Ряды

Лекция 9

1. Определение числового ряда. Сходимость

- В математических приложениях, а также при решении некоторых задач в экономике, статистике и других областях рассматриваются суммы с бесконечным числом слагаемых. Что понимается под такими суммами?

Пусть задана бесконечная числовая последовательность $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$

Опр. **Числовым рядом** или просто **рядом** называется выражение (сумма) вида $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (1).

Числа $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ называются **членами ряда**, а a_n – **общим** или **n – м членом ряда**.

Чтобы задать ряд (1), достаточно задать функцию натурального аргумента $a_n = f(n)$ вычисления n - го члена ряда по его номеру n ($n \in N$).

Пример 1. Пусть $a_n = \frac{1}{n}$. Ряд $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ называется **гармоническим.**

Пример 2. Пусть $a_n = \frac{1}{n^a}$, $a > 0$.

Ряд $1 + \frac{1}{2^a} + \frac{1}{3^a} + \ldots + \frac{1}{n^a} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ называется **обобщённым**

гармоническим рядом.

В частном случае при $a = 1$ получается гармонический ряд.

Пример 3. $a_n = a_1 + d(n-1)$ – общий член арифметической прогрессии.

Пример 4. Пусть $b_n = b_1 q^{n-1}$.

Ряд $b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + \ldots + b_1 q^{n-1} + \ldots$ называется **рядом геометрической прогрессии**.

Из членов ряда (1) образуем числовую последовательность частичных сумм

$S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$, где $S_n = a_1 + a_2 \ldots + a_n$ - сумма первых n членов ряда, которая называется **n-й частичной суммой**, т. е. $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2 = S_1 + a_2$, $S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = S_2 + a_3$, ….,

$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = S_{n-1} + a_n$, ….. (5) , Числовая последовательность $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ при неограниченном возрастании номера n может:

1) иметь конечный предел;

2) не иметь конечного предела (предел не существует или равен бесконечности).

Опр. Ряд (1) называется **сходящимся,** если последовательность его частичных сумм (5) имеет конечный предел, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S.$

В этом случае число S называется **суммой ряда** (1) и пишется $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = S$

а число $R_n = S - S_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots$ называют **остатком ряда.**

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \Rightarrow \lim_{n\to\infty} R_n = 0.$$

Опр. Ряд (1) называется **расходящимся**, если последовательность его частичных сумм не имеет конечного предела.

- Расходящемуся ряду не приписывают никакой суммы.

Таким образом, задача нахождения суммы сходящегося ряда (1) равносильна вычислению предела последовательности его частичных сумм.

Примеры

1.Ряд 0 + 0 + … + 0+… сходится, его сумма равна нулю ($S_n = 0$).
2.Ряд 1+1+1+…+1+… расходится, $S_n = n \to \infty$ при $n \to \infty$,
то есть $\lim_{n \to \infty} S_n = \infty$.
3.Ряд 1 – 1 + 1 – 1 + 1 - 1+ … + 1 +… расходится, так как последовательность его частичных сумм
($S_1 = 1$, $S_2 = 0$, $S_3 = 1$, …) не имеет предела,
то есть $\lim_{n \to \infty} S_n$ не существует.

Пример

Доказать, что ряд $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ сходится и найти его сумму.

Решение. Найдем n - ю частичную сумму данного ряда S_n .

Общий член ряда $a_n=\frac{1}{n(n+1)}$ представим в виде: $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$.

Тогда $\boldsymbol{S_1}=\frac{1}{1\cdot 2}=1-\frac{1}{2}$, $\boldsymbol{S_2}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}=(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})=1-\frac{1}{3}$, ...,

$$\boldsymbol{S_n}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=$$

$$=(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+\ldots+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})=1-\frac{1}{n+1}$$

Получим $S_n=1-\frac{1}{n+1}$. Отсюда имеем: $\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n+1})=1$.

Пример.

- Пусть $b_n = b_1 q^{n-1}$ - общий член ряда геометрической прогрессии, где $b_1 \neq 0$, $q = \frac{b_2}{b_1}$ – знаменатель прогрессии.

Найдем сумму первых n членов ряда: $S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$,

$q \neq 1$.

Запишем формулу в виде: $S_n = \frac{b_1}{1-q} - \frac{b_1 \cdot q^n}{1-q}$, тогда, если:

1) $|\boldsymbol{q}|<1$, то $\lim\limits_{n \to \infty} q^n = 0$ и $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = \frac{b_1}{1-q}$, т.е. **ряд сходится** и его сумма $S = \frac{b_1}{1-q}$.
2) $|\boldsymbol{q}|>1$, то $\lim\limits_{n \to \infty} |q^n| = \infty$ и $S_n \to \pm\infty$ при $n \to \infty$, т.е. сумма ряда не существует и **ряд расходится.**
3) $\boldsymbol{q} = 1$, то ряд имеет вид $b_1 + b_1 + b_1 + \ldots$,

тогда $S_n = n \cdot b_1$ и $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = \lim\limits_{n \to \infty} n \cdot b_1 = \infty$. Значит, **ряд расход.**

4) $\boldsymbol{q} = -\mathbf{1}$, то ряд имеет вид

$b_1 - b_1 + b_1 - b_1 + \ldots$, тогда

$$S_n = \begin{cases} 0, \text{ если } n - \text{четное число}, \\ b_1, \text{ если } n - \text{нечетное число}. \end{cases}$$

Значит, S_n предела не имеет и **ряд расходится**.

- **Пример.** Определить сумму ряда

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \ldots + \frac{1}{3^{n-1}} + \ldots$$

Решение. Имеем геометрическую прогрессию, где $b_1 = 1$, $q = \frac{1}{3} < 1$. Поэтому $S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2} \Rightarrow$

Ряд сходится.

2. Свойства сходящихся числовых рядов

1. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ сходится и его сумма равна S, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = c \cdot a_1 + c \cdot a_2 + c \cdot a_3 + \ldots$,

где $c = \text{const}$, также сходится и его сумма равна $\boldsymbol{c \cdot S}$.

Но если этот ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится и $c \neq 0$, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n$ также расходится.

2. Если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, то сходятся и ряды $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$, причем сумма каждого равна соответственно $S_1 \pm S_2$.

Замечание. Но сумма (разность) двух расходящихся рядов может быть как сходящимся, так и расходящимся рядом.

3. Если к ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ прибавить (или отбросить) конечное число членов, то полученный ряд и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходятся или расходятся одновременно.

- Замечание. Из данного свойства следует, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то его остаток

$R_n \to 0$ при $n \to \infty$, т.е. $\lim\limits_{n \to \infty} R_n = 0$.

Необходимый признак сходимости числового ряда

- **Теорема.** Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то его общий член a_n стремится к нулю, т.е. $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$. (Обратная теорема неверна, т.е., если $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$, то ряд необязательно сходится. Пример: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$).

<u>Доказательство:</u>

Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится и $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = S$.

Тогда и $\lim\limits_{n \to \infty} S_{n-1} = S$ (при $n \to \infty$ и $(n-1) \to \infty$).

Учитывая, что $a_n = S_n - S_{n-1}$ при $n > 1$, получаем:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n \to \infty} S_n - \lim_{n \to \infty} S_{n-1} =$$

$= S - S = 0.$

Следствие.

(Достаточное условие расходимости ряда).

- Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ или этот предел не существует, то ряд расходится.

<u>Доказательство</u>:

Действительно, если бы ряд сходился, то по теореме $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Но это противоречит условию. Значит, ряд расходится.

Пример 1. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-2}{n+5}$.

Решение.

Ряд расходится, т.к. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n-2}{n+5} = 3 \neq 0$.

Пример 2. Исследовать сходимость ряда $(1+\frac{1}{1})^1+(1+\frac{1}{2})^2+\ldots+(1+\frac{1}{n})^n+\ldots.$

Решение. Ряд расходится,

т.к. $\lim_{n\to\infty} a_n == \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e \neq 0.$

3. Достаточные признаки сходимости знакопостоянных рядов (знакоположительных рядов).

- **Замечание.** Знакоотрицательный ряд умножается на (-1), что не влияет на сходимость ряда.

Признаки сравнения.

Теорема. I признак сравнения. Если $0 \leq a_n \leq b_n$, начиная с некоторого номера $n = n_0$, и ряд

$$b_1 + b_2 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad (2)$$

сходится, то сходится и ряд (1): $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Если же ряд (1) расходится, то расходится и ряд (2).

Замечание. В качестве рядов для сравнения можно взять геометрическую прогрессию $\sum_{n=1}^{\infty} b_1 q^{n-1}$, которая сходится при $|q| < 1$ и расходится при $|q| \geq 1$, и гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, который расходится.

Пример.

- Исследовать сходимость ряда

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 2^2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\ldots+\frac{1}{n\cdot 2^n}+\ldots$$

Решение. $a_n=\frac{1}{n\cdot 2^n}$. Сравним его с рядом геометрической прогрессии $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$, который сходится, т.к. $q=\frac{1}{2}<1$.

Обозначим общий член $b_n=\frac{1}{2^n}$.

Так как $\frac{1}{n\cdot 2^n}<\frac{1}{2^n}$, то по I признаку сравнения сходится и искомый ряд.

$$1.\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}\ \text{расх. т.к.}\ \frac{1}{\sqrt{n+1}}>\frac{1}{n}\ \text{ при }\ n>2.$$

Теорема. II признак сравнения (предельный признак сравнения). Если существует конечный и отличный от нуля предел $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = k$ (в частности, $a_n \sim b_n$), то ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся или расходятся одновременно ($a_n \geq 0, b_n \geq 0$).

- **Пример.** Ряд $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots + \frac{1}{2n-1} + \ldots$ расходится, так как по II признаку сравнения получим $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{1}{2n-1} : \frac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2} \neq 0$, а гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, как известно, расходится.

Признак Даламбера

- **Теорема**. Пусть $a_n > 0$, начиная с некоторого номера $n = n_0$, и существует предел $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = d$. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится при $d<1$ и расходится при $d>1$. Если $d=1$, то вопрос открыт.

Пример. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n}$$

Решение.

- Выпишем $a_n = \frac{3^n \cdot n!}{n^n}$ и $a_{n+1} = \frac{3^{n+1} \cdot (n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$.

Найдем $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{\frac{3^{n+1} \cdot (n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{3^n \cdot n!}{n^n}} =$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{3^{n+1} \cdot (n+1)! \cdot n^n}{(n+1)^{n+1} \cdot 3^n \cdot n!} = \lim_{n \to \infty} \frac{3^n \cdot 3 \cdot (n+1) \cdot n! \cdot n^n}{(n+1)^n (n+1) \cdot 3^n \cdot n!} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{3n^n}{(n+1)^n} = 3 \lim_{n \to \infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = 3 \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n =$$

$$= 3 \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n} = 3 \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} = 3 \cdot e^{-1} = \frac{3}{e} > 1,$$

следовательно, ряд расходится по признаку Даламбера.

Радикальный признак Коши

Теорема. Пусть $a_n > 0$, начиная с некоторого номера $n = n_0$, и существует $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = d$. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится при $d < 1$ и расходится при $d > 1$. Если $d = 1$, то вопрос открыт.

- **Пример.** Исследовать сходимость ряда

$$\frac{2}{1} + \left(\frac{3}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^3 \ldots + \left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n + \ldots.$$

Решение. Выпишем $a_n = \left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n$.

Найдем $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{n+1}{2n-1} = \frac{1}{2} \neq 0$, следовательно, ряд расходится по достаточному признаку расходимости ряда.

Интегральный признак Коши

Теорема. Если $a_n = f(n)$, где функция $f(x) > 0$, монотонно убывает и непрерывна при $1 \leq a \leq x$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходятся или расходятся одновременно.

- **Пример.** Исследовать сходимость гармонического ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Решение. Все условия соблюдены для функции $f(x) = \frac{1}{x}$, поэтому вычислим несобственный интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{1}{x} dx = \lim_{b \to +\infty} (\ln x)\,|_1{}^b =$$

$= \lim\limits_{b \to +\infty} (\ln b - \ln 1) = +\infty$, значит, **ряд расходится**.