

**Степень с
рациональным
показателем и ее
свойства.**



«Люди, незнакомые с алгеброй, не могут представить себе тех удивительных вещей, которых можно достигнуть... при помощи названной науки».

Г.В.Лейбниц

История возникновения степени числа



В знаменитой книге
«Арифметике»
Диофант
Александрийский
описывал первые
натуральные
степени

Одним из первых, кто в конце XVI-начале XVII века принял шаги к построению современной теории степеней, был Нидерландский математик Симон Стевин. Он обозначал неизвестную величину кружком ●



, а внутри его указывал показатель степени.

Например: ●¹, ●², ●³,

В его записи обозначали x , x^2 , x^3 .



У Рене Декарта в его «Геометрии» (1637) мы находим современное обозначение степеней a^2, a^3, \dots

$$\sqrt[n]{a}$$

Повторение

Степень с целым показателем

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}$$

n раз

$$1) 3^3 = 27$$

$$2) 5^3 = 125$$

$$3) 2^4 = 16$$

$$4) 3^1 = 3$$

Степенью числа a с натуральным показателем n , большим 1, называется произведение n множителей, каждый из которых равен a

Свойства степеней

$$1) a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$2) a^n : a^m = a^{n-m}$$

$$3) (a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

$$4) (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$5) \left(\frac{a}{b} \right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$a^0 = 1$$

$$a \neq 0$$

$$\text{a) } 10^{-6} = \frac{1}{10^6} = \frac{1}{1000000};$$

$$\text{б) } 9^{-2} = \frac{1}{9^2} = \frac{1}{81};$$

$$\text{в) } a^{-1} = \frac{1}{a^1};$$

$$\text{г) } x^{-20} = \frac{1}{x^{20}};$$

$$\text{д) } (aв)^{-3} = \frac{1}{(aв)^3};$$

$$\text{е) } (a + в)^{-4} = \frac{1}{(a + в)^4}.$$

$$1) 3^0 = 1$$

$$2) 5^0 = 1$$

$$3) 22222222^0 = 1$$

$$4) 100000^0 = 1$$

Арифметический корень натуральной степени

Определение

Корнем n -ой степени из числа a называется такое число, n -я степень которого равна a .

$$\sqrt[n]{a} = x,$$

то есть $x^n = a$

**АРИФМЕТИЧЕСКИЙ КОРЕНЬ
n-й СТЕПЕНИ ИЗ ЧИСЛА a**

$$\sqrt[n]{a}$$

**a - ПОДКОРЕННОЕ
ВЫРАЖЕНИЕ**

\sqrt{a} - КВАДРАТНЫЙ КОРЕНЬ

$$\sqrt{a}$$

\sqrt{a} - КВАДРАТНЫЙ КОРЕНЬ

\sqrt{a} - КВАДРАТНЫЙ КОРЕНЬ

Примеры

$$1) \quad \sqrt[3]{27} = 3; \quad 3^3 = 27$$

$$2) \quad \sqrt[4]{256} = 4; \quad 4^4 = 256$$

$$3) \quad \sqrt[5]{0,00243} = 0,3; \quad 0,3^5 = 0,00243$$

$$4) \quad \sqrt[3]{1000000} = 100; \quad 100^3 = 1000000$$

$$5) \quad \sqrt[3]{64000} = 40; \quad 40^3 = 64000$$

$$6) \quad \sqrt[6]{\frac{1}{64}} = \frac{1}{2}; \quad \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}$$

Примеры

$$1) \quad \sqrt[3]{27} = 3; \quad 3^3 = 27$$

$$2) \quad \sqrt[4]{256} = 4; \quad 4^4 = 256$$

$$3) \quad \sqrt[5]{0,00243} = 0,3; \quad 0,3^5 = 0,00243$$

$$4) \quad \sqrt[3]{1000000} = 100; \quad 100^3 = 1000000$$

$$5) \quad \sqrt[3]{64000} = 40; \quad 40^3 = 64000$$

$$6) \quad \sqrt[6]{\frac{1}{64}} = \frac{1}{2}; \quad \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}$$

УСТНО:

- Вычислите:

$$\sqrt[4]{16} = 2 \quad \sqrt[7]{0} - \sqrt[8]{256} = 0 - 2 = -2$$

$$\sqrt[5]{32} = 2 \quad \sqrt[3]{125} + \sqrt[4]{81} = 5 + 3 = 8$$

$$\sqrt[10]{1} = 1 \quad \sqrt{64} - \sqrt[5]{243} = 8 - 3 = 5$$

$$\sqrt[4]{81} = 3 \quad \sqrt[6]{64} + \sqrt[4]{625} = 2 + 5 = 7$$

Свойства корня n -ой степени (для $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$, $n > 1$, $m > 1$)

$$1^\circ \quad \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}, \quad \text{где } a \geq 0, b \geq 0$$

$$2^\circ \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \quad \text{где } a \geq 0, b > 0$$

$$3^\circ \quad \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}, \quad \text{где } a \geq 0$$

$$4^\circ \quad \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}, \quad \text{где } a \geq 0$$

Понятие степени с рациональным показателем

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \quad \text{где } a \geq 0, n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}$$

Примеры

a^p

$$1) \quad 5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$$

$$2) \quad 12^{1,4} = 12^{\frac{7}{5}} = \sqrt[5]{12^7}$$

$$3) \quad \left(\frac{4}{9}\right)^{-2\frac{2}{5}} = \left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{12}{5}} = \sqrt[5]{\left(\frac{4}{9}\right)^{-12}} = \sqrt[5]{\left(\frac{9}{4}\right)^{12}}$$

Представьте степень с дробным показателем в виде корня:

1. $2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2}$

2. $3^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$

3. $-8^{1,5} =$ **не имеет**

4. $5a^{\frac{1}{2}} =$ **смысла** $5\sqrt{a}$

5. $(x - y)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(x - y)^2}$



$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

1. $\sqrt{7} = 7^{\frac{1}{2}}$

2. $\sqrt[9]{a^4} = a^{\frac{4}{9}}$

3. $\frac{3}{\sqrt{2}} = 3 \cdot 2^{-\frac{1}{2}}$

4. $b\sqrt{b} = b \cdot b^{\frac{1}{2}} = b^{1,5}$

5. $\sqrt{(x+y)^3} = (x+y)^{\frac{3}{2}} = (x+y)^{1,5}$

**Представь
те в виде
степени с
дробным
показателе
м:**

$$a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{km}{kn}} = \sqrt[nk]{a^{mk}}$$

где $a \geq 0$, $n, k \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$

$$2^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{4}{6}} = 2^{\frac{10}{15}}$$

Свойства степени с рациональным показателем (для $p \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}$)

$$1^\circ a^0 = 1, \text{ где } a \neq 0$$

$$2^\circ a^1 = a$$

$$3^\circ a^{-1} = \frac{1}{a}, \text{ где } a \neq 0$$

$$4^\circ a^{-p} = \frac{1}{a^p}, \text{ где } a \neq 0$$

$$5^\circ a^p \cdot a^q = a^{p+q}$$

$$6^\circ \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}, \text{ где } a \neq 0$$

$$7^\circ (a^p)^q = a^{pq}$$

$$8^\circ a^p \cdot b^p = (ab)^p$$

$$9^\circ \frac{a^p}{b^p} = \left(\frac{a}{b}\right)^p, \text{ где } b \neq 0$$

$$10^\circ \left(\frac{a}{b}\right)^{-p} = \left(\frac{b}{a}\right)^p, \text{ где } a \neq 0, b \neq 0$$

Найдите значение числового
выражения

$$8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$$

$$81^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{81^3} = (\sqrt[4]{81})^3 = (\sqrt[4]{3^4})^3 = 3 \text{ или}$$

$$8^{\frac{1}{3}} = (2^3)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3} \cdot 3} = 2$$

$$81^{\frac{3}{4}} = (3^4)^{\frac{1}{4}} = 3^{4 \cdot \frac{1}{4}} = 3$$

Найдите значение числового
выражения (самостоятельно)

$$1) 243^{0,4}$$

$$2) \left(\frac{64^4}{3^8} \right)^{-\frac{1}{8}}$$

$$3) 16^{\frac{5}{4}}$$

***Если вы хотите научиться
плавать, то смело входите в воду, а
если хотите научиться решать
задачи, то решайте их***

(Д. Пойа)

СПАСИБО ЗА УРОК !