

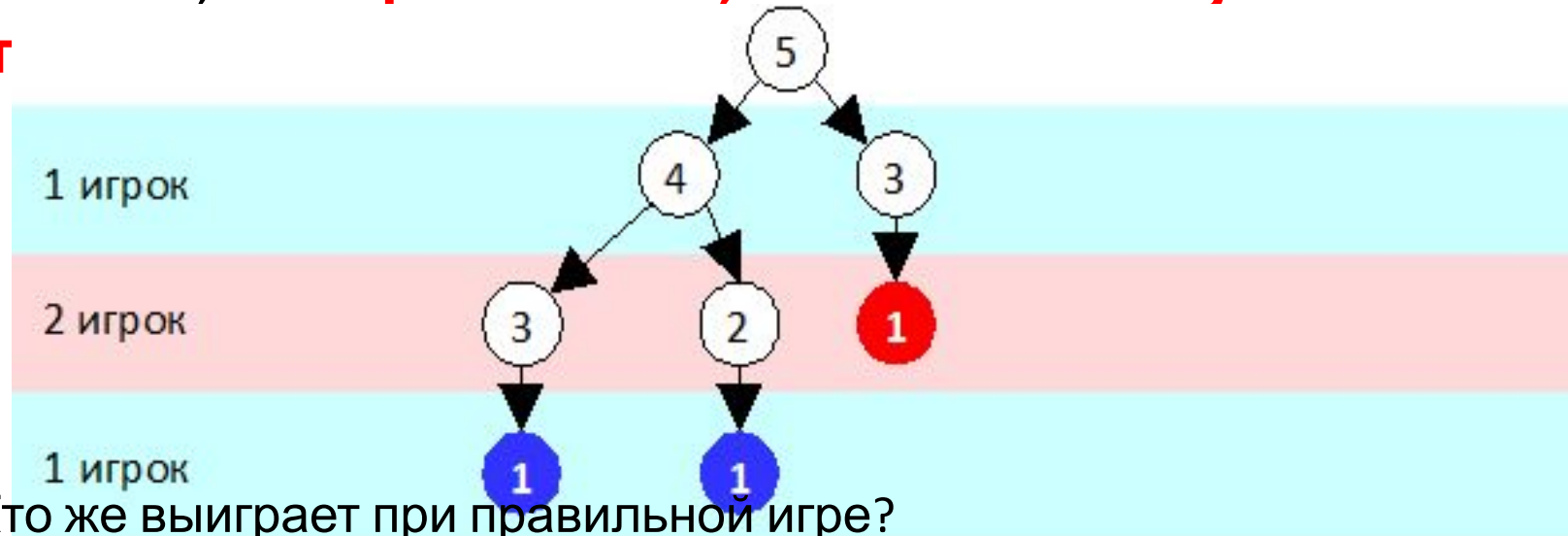
**С3 (высокий уровень,
время – 30 мин)**

Тема: Дерево игры. Поиск
выигрышной стратегии.

Пример:

сначала в кучке лежит 5 спичек; два игрока убирают спички по очереди, причем за 1 ход можно убрать 1 или 2 спички; **выигрывает тот, кто оставит в кучке 1**

сг



Кто же выиграет при правильной игре?

Для этого нужно ответить на вопросы:

1) «Может ли первый игрок выиграть, независимо от действий

второго?» Проанализируем эту схему: если первый игрок своим первым ходом взял две спички, то второй сразу выигрывает, если же он взял одну спичку, то своим вторым ходом он может выиграть, независимо от хода второго игрока.

ответ на первый вопрос – «да»; действительно, убрав всего одну спичку первым ходом, первый игрок всегда может выиграть на следующем ходу, достаточно первым ходом убрать всего одну

Все позиции в простых играх делятся на выигрышные и проигрышные

выигрышная позиция – это такая позиция, в которой игрок, делающий первый ход, может гарантированно выиграть при любой игре соперника, если не сделает ошибку; при этом говорят, что у него есть выигрышная стратегия – алгоритм выбора очередного хода, позволяющий ему выиграть; если игрок начинает играть в **проигрышной** позиции, он обязательно проиграет, если ошибку не сделает его соперник; в этом случае говорят, что у него нет выигрышной стратегии;

таким образом, общая стратегия игры состоит в том, чтобы своим ходом создать проигрышную позицию для соперника

выигрышные и проигрышные позиции можно охарактеризовать так:

- позиция, из которой все возможные ходы ведут в выигрышные позиции – **проигрышная**;
- позиция, из которой хотя бы один из возможных ходов ведет в проигрышную позицию - **выигрышная**, при этом стратегия игрока состоит в том, чтобы перевести игру в эту проигрышную (для соперника) позицию.

Пример 1

Вопрос 1а. Последним ходом может быть «+1» или «*2».

Выиграть последним ходом «+1» можно, если $S = 21$.

Ходом «*2» можно выиграть из любой позиции при $S > 10$ (сюда входит и 21!).

Можно составить таблицу, в которой « V_1 » обозначает выигрыш за один ход:

S	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
											V_1	V_1	V_1	V_1	V_1	V_1	V_1	V_1	V_1	V_1	V_1

Поэтому ответ должен быть такой:

«Петя может выиграть за один ход при любом $S > 10$. Он должен увеличить вдвое число камней, при этом в куче всегда получится не менее 22 камней.»

б) Укажите такое значение S , при котором Петя не может выиграть за один ход, но при любом ходе Пети Ваня может выиграть своим первым ходом. Опишите выигрышную стратегию Вани.

Ответ должен быть такой:

*«При $S = 10$ Петя не может выиграть в один ход, потому что при его ходе «+1» число камней в куче становится равно 11 (меньше 22), а при ходе «*2» число камней в куче становится равно 20 (также меньше 22). Других возможных ходов у Пети нет. Из любой позиции после одного хода Пети (это может быть 11 или 20), Ваня может выиграть своим первым ходом, удвоив количество камней в куче.»*

2. Укажите два таких значения S , при которых у Пети есть выигрышная стратегия, причём

– Петя не может выиграть за один ход, и

– Петя может выиграть своим вторым ходом, независимо от того, как будет ходить Ваня.

Для каждого указанного значения S опишите выигрышную стратегию Пети.

Поэтому ответ должен быть такой:

«Из позиций $S = 9$ и $S = 5$ Петя не может выиграть в один ход, но Петя может выиграть своим вторым ходом, независимо от того, как будет ходить Ваня.

При $S = 9$ ходом «+1» Пете нужно перевести игру в позицию $S = 10$, которая является проигрышной (см. ответ на вопрос 1б).

При $S = 5$ Петя переводит игру в ту же позицию ходом «*2».»

3. Укажите значение S , при котором:

- у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети, и
- у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

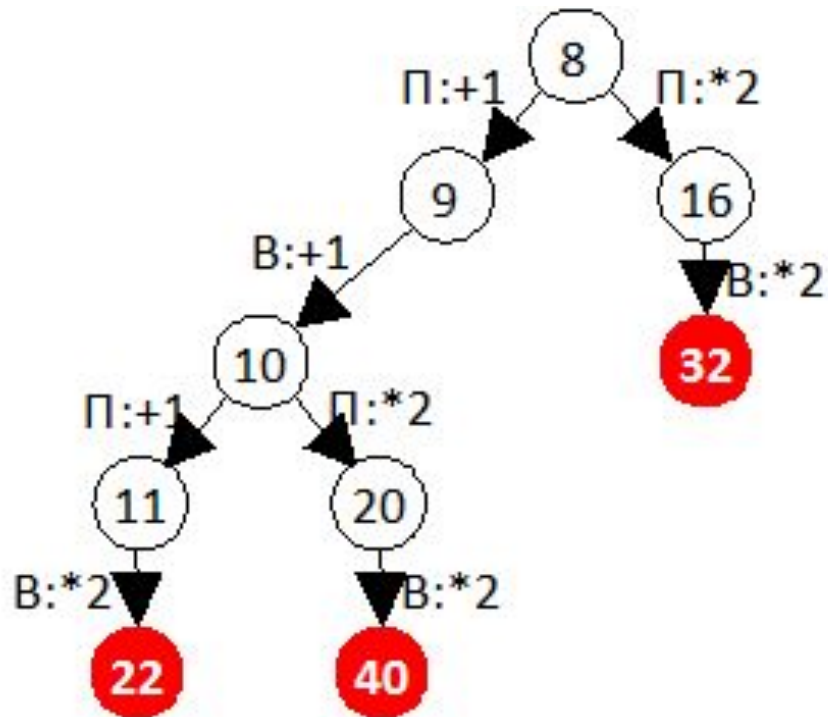
Поэтому ответ должен быть такой:

« В позиции $S = 8$ у Вани есть выигрышная стратегия, которая позволяет ему выиграть первым или вторым ходом. Если Петя выбирает ход «+1», в куче становится 9 камней и Ваня выигрывает на 2-м ходу (см. ответ на вопрос 2). Если Петя выбирает ход «*2», Ваня выигрывает первым ходом, удвоив число камней в куче.»

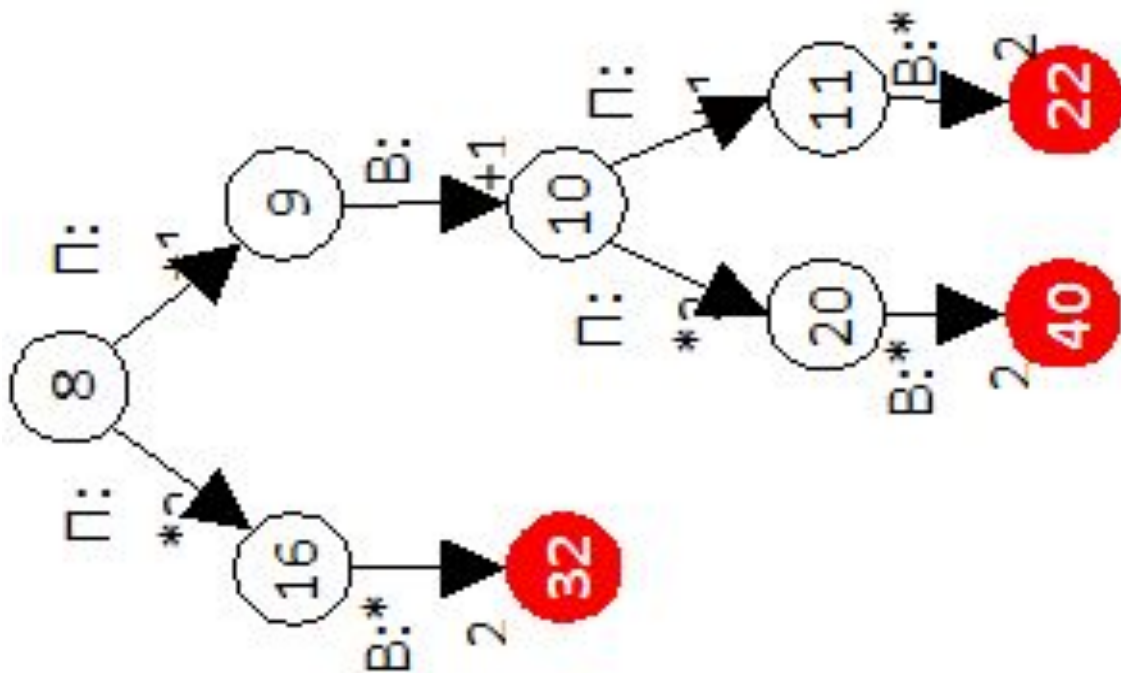
Остается нарисовать дерево возможных вариантов игры из позиции $S = 8$.

Для этого используем построенную таблицу:

Здесь красным цветом выделены позиции, в которых игра заканчивается.



Построенное дерево можно записать и в другой форме, например, «положив его на бок»



Ещё один вариант – представить дерево в виде таблицы:

Начальная позиция	1-й ход Пети (все варианты)	1-й ход Вани (ход по стратегии)	2-й ход Пети (все варианты)	2-й ход Вани (ход по стратегии)
8	9	10	11	22 (выигрыш)
			20	40 (выигрыш)
	16	32 (выигрыш)		