pi}{N}n} \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2k+1} e^{-j\frac{4\pi}{N}nk}$$

Непосредственно видно, что первая половина коэффициентов ДПФ исходного сигнала с номерами от 0 до $\frac{N}{2}-1$ выражается через коэффициенты ДПФ двух частных последовательностей:

$$\dot{A}_n = \dot{A}_{nЧЧ} + e^{-j\frac{2\pi}{N}n}\dot{A}_{nНН} \qquad (20) \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \frac{N}{2}-1$$

Теперь учтем, что последовательности коэффициентов, относящихся к четной и нечетной частям входного массива, являются периодическими с периодом *N/2*:

$$\dot{A}_{nЧЧ} = \dot{A}_{n+\frac{N}{2}ЧТ} \qquad \dot{A}_{nНН} = \dot{A}_{n+\frac{N}{2}НЧ}$$

Кроме того, входящий в формулу (20) множитель при *n> N/2* можно преобразовать так:

$$e^{-j\frac{2\pi}{N}\left(\frac{N}{2}+n\right)} = e^{-j\pi}e^{-j\frac{2\pi}{N}n} = -e^{-j\frac{2\pi}{N}n}$$

Отсюда находим выражение для второй половины множества коэффициентов ДПФ:

$$\dot{A}_n = \dot{A}_{nЧЧ} - e^{-j\frac{2\pi}{N}n}\dot{A}_{nНН} \qquad (21) \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \frac{N}{2}-1$$

4. Z-преобразование.

Определение Z-преобразования. Пусть $\{x_k\}=(x_0, x_1, x_2, \ldots)$ - числовая последовательность, конечная или бесконечная, содержащая отсчетные значения некоторого сигнала. Поставим ей в однозначное соответствие сумму ряда по отрицательным степеням комплексной переменной z:

$$X(z)=x_0+\frac{x_1}{z}+\frac{x_2}{z^2}+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}x_k z^{-k} \qquad (22)$$

На основании формулы (22) можно непосредственно найти Z – преобразования дискретных сигналов с конечным числом отсчетов. Так, простейшему дискретному сигналу с единственным отсчетом $\{x_k\}=\{1,0,0,\ldots\}$ соответствует $X(z)=1$. Если же, например, $\{x_k\}=\{1,1,1,0,0,\ldots\}$, то

$$X(z)=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}=\frac{z^2+z+1}{z^2}$$

Сходимость ряда. Если в ряде число слагаемых бесконечно велико, то необходимо исследовать его сходимость. Из теории функций комплексного переменного известно следующее. Пусть коэффициенты рассматриваемого ряда удовлетворяют условию

$$|x_k|<MR_0^k \qquad (23)$$

Рассмотрим, например, дискретный сигнал $\{x_k\} = \{1, 1, 1, \ldots\}$, образованный одинаковыми единичными отсчетами и служащий моделью обычной функции включения. Бесконечный ряд

$$X(z) = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \ldots$$

является суммой геометрической прогрессии и сходится при любых z в кольце $|z| > 1$. Суммируя прогрессию, получаем

$$X(z) = \frac{1}{(1 - \frac{1}{z})} = \frac{z}{z - 1}$$

На границе области аналитичности при $z=1$ эта функция имеет единственный простой полюс.

Аналогично получается Z-преобразование бесконечного дискретного сигнала $\{x_k\} = \{1, a, a^2, \ldots\}$, , где a — некоторое вещественное число. Здесь

$$X(z) = \frac{1}{\left(1 - \frac{a}{z}\right)} = \frac{z}{z - a}$$

Z-преобразование непрерывных функций. Полагая, что отсчеты $\{x_k\}$ есть значения непрерывной функции $x(t)$ в точках $t=\Delta k$, любому сигналу $x(t)$ можно сопоставить его Z-преобразование при выбранном шаге дискретизации Δ:

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k\Delta) \cdot z^{-k}$$

Например, если $x(t)=e^{at}$, то соответствующее Z-преобразование

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{\alpha k \Delta} z^{-k} = \frac{z}{z - e^{\alpha \Delta}}$$

является аналитической функцией при $|z| > e^{a\Delta}$.

Пусть $X(z)$ — функция комплексной переменной z, аналитическая в кольцевой области $|z| > R_0$. Замечательное свойство Z-лреобразования состоит в том, что функция $X(z)$ определяет всю бесконечную совокупность отсчетов $(x_0, x_1, x_2, \ldots)$. Действительно, умножим обе части ряда на множитель z^{m-1}:

$$z^{m-1} X(z) = x_0 z^{m-1} + x_1 z^{m-2} + \ldots + x_m z^{-1} + \ldots$$

а затем вычислим интегралы от обеих частей полученного равенства, взяв в качестве контура интегрирования произвольную замкнутую кривую, лежащую целиком в области аналитичности и охватывающую все полюсы функции $X(z)$.

Воспользуемся фундаментальным положением, вытекающим из теоремы Коши:

$$\oint z^m dz = \begin{cases} 2\pi j, & \text{если } m = -1, \\ 0, & \text{если } m \neq -1. \end{cases} \qquad (24)$$

Для доказательства этого найдем следующие интегралы:

$$\oint dz \qquad \oint z^m dz \qquad \oint z^{-1} dz \qquad \oint z^{-m} dz, \quad m > 1$$

Каждый из них находится заменой произвольного контура интегрирования на окружность постоянного радиуса *r*, равного модулю переменной *z*, т.е. фактически производится замена $z = re^{j\varphi}, \quad dz = jre^{j\varphi} d\varphi$

При этом, так как радиус есть величина постоянная, то интегрирование производится по углу φ в пределах от 0 до *2П*. Первый интеграл равен

$$\oint dz = jr\int_0^{2\pi} e^{j\varphi} d\varphi = re^{j\varphi}\Big|_0^{2\pi} = 0 \qquad (25)$$

Второй интеграл вычисляется аналогично

$$\oint z^m dz = jmr^m \int_0^{2\pi} e^{jm\varphi} d\varphi = r^m e^{jm\varphi} \Big|_0^{2\pi} = 0 \qquad (26)$$

Третий интеграл вычислится следующим образом:

$$\oint z^{-1} dz = j\frac{r}{r} \int_0^{2\pi} \frac{e^{j\varphi}}{e^{j\varphi}} d\varphi = 2\pi j \qquad (27)$$

Не трудно убедиться, что четвертый интеграл так же, как первые два, равен нулю. Очевидно, интегралы от всех слагаемых правой части обратятся в нуль, за исключением слагаемого с номером m, поэтому

$$x_m = \frac{1}{2\pi j} \oint z^{m-1} X(z) dz \qquad (28)$$

Данная формула называется обратным z-преобразованием.

Основные свойства z-преобразования.

1. Линейность. Если $\{x_k\}$ и $\{y_k\}$ — некоторые дискретные сигналы, причем известны соответствующие Z-преобразования $X(z)$ и $Y(z)$, то сигналу $\{u_k\}=\{ax_k+\beta y_k\}$ будет отвечать преобразование $U(z)=aX(z)+\beta Y(z)$ при любых постоянных a и β.

2. Z -преобразование смещенного сигнала. Рассмотрим дискретный сигнал $\{y_k\}$, получающийся из дискретного сигнала $\{x_k\}$ путем сдвига на одну позицию в сторону запаздывания, т. е. когда $y_k=x_{k-1}$. Непосредственно вычисляя Z -преобразование, получаем следующий результат:

$$Y(z)=\sum_{k=0}^{\infty}x_{k-1}z^{-k}=z^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}x_n z^{-n}=z^{-1}X(z)$$

Таким образом, символ x^{-1} служит оператором единичной задержки на один интервал дискретизации в z-области.

3. Z -преобразование свертки. Пусть $x(t)$ и $y(t)$ — непрерывные сигналы, для которых определена свертка

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)y(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}y(\tau)x(t-\tau)d\tau \qquad (29)$$

Применительно к дискретным сигналам по аналогии с (29) принято вводить дискретную свертку $\{f_k\}$ — последовательность чисел, общий член которой

$$f_m = \sum_{k=0}^{\infty} x_k y_{m-k} = \sum_{k=0}^{\infty} y_k x_{m-k}, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots$$

Вычислим Z -преобразование дискретной свертки:

$$F(z) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} x_k y_{m-k} z^{-m} = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} x_k z^{-k} y_{m-k} z^{-(m-k)} =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x_k z^{-k} \sum_{n=0}^{\infty} y_n z^{-n} = X(z)Y(z)$$

Итак, свертке двух дискретных сигналов отвечает произведение их Z – преобразований.