Тема 14.
Модальный метод синтеза непрерывных систем

Юркевич В.Д.

Обсуждаемые вопросы

1. ***Связь модального метода синтеза с корневым методом анализа показателей качества переходных процессов***
2. ***Задача стабилизации состояния равновесия системы***
3. ***Основное расчетное соотношение модального метода синтеза***
4. ***Условие управляемости системы***
5. ***Задача стабилизации выхода объекта управления***

Корневой метод анализа показателей качества переходных процессов

$$u(t) = 1(t) \longrightarrow \boxed{W(p)} \longrightarrow y(t) = h(t)$$

$$W(p) = \frac{B(p)}{A(p)} \quad \Rightarrow$$

Характеристический полином системы:

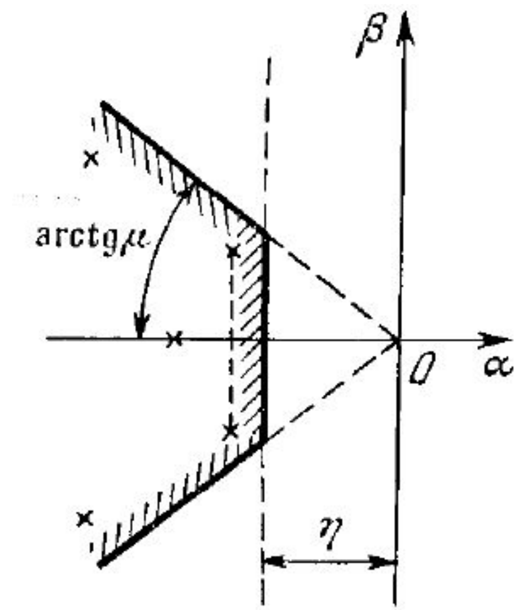
$$A(p) = p^n + a_n p^{n-1} + \cdots + a_2 p + a_1$$

Характеристическое уравнение системы: $A(p) = 0 \;\Rightarrow\; p_1, p_2, \ldots, p_n$

$$p_i = \alpha_i \pm j\beta_i$$

Степень устойчивости: $\eta = \min\limits_i |\alpha_i|$

Колебательность системы: $\mu = \max\limits_i \left| \dfrac{\beta_i}{\alpha_i} \right|$



$$\boxed{t_\Pi \approx \frac{3}{\eta}} \qquad \boxed{\sigma \approx 100 e^{-\pi/\mu} \; [\%]}$$

Суть модального метода синтеза

В модальном методе синтеза используется взаимосвязь между показателями качества переходных процессов в динамической системе и размещением корней характеристического полинома этой системы.

Суть модального метода синтеза состоит в формирование заданного размещения корней характеристического полинома замкнутой системы на основе соответствующего выбора коэффициентов матрицы обратной связи по вектору состояния модели объекта управления.

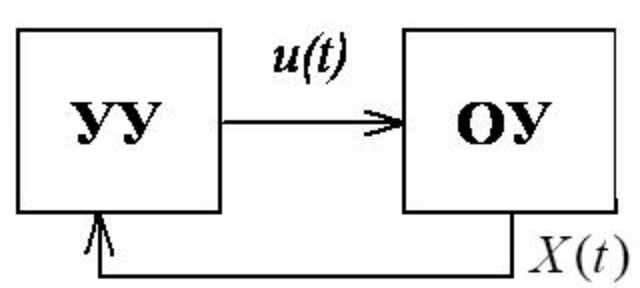
Случай 1. Задача стабилизации состояния равновесия системы

Модель объекта управления $\dot{X} = AX + Bu, \quad X(t=0) = X^0$

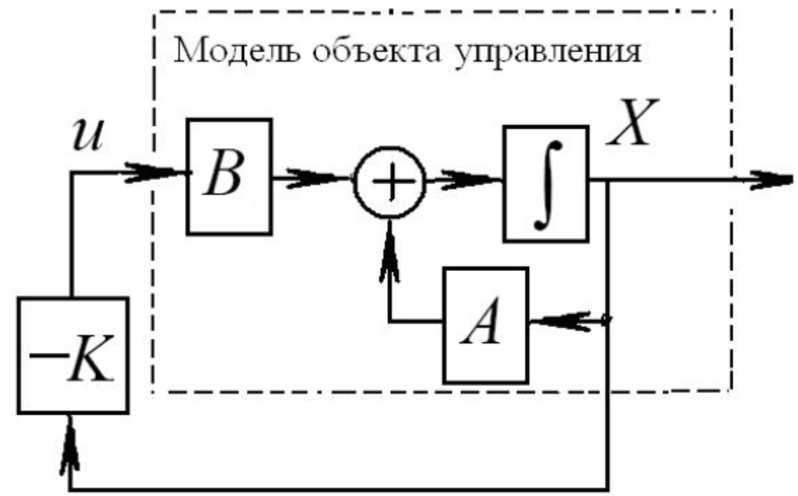
$$X \in R^n,\ u \in R^1,\ A \in R^{n\times n},\ B \in R^{n\times 1}$$

Алгоритм управления

$u = -KX \qquad K \in R^{1\times n}$



$\Rightarrow$



Требуется обеспечить устойчивость состояния равновесия системы и заданные показатели качества переходных процессов путем выбора коэффициентов матрицы обратной связи K, т.е. свойство: $\boxed{\lim_{t\to\infty} X(t) = 0}$

Основное расчетное соотношение модального метода синтеза

Уравнение замкнутой системы:

$$\dot{X} = AX + Bu \qquad u = -KX \qquad \Rightarrow \qquad \dot{X} = (A - BK)X$$

Характеристический полином замкнутой системы

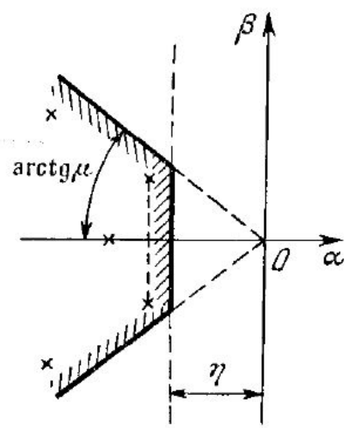
$$A_{зам}(p, K) = \det\left(pI_n - A + BK \right)$$

Желаемый характеристический полином замкнутой системы

Дано: $t_П$ - желаемое время переходного процесса и

σ - желаемое перерегулирование ($\sigma < 100\%$)

$$\Rightarrow \quad \eta \approx 3 / t_П \qquad \mu \approx -\pi / \ln(\sigma / 100)$$



$$A_{зам}^{жел}(p) = (p - p_1^{жел})(p - p_2^{жел})\cdots(p - p_n^{жел})$$

Основное расчетное соотношение для вычисления K

$$\Rightarrow \quad \boxed{A_{зам}(p, K) = A_{зам}^{жел}(p)}$$

Условие управляемости системы

Определение: Линейная система называется полностью управляемой, если для любого произвольного начального состояния и произвольного конечного состояния систем существует конечное управление, которое переводит систему из начального в конечное состояние за ограниченное время

Если система является полностью управляемой, тогда существует матрица *K*, позволяющая обеспечить произвольное размещение корней характеристического полинома на комплексной плоскости

Критерий полной управляемости:

$$\dot{X} = AX + Bu \quad \Rightarrow \quad \boxed{rank\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = n}$$

Юркевич В.Д.

Случай 2. Задача стабилизации выхода объекта управления

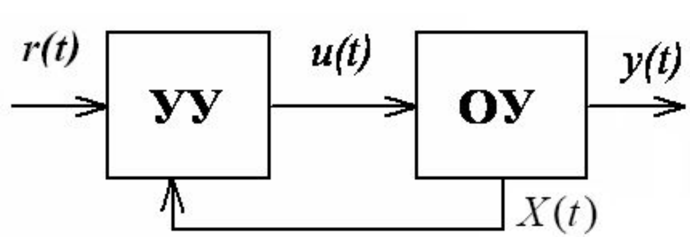
Модель объекта управления $\dot{X} = AX + Bu, \quad X(t=0) = X^0$

$$y = CX$$

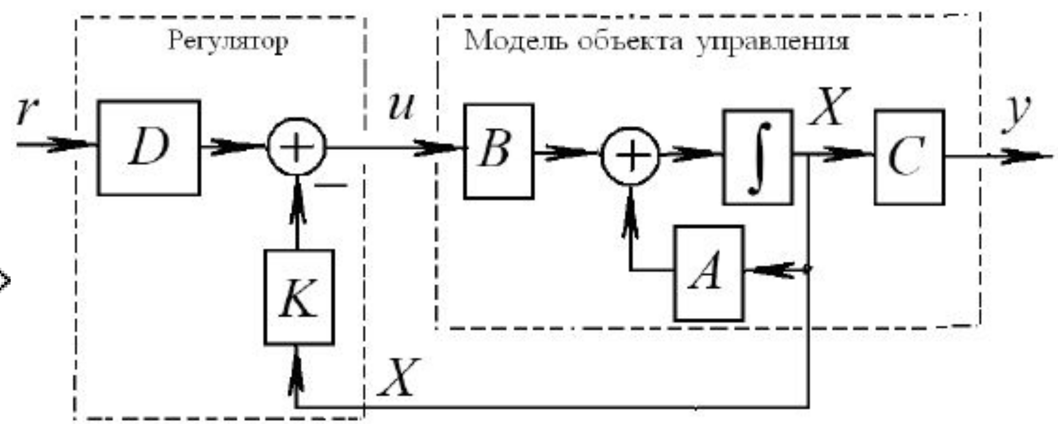
Алгоритм управления $u = -KX + Dr$

$$X \in R^n,\ u \in R^1,\ A \in R^{n\times n},\ B \in R^{n\times 1} \quad K \in R^{1\times n},\ D \in R^1,\ r \in R^1$$

Требуется обеспечить свойство $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = r$ с заданными показателями качества переходных процессов.



$\Longrightarrow$



Юркевич В.Д.

Расчет матрицы K в задаче стабилизации выхода объекта управления

Уравнения замкнутой системы

$$\dot{X} = (A - BK)X + BDr$$

$$y = CX$$

Характеристический полином замкнутой системы

$$A_{зам}(p, K) = \det\left(pI_n - A + BK\right)$$

Желаемый характеристический полином замкнутой системы

$$A_{зам}^{жел}(p) = (p - p_1^{жел})(p - p_2^{жел})\cdots(p - p_n^{жел})$$

Основное расчетное соотношение для вычисления K

$$\boxed{A_{зам}(p, K) = A_{зам}^{жел}(p)}$$

Расчет коэффициента D в задаче стабилизации выхода объекта управления

Пусть замкнутая система является устойчивой.
Рассмотрим равновесный режим для уравнений замкнутой системы, т.е. $\dot{X} = 0$: $\quad 0 = (A - BK)X + BDr$

Из свойства устойчивости замкнутой системы следует, что

$$\det(A - BK) \neq 0$$

Пусть X_0 есть решение для уравнений замкнутой системы в равновесном режиме, где

$$X_0 = -(A - BK)^{-1} BDr \quad \Rightarrow \quad y_0 = -C(A - BK)^{-1} BDr$$

Предположим, что $\quad C(A - BK)^{-1} B \neq 0 \quad \Rightarrow$

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = y_0 = r \quad \Rightarrow \quad -C(A - BK)^{-1} BD = 1 \quad \Rightarrow$$

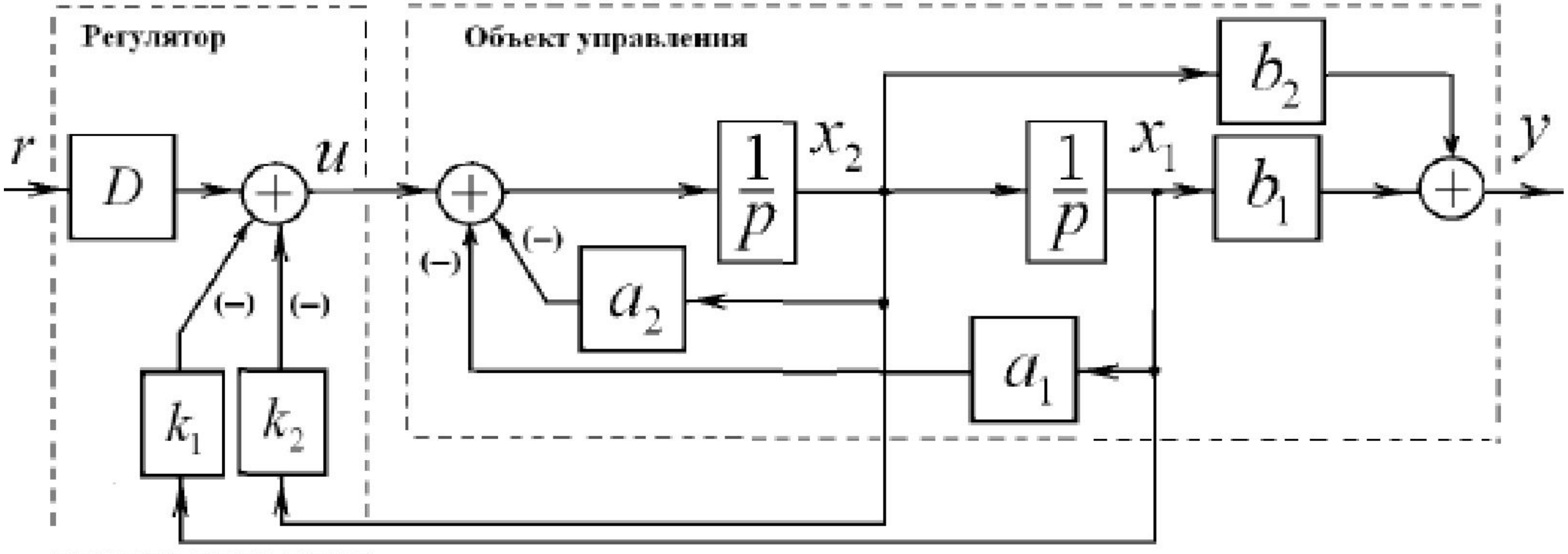
$$D = -1 / \left[C(A - BK)^{-1} B \right]$$

Юркевич В.Д.

Пример

$$W(p) = \frac{b_2 p + b_1}{p^2 + a_2 p + a_1} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -a_1 x_1 - a_2 x_2 + u \\ y &= b_1 x_1 + b_2 x_2 \end{aligned}$$

$$u = -k_1 x_1 - k_2 x_2 + D r$$



Юркевич В.Д.

Уравнения замкнутой системы управления

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -a_1 x_1 - a_2 x_2 - k_1 x_1 - k_2 x_2 + Dr \quad \Rightarrow$$

$$y = b_1 x_1 + b_2 x_2$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -(k_1 + a_1) x_1 - (k_2 + a_2) x_2 + Dr \quad \Rightarrow$$

$$y = b_1 x_1 + b_2 x_2$$

Собственная матрица замкнутой системы

$$A_{зам} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(k_1 + a_1) & -(k_2 + a_2) \end{bmatrix}$$

Характеристический полином замкнутой системы

$$A_{зам}(p,k_1,k_2) = \det(pI_2 - A_{зам}) = \det\begin{bmatrix} p & -1 \\ (a_1+k_1) & (p+a_2+k_2) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A_{зам}(p,k_1,k_2) = p^2 + (a_2+k_2)p + a_1 + k_1$$

Желаемый характеристический полином замкнутой системы

$$A_{зам}^{жел}(p) = (p - p_1^{жел})(p - p_2^{жел}) \qquad \Rightarrow$$

$$A_{зам}^{жел}(p) = p^2 + a_2^{жел}p + a_1^{жел}$$

Основное расчетное соотношение

$$A_{зам}(p, k_1, k_2) = A_{зам}^{жел}(p)$$

$$p^2 + (a_2 + k_2)p + a_1 + k_1 = p^2 + a_2^{жел} p + a_1^{жел}$$

Расчет коэффициентов матрицы $K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}$

$$\begin{matrix} a_1 + k_1 = a_1^{жел} \\ a_2 + k_2 = a_2^{жел} \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} k_1 = a_1^{жел} - a_1 \\ k_2 = a_2^{жел} - a_2 \end{matrix}$$

$\Rightarrow$

Условие равновесия замкнутой системы

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2\\ \dot{x}_2 &= -(a_1+k_1)x_1-(a_2+k_2)x_2+Dr \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix}\dot{x}_1=0\\ \dot{x}_2=0\end{matrix} \quad \Rightarrow\\ y &= b_1x_1+b_2x_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}0 &= x_2\\ 0 &= -a_1^{жел}x_1-a_2^{жел}x_2+Dr \quad \Rightarrow \quad x_1=x_{10}=\frac{D}{a_1^{жел}}r \quad \Rightarrow\\ y &= b_1x_1+b_2x_2\end{aligned}$$

Расчет коэффициента D

$$y_0=\frac{b_1D}{a_1^{жел}}r \quad \Rightarrow \quad y_0=r \quad \Rightarrow \quad \frac{b_1D}{a_1^{жел}}=1 \quad \Rightarrow \quad D=\frac{a_1^{жел}}{b_1}$$

Тема 14.
Фильтр оценки состояния для непрерывных систем (наблюдатель вектора состояния)