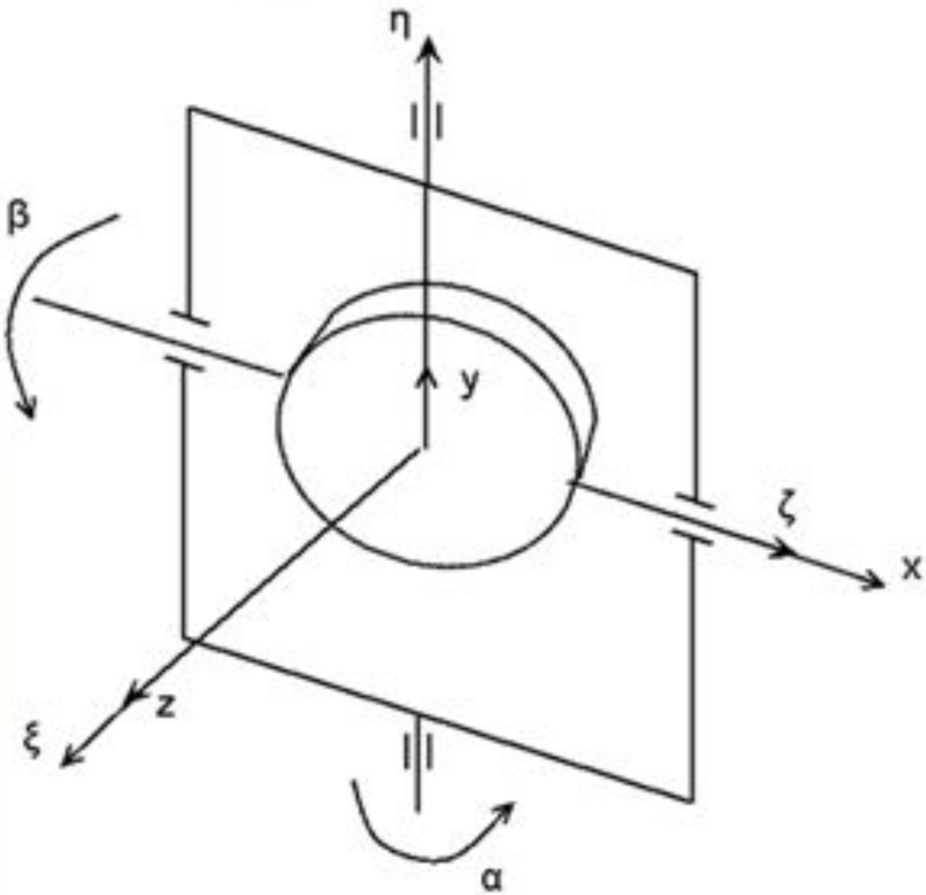
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Э.БАУМАНА

ВЫСОКОТОЧНЫЕ СИСТЕМЫ НАВИГАЦИИ

Лекция №3.1

Анализ уравнений движения трехстепенного гироскопа. Структурная схема. Передаточные функции. Движение гироскопа под действием постоянных моментов внешних сил. Квазиупругая жесткость.

Движение трехстепенного гироскопа под действием моментов внешних сил



$$\begin{cases} J_x\dot{\omega}_x + H\omega_y = M_x \\ J_y\dot{\omega}_y - H\omega_x\cos\beta = M_\eta \end{cases}$$

$$\omega_x = \dot{\beta}, \quad \omega_y = \dot{\alpha}\cos\beta$$

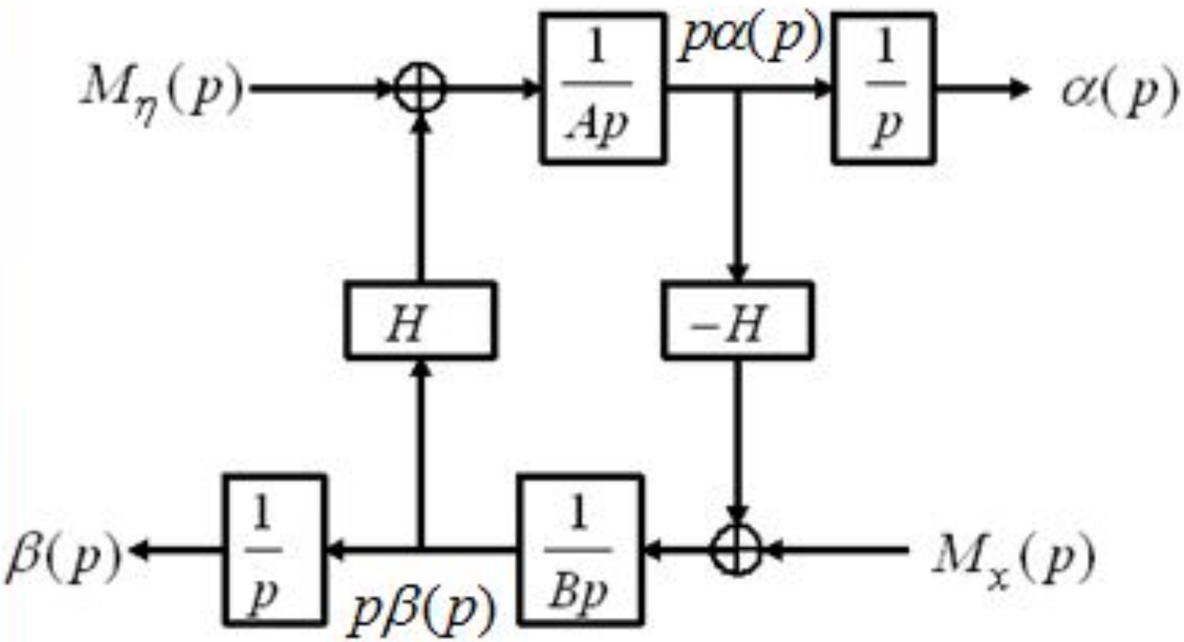
$$\begin{cases} J_x\ddot{\beta} + H\dot{\alpha}\cos\beta = M_x \\ J_\eta\ddot{\alpha} - H\dot{\beta}\cos\beta = M_\eta \end{cases}$$

$$J_\eta = A, \quad J_x = B$$

$$\begin{cases} B\ddot{\beta} + H_0\dot{\alpha} = M_x \\ A\ddot{\alpha} - H_0\dot{\beta} = M_\eta \end{cases}$$

$H_0 = H\cos\beta_0;$ $\quad H_0 \approx H$

Структурная схема трехстепенного гироскопа

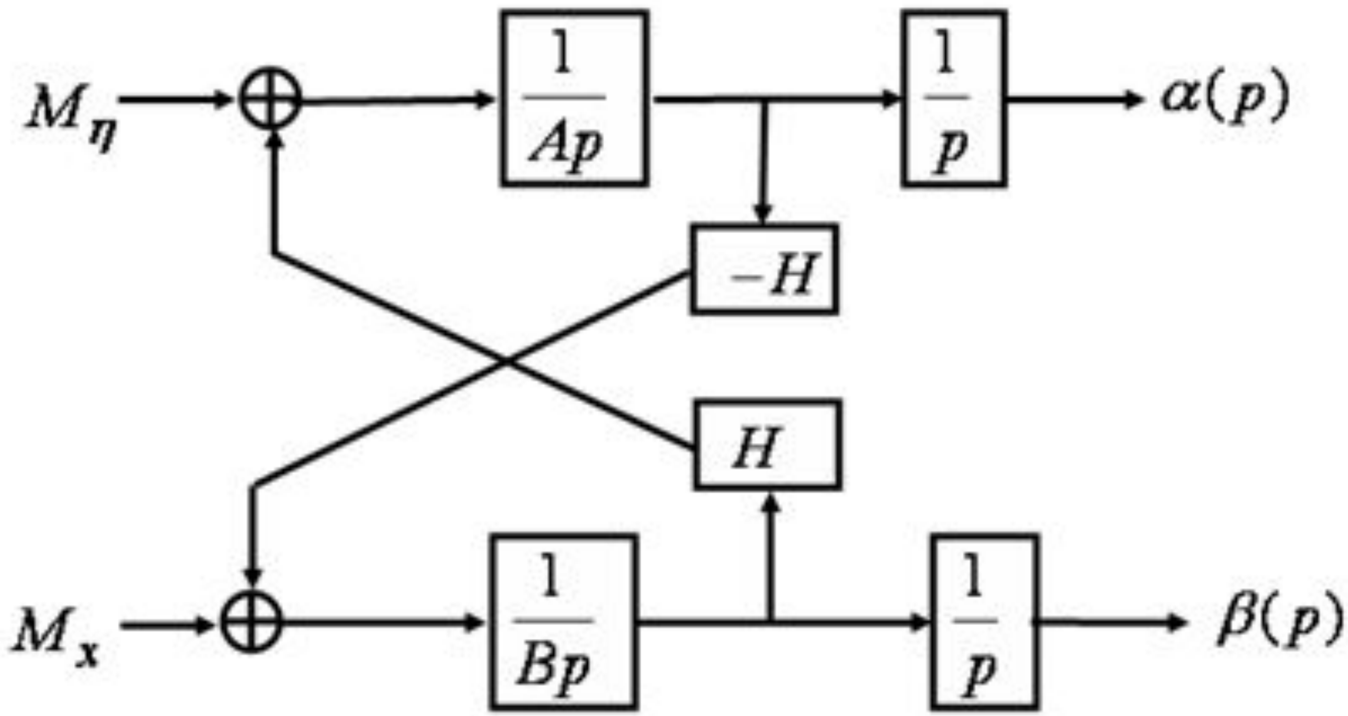


$$\begin{cases} A\ddot{\alpha} - H\dot{\beta} = M_\eta \\ B\ddot{\beta} + H\dot{\alpha} = M_x \end{cases}$$

Два канала, два входа

$$\begin{cases} Ap^2\alpha(p) - Hp\beta(p) = M_\eta(p) \\ Bp^2\beta(p) + Hp\alpha(p) = M_x(p) \end{cases}$$

$$\begin{cases} Ap^2\alpha(p) = Hp\beta(p) + M_\eta(p) \\ Bp^2\beta(p) = -Hp\alpha(p) + M_x(p) \end{cases}$$



$$\begin{bmatrix} Ap^2 & -Hp \\ Hp & Bp^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha(p) \\ \beta(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_\eta(p) \\ M_x(p) \end{bmatrix}$$

Определитель системы: $\Delta = ABp^4 + H^2 p^2$

Решение уравнения:

$$\begin{bmatrix} \alpha(p) \\ \beta(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ap^2 & -Hp \\ Hp & Bp^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} M_\eta(p) \\ M_x(p) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha(p) \\ \beta(p) \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} Bp^2 & Hp \\ -Hp & Ap^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_\eta(p) \\ M_x(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_\eta^\alpha(p) & W_x^\alpha(p) \\ W_\eta^\beta(p) & W_x^\beta(p) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_\eta(p) \\ M_x(p) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \mathbf{A}^*$$, где $$\mathbf{A}^* = \mathbf{A}_{ij}^T$$

$$W_\eta^\alpha(p) = \frac{\alpha(p)}{M_\eta(p)} = \frac{Bp^2}{\Delta(p)} = \frac{B}{ABp^2 + H^2} = \frac{1/A}{p^2 + \omega_H^2}$$

$\omega_H = \dfrac{H}{\sqrt{AB}}$ – Частота недемпфированных нутационных колебаний

$$W_x^{\alpha} = \frac{\alpha(p)}{M_x(p)} = \frac{Hp}{\Delta(p)} = \frac{H/AB}{p(p^2+\omega_H^2)}$$

$$W_\eta^{\beta}(p) = \frac{\beta(p)}{M_\eta(p)} = \frac{-Hp}{\Delta(p)} = \frac{-H/AB}{p(p^2+\omega_H^2)}$$

$$W_x^{\beta}(p) = \frac{\beta(p)}{M_x(p)} = \frac{Ap^2}{\Delta(p)} = \frac{1/B}{p^2+\omega_H^2}$$

$$\alpha(p) = W_\eta^{\alpha}(p)M_\eta(p) + W_x^{\alpha}(p)M_x(p)$$

$$\alpha(p) = \frac{1}{A(p^2+\omega_H^2)}M_\eta(p) + \frac{H}{AB}\cdot\frac{1}{p(p^2+\omega_H^2)}M_x(p)$$

$$\beta(p) = W_\eta^{\beta}(p)M_\eta(p) + W_x^{\beta}(p)M_x(p)$$

$$\beta(p) = \frac{1}{B(p^2+\omega_H^2)}M_x(p) - \frac{H}{AB}\cdot\frac{1}{p(p^2+\omega_H^2)}M_\eta(p)$$

Движение трехстепенного гироскопа под действием постоянного момента внешних сил.

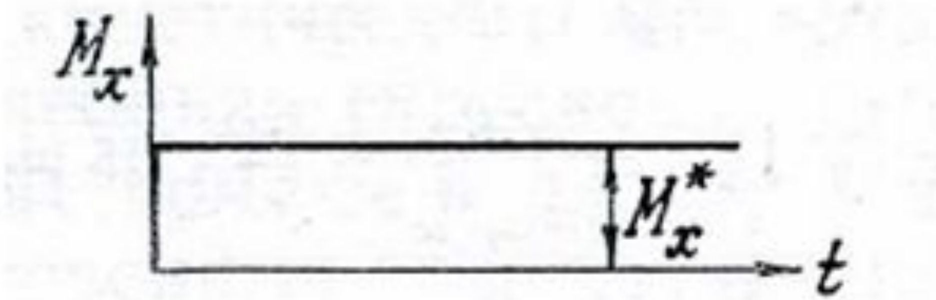
а) Момент действует относительно оси внутренней рамки:

$$M_x(t) = const$$

Представим момент $M_x(t)$ в виде ступенчатой функции

$$M_x(t) = M_x^* \cdot 1(t),$$

где M_x^* – величина момента, 1(t) – единичная ступенчатая функция



Изображение этого момента имеет вид: $M_x(p) = \dfrac{M_x^*}{p}$

Решения будут иметь вид:

$$\alpha(p) = \frac{H}{AB} \cdot \frac{1}{p(p^2 + \omega_H^2)} \cdot \frac{M_x^*}{p} = \frac{H}{AB} \cdot \frac{1}{p^2(p^2 + \omega_H^2)} M_x^*$$

$$\beta(p) = \frac{1}{B(p^2 + \omega_H^2)} \frac{M_x^*}{p} = \frac{1}{Bp(p^2 + \omega_H^2)} M_x^*$$

Найдем оригиналы.

Для $\beta(p)$:

$$\beta(p)=\frac{1}{B(p^2+\omega_H^2)}\frac{M_x^*}{p}=\frac{1}{Bp(p^2+\omega_H^2)}M_x^*$$

Найдем оригиналы. Для этого сделаем следующие преобразования:

$$\frac{1}{p(p^2+\omega_H^2)}=\frac{C_1}{p}+\frac{C_2 p+C_3}{p^2+\omega_H^2}$$

Привести к общему знаменателю и приравнять коэффициенты при одинаковых степенях *p*:

$$C_1=\frac{1}{\omega_H^2};\ C_2=-\frac{1}{\omega_H^2};\ C_3=0$$

$$\frac{1}{p(p^2+\omega_H^2)}=\frac{1}{\omega_H^2}\left(\frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+\omega_H^2}\right)$$

$$\beta(p)=\frac{M_x^*}{Bp(p^2+\omega_H^2)}=\frac{M_x^*}{\omega_H^2}\left(\frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+\omega_H^2}\right)$$

Для $\alpha(p)$:

$$\alpha(p)=\frac{H}{AB}\cdot\frac{1}{p(p^2+\omega_H^2)}\cdot\frac{M_x^*(p)}{p}=\frac{H}{AB}\cdot\frac{1}{p^2(p^2+\omega_H^2)}M_x^*(p)$$

Сделаем следующие преобразования:

$$\frac{1}{p^2(p^2+\omega_H^2)}=\frac{D_1}{p^2}+\frac{D_2}{p}+\frac{D_3p+D_4}{p^2+\omega_H^2}$$

Приведем к общему знаменателю и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях *p*:

$$\frac{1}{p^2(p^2+\omega_H^2)}=\frac{1}{\omega_H^2}\cdot\left(\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p^2+\omega_H^2}\right) \qquad \omega_H=\frac{H}{\sqrt{AB}}$$

$$\alpha(p)=\frac{H}{AB}\cdot\frac{1}{\omega_H^2}\cdot\left(\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p^2+\omega_H^2}\right)M_x^*(p)=\frac{M_x^*(p)}{H}\left(\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p^2+\omega_H^2}\right)$$

$$\frac{1}{p^2} \doteq t; \quad \frac{1}{p^2+\omega_H^2} \doteq \frac{1}{\omega_H}\sin\omega_H t; \qquad \frac{1}{p} \doteq 1; \quad \frac{p}{p^2+\omega_H^2} \doteq \cos\omega_H t$$

$$\alpha(p) = \frac{H}{AB}\cdot\frac{1}{\omega_H^2}\cdot\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2+\omega_H^2}\right) M_x^*(p) = \frac{M_x^*(p)}{H}\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2+\omega_H^2}\right)$$

$$\beta(p) = \frac{M_x^*(p)}{Bp(p^2+\omega_H^2)} = \frac{M_x^*(p)}{\omega_H^2}\left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+\omega_H^2}\right)$$

$$\alpha(t) = \frac{M_x^*}{H}\left(t - \frac{1}{\omega_H}\sin\omega_H t\right);$$

$$\beta(t) = \frac{AM_x^*}{H^2}(1-\cos\omega_H t); \qquad \omega_H = \frac{H}{\sqrt{AB}}$$

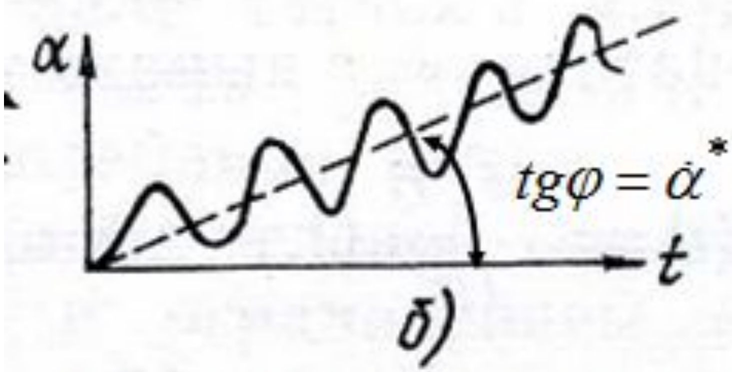
$$\alpha(t)=\frac{M_x^*}{H}\left(t-\frac{1}{\omega_H}\sin\omega_H t\right);$$

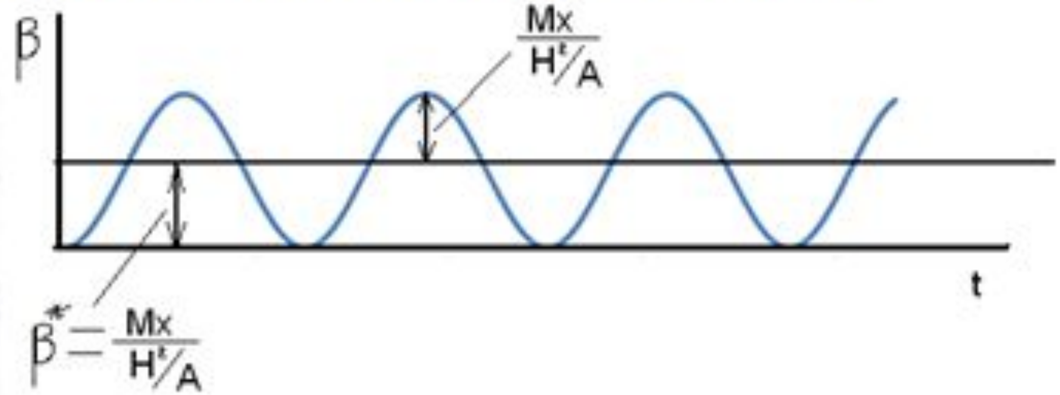
Есть составляющая, пропорциональная t – это прецессионное движение с наложенными нутационными колебаниями

$$\beta(t)=\underbrace{\frac{AM_x^*}{H^2}}-\frac{AM_x^*}{H^2}\cos\omega_H t;$$

нутационные колебания относительно смещенного положения

нутационный бросок (направлен по оси действующего момента)



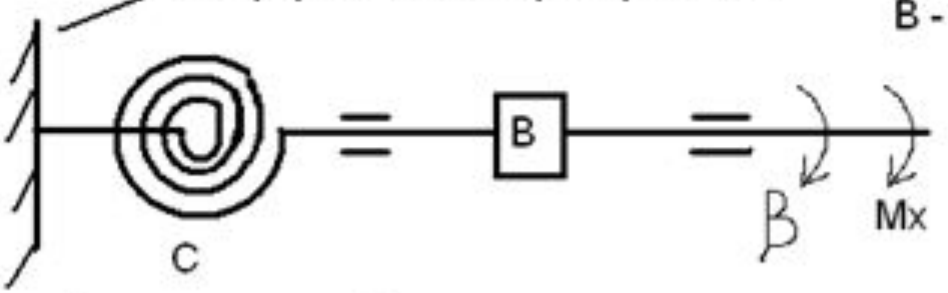


При действии постоянного момента относительно оси внутренней рамки гироскоп прецессирует с постоянной угловой скоростью

$$\dot{\alpha}=\frac{M_x^*}{H};$$

и это прецессионное движение создается нутационными колебаниями.

Механическая аналогия динамических свойств гироскопа (трехстепенного) относительно оси x при действии возмущающего момента относительно той же оси x.



Для пружины:

$$M = C\beta;$$

$$J\ddot{\beta} + C\beta = 0$$

$$\ddot{\beta} + \frac{C}{J}\beta = 0$$

$$\beta(t) = \frac{AM_x^*}{H^2}\left(1 - \cos\omega_H t\right);$$

Если ввести демпфирование, то колебания будут затухающими. Тогда:

$$\beta^*(t) = \frac{AM_x^*}{H^2};\qquad M_x^* = \frac{H^2}{A}\beta^*(t);$$

(квазиупругие свойства гироскопа)
C – квазиупругий коэффициент

Движение гироскопа по оси приложения момента аналогично поведению негироскопического тела, связанного некоторой пружиной с жесткостью C с инерциальным подвесом.

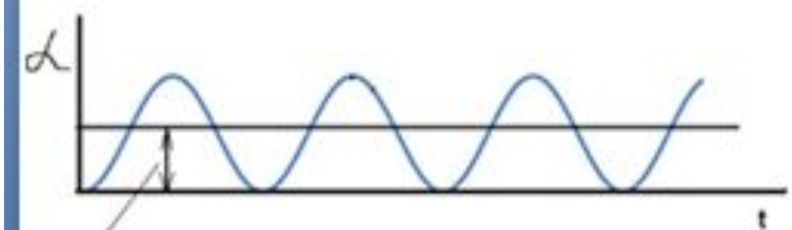
Момент действует относительно оси наружной рамки:

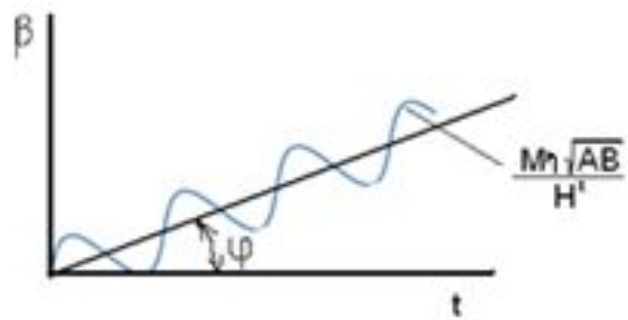
$$M_\eta = M_\eta^* = const; \qquad M_\eta(t) = M_\eta^* \cdot 1[t]; \qquad M_\eta(p) = M_\eta^* \cdot \frac{1}{p}$$

$$\alpha(p) = W_\eta^\alpha M_\eta(p) = \frac{\frac{1}{A}}{p^2 + \omega_H^2} \cdot \frac{M_\eta^*}{p}; \qquad \alpha(t) = \frac{M_\eta^*}{H^2 / B}(1 - \cos \omega_H t)$$

$$\beta(p) = W_\eta^\beta(p) M_\eta(p) = \frac{\frac{H}{AB} M_\eta^*}{p^2 (p^2 + \omega_H^2)}; \qquad \beta(t) = -\frac{M_\eta^*}{H}(t - \frac{1}{\omega_H} \sin \omega_H t)$$

$$\omega_H = \frac{H}{\sqrt{AB}}$$





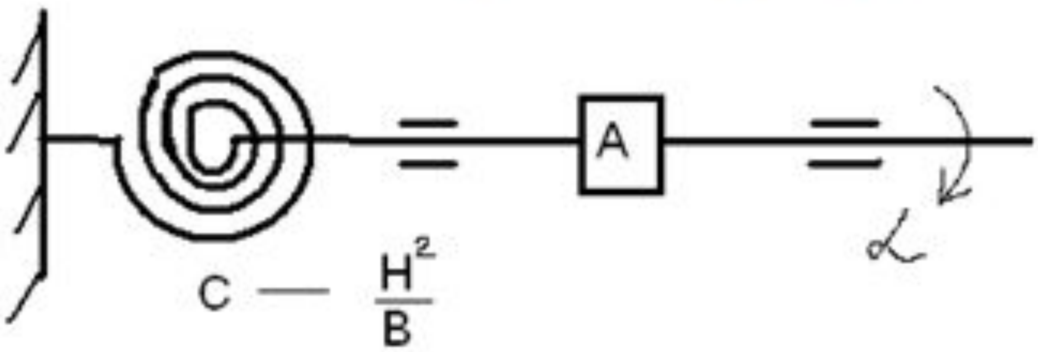
$$\frac{M_\eta \sqrt{AB}}{H^2}$$

$$\alpha^* = \frac{M_\eta^*}{H^2 / B} \qquad tg\varphi = \dot{\beta}^* = \frac{M_\eta^*}{H}$$

Механическая аналогия динамических свойств 3-х степенного гироскопа относительно оси наружной рамки при действии возмущающего момента относительно той же оси наружной рамки.

$$J\ddot{\alpha} + C\alpha = 0$$

$$\ddot{\alpha} + \frac{C}{J}\alpha = 0$$



$$\alpha(t) = \frac{M_\eta^*}{H^2 / B}(1 - \cos\omega_H t)$$

$$M = C\alpha;$$

$$\alpha^* = \frac{M_\eta^*}{C} = \frac{M_\eta^*}{H^2 / B}; \quad C = \frac{H^2}{B}; \quad \omega = \sqrt{\frac{C}{J}} = \sqrt{\frac{H^2}{AB}} = \frac{H}{\sqrt{AB}} = \omega_H$$

Итог: под действием постоянного момента, действующего относительно оси наружной или внутренней рамки, происходит прецессия гироскопа

относительно перпендикулярной оси с угловой скоростью $\omega = \frac{M}{H}$,

сопровождающаяся нутационными колебаниями относительно обеих осей.
При этом вокруг той оси, относительно которой действует возмущающий момент, гироскоп поворачивается на угол, прямо пропорциональный величине возмущающего момента и обратно пропорциональный квазиупругой жесткости гироскопа С.