МАТЕМАТИКА

СТРОИТЕЛЬСТВО

БАКАЛАВРИАТ

1 семестр

2020

4. ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ

4.1 Функция. Основные понятия и свойства

4.2 Предел функции

4.3 Непрерывность функции

4. ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ

4.2 Предел функции

4.2.1. Предел функции в точке

4.2.2. Односторонние пределы

4.2.3. Конечный предел функции при бесконечно больших значениях аргумента

4.2.4. Бесконечный предел функции в точке

4.2.5. Основные теоремы о пределах

4.2.6. Бесконечно малые функции и их свойства

4.2.7. Бесконечно большие функции и их свойства

4.2.8. Теорема о единственности предела

4.2.9. Теорема о пределе сложной функции

4.2.10. Вычисление пределов

4.2.11. Эквивалентные бесконечно малые функции

4.2.6. БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ФУНКЦИИ И ИХ СВОЙСТВА

Функция ***y = f(x)*** называется ***бесконечно малой функцией*** (б.м.ф.) при $x \to a$, если

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0$$

Замечание.

Никакое, даже очень маленькое, отличное от нуля постоянное число не может быть б.м.ф.

Свойства бесконечно малых функций.

- Функция ***y = f(x)*** имеет в точке $x = a$ конечный предел ***A*** тогда и только тогда, когда эта функция равна сумме числа ***A*** и б. м.ф. ***α(x)*** при $x \to a$

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \iff f(x) = A + \alpha(x)$$

4.2.6. БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ФУНКЦИИ И ИХ СВОЙСТВА

Далее все б.м.ф. рассматриваются при $x \to a$.

- Сумма (разность) конечного числа б.м.ф. есть снова б.м.ф.
- Произведение б.м.ф. на ограниченную функцию в окрестности точки $x = a$ есть б.м.ф.
- Произведение двух б.м.ф. есть снова б.м.ф.
- Произведение б.м.ф. на число есть б.м.ф.
- Частное от деления б.м.ф. на функцию, имеющую отличный от нуля предел, есть б.м.ф.

4.2.7. БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИЕ ФУНКЦИИ И ИХ СВОЙСТВА

Функция ***y = f(x)*** называется ***бесконечно большой функцией*** (б.б. ф.) при $x \to a$ если

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

Замечание.

Никакое, даже очень большое, постоянное число не может быть б.б.ф.

Свойства бесконечно больших функций.

Далее все б.б.ф. рассматриваются при $x \to a$.

- Произведение двух б.б.ф. есть снова б.б.ф.
- Произведение б.б.ф. на функцию, имеющую отличный от нуля предел, есть б.б.ф.
- Сумма б.б.ф. и ограниченной функции в окрестности точки $x = a$ есть б.б.ф.

СВЯЗЬ МЕЖДУ Б.М.Ф. И Б.Б.Ф.

- Если ***f(x)*** - б.б.ф. при $x \to a$, тогда $\dfrac{1}{f(x)}$ - б.м.ф. при $x \to a$.
- Если ***α(x)*** - б.м.ф. при $x \to a$, тогда $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ - б.б.ф. при $x \to a$.

Примеры

$$1)\quad \lim_{x\to\infty} x = \infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0; \qquad 2)\quad \lim_{x\to 0} x = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 0}\frac{1}{x} = \infty.$$

НЕОПРЕДЕЛЁННОСТИ

$$\left\langle \frac{0}{0} \right\rangle \quad \left\langle \frac{\infty}{\infty} \right\rangle \quad \left\langle \infty - \infty \right\rangle \quad \left\langle 0 \cdot \infty \right\rangle \quad \left\langle 1^{\infty} \right\rangle \quad \left\langle 0^{0} \right\rangle \quad \left\langle \infty^{0} \right\rangle$$

4.2.8. ТЕОРЕМА О ЕДИНСТВЕННОСТИ ПРЕДЕЛА

- Если предел функции ***y = f(x)*** при $x \to a$ существует, то он единственный.

Доказательство:

Самостоятельно, от противного, используйте теорему о связи функции, её предела и б.м.ф.

4.2.9. ПРЕДЕЛ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

- Если $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x)=b$, причём $f(x)\neq b$,

  и если $\exists \lim\limits_{y\to b} g(y)=c$ (b и c – конечные),

  тогда $\exists \lim\limits_{x\to a} g(f(x))=c$.

Замечание.

Это свойство позволяет использовать замену переменной при вычислении пределов сложных функций.

Пример

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x+\left(\frac{1}{2}\right)^x}{8^x+\left(\frac{1}{8}\right)^x}=\left\langle\frac{\infty}{\infty}\right\rangle=\left\{\begin{matrix} y=2^x \\ y\to+\infty\end{matrix}\right\}=\lim_{y\to+\infty}\frac{y+\overbrace{\frac{1}{y}}^{0}}{y^3+\underbrace{\frac{1}{y^3}}_{0}}=\lim_{y\to+\infty}\frac{y}{y^3}=\lim_{y\to+\infty}\frac{1}{y^2}=0$$

4.2.10. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ

Вычисление предела: $$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

начинают с подстановки предельного значения x_0 в функцию $f(x)$.

Если при этом получается конечное число, то предел равен этому числу.

Пример

$$\lim_{x \to 1} \frac{3x - 1}{x^2} = \frac{3 \cdot 1 - 1}{1^2} = 2$$

Способы раскрытия неопределённостей

4.2.10. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ

Правило 1.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\left\langle\frac{\infty}{\infty}\right\rangle$$

Разделить числитель и знаменатель дроби на ***x*** в наивысшей степени.

Примеры

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-1}{13+2x+x^2}$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-x-1}{x^2-4x+3}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+7}{4+2x^4+x^2}$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-3)!(2n+1)!}{(2n)!(n-1)!}$.

4.2.10. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ

Примеры

1) $$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-1}{13+2x+x^2}=\left\langle\frac{\infty}{\infty}\right\rangle=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{3x^2}{x^2}-\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{13}{x^2}+\dfrac{2x}{x^2}+\dfrac{x^2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\overset{\nearrow 0}{\dfrac{1}{x^2}}}{\underset{\searrow 0}{\dfrac{13}{x^2}}+\underset{\searrow 0}{\dfrac{2}{x}}+1}=\frac{3}{1}=3$$

2) $$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-x-1}{x^2-4x+3}=\left\langle\frac{\infty}{\infty}\right\rangle=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{3x^3}{x^3}-\dfrac{x}{x^3}-\dfrac{1}{x^3}}{\dfrac{x^2}{x^3}-\dfrac{4x}{x^3}+\dfrac{3}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\overset{\nearrow 0}{\dfrac{1}{x^2}}-\overset{\nearrow 0}{\dfrac{1}{x^3}}}{\underset{\searrow 0}{\dfrac{1}{x}}-\underset{\searrow 0}{\dfrac{4}{x^2}}+\underset{\searrow 0}{\dfrac{3}{x^3}}}=\frac{3}{0}=\infty$$

3) $$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+7}{4+2x^4+x^2}=\left\langle\frac{\infty}{\infty}\right\rangle=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2x^2}{x^4}+\dfrac{7}{x^4}}{\dfrac{4}{x^4}+\dfrac{2x^4}{x^4}+\dfrac{x^2}{x^4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\overset{\nearrow 0}{\dfrac{2}{x^2}}+\overset{\nearrow 0}{\dfrac{7}{x^4}}}{\underset{\searrow 0}{\dfrac{4}{x^4}}+2+\underset{\searrow 0}{\dfrac{1}{x^2}}}=\frac{0}{2}=0$$

4.2.10. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ

Примеры

4) $$\lim_{n\to\infty}\frac{(n-3)!(2n+1)!}{(2n)!(n-1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-3)!(2n)!(2n+1)}{(2n)!(n-3)!(n-2)(n-1)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)}{(n-2)(n-1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n^2-3n+2}=\left\langle\frac{\infty}{\infty}\right\rangle=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{2n}{n^2}+\dfrac{1}{n^2}}{\dfrac{n^2}{n^2}-\dfrac{3n}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\underbrace{\dfrac{2}{n}}_{\to 0}+\underbrace{\dfrac{1}{n^2}}_{\to 0}}{1-\underbrace{\dfrac{3}{n}}_{\to 0}+\underbrace{\dfrac{2}{n^2}}_{\to 0}}=\frac{0}{1}=0$$

4.2.10. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ

Правило 2.

$$\lim_{x \to a} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \left\langle \frac{0}{0} \right\rangle$$

1 способ: разделить числитель и знаменатель дроби на ***(x - α)***.

2 способ: разложить числитель и знаменатель дроби на множители.

Примеры

1) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{3}} \dfrac{3x^2 + 5x - 2}{3x - 1}$;

2) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 + 4x - 5}{x^3 + 2x^2 - x - 2}$.

4.2.10. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ

Примеры

1) $$\lim_{x\to\frac{1}{3}}\frac{3x^2+5x-2}{3x-1}=\left\langle\frac{0}{0}\right\rangle=$$

$$=\lim_{x\to\frac{1}{3}}\frac{(3x-1)(x+2)}{3x-1}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{1}{3}}(x+2)=$$

$$=\frac{1}{3}+2=2\frac{1}{3}$$

$$3x^2+5x-2=0$$

$$D=5^2-4\cdot3\cdot(-2)=49$$

$$x_1=\frac{-5+\sqrt{49}}{2\cdot3}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

$$x_2=\frac{-5-\sqrt{49}}{2\cdot3}=\frac{-12}{6}=-2$$

$$3x^2+5x-2=3\left(x-\frac{1}{3}\right)(x+2)=(3x-1)(x+2)$$

4.2.10. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ

Примеры

$$
\begin{array}{r|l}
-\;x^3+0x^2+4x-5 & x-1 \\
\underline{x^3-x^2\qquad\qquad} & \overline{x^2+x+5} \\
-\;x^2+4x-5 & \\
\underline{x^2-x\qquad} & \\
-\;5x-5 & \\
\underline{5x-5} & \\
0 &
\end{array}
$$

2) $$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+4x-5}{x^3+2x^2-x-2}=\left\langle\frac{0}{0}\right\rangle=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\left(x^2+x+5\right)(x-1)}{\left(x^3+2x^2\right)-(x+2)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\left(x^2+x+5\right)(x-1)}{x^2(x+2)-(x+2)}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(x^2+x+5\right)(x-1)}{\left(x^2-1\right)(x+2)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\left(x^2+x+5\right)(x-1)}{(x-1)(x+1)(x+2)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+5}{(x+1)(x+2)}=\frac{1^2+1+5}{(1+1)(1+2)}=\frac{7}{6}$$

4.2.10. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ

Правило 3.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\left\langle\frac{0}{0}\right\rangle \qquad \lim_{x\to\infty}\big(f(x)-g(x)\big)=\langle\infty-\infty\rangle$$

(функции ***f(x)*** и ***g(x)*** содержат корни)

Умножить числитель и знаменатель дроби на сопряжённое выражение и использовать формулы:

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2; \qquad (a\mp b)\left(a^2\pm ab+b^2\right)=a^3\mp b^3.$$

Примеры

$$1)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{3x}; \qquad 2)\quad \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^3+4}-\sqrt{x^3-2}\right).$$

4.2.10. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ

Примеры

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{3x} = \left\langle \dfrac{0}{0} \right\rangle = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{3x\left(\sqrt{x+1}+1\right)} =$

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{x+1}\right)^2-1^2}{3x\left(\sqrt{x+1}+1\right)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+1-1}{3x\left(\sqrt{x+1}+1\right)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{3x\left(\sqrt{x+1}+1\right)} =$

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{3\left(\sqrt{x+1}+1\right)} = \dfrac{1}{3\left(\sqrt{0+1}+1\right)} = \dfrac{1}{6}$

4.2.10. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ

Примеры

2) $$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^3+4}-\sqrt{x^3-2}\right)=\langle\infty-\infty\rangle=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^3+4}-\sqrt{x^3-2}\right)\left(\sqrt{x^3+4}+\sqrt{x^3-2}\right)}{\left(\sqrt{x^3+4}+\sqrt{x^3-2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x^3+4\right)-\left(x^3-2\right)}{\sqrt{x^3+4}+\sqrt{x^3-2}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+4-x^3+2}{\sqrt{x^3+4}+\sqrt{x^3-2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{6}{\sqrt{x^3+4}+\sqrt{x^3-2}}=\frac{6}{\infty}=0$$

ПЕРВЫЙ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЙ ПРЕДЕЛ

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}$$

Следствия:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{kx}=1$$

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin(\alpha(x))}{\alpha(x)}=1$$

где $\alpha(x)$ – б.м.ф., при $x\to a$

ВТОРОЙ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЙ ПРЕДЕЛ

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

Следствия:

$$\lim_{x\to a}\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)}=e,$$ где $f(x)-$ б.б.ф. при $x\to a$

$$\lim_{x\to a}\left(1+\alpha(x)\right)^{\frac{1}{\alpha(x)}}=e,$$ где $\alpha(x)-$ б.м.ф. при $x\to a$

4.2.10. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ

Правило 4.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\left\langle\frac{0}{0}\right\rangle$$

(функции ***f(x)*** и ***g(x)*** содержат тригонометрические функции)

Применить первый замечательный предел.

Примеры

1) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 2x};$$

2) $$\lim_{x\to 5}\frac{\operatorname{tg}(x-5)}{x^2-25}.$$

4.2.10. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ

Примеры

1) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 2x}=\left\langle\frac{0}{0}\right\rangle=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x\cdot 3x}{\sin 2x\cdot 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\sin 2x}=$$

$$=1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot 3x}{2\cdot\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin 2x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{3}{2}=1\cdot\frac{3}{2}=1,5$$

2) $$\lim_{x\to 5}\frac{\operatorname{tg}(x-5)}{x^2-25}=\left\langle\frac{0}{0}\right\rangle=\lim_{x\to 5}\frac{\sin(x-5)}{\cos(x-5)\cdot(x-5)\cdot(x+5)}=$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{\sin(x-5)}{(x-5)}\cdot\lim_{x\to 5}\frac{1}{\cos(x-5)\cdot(x+5)}=$$

$$=1\cdot\frac{1}{\cos(5-5)\cdot(5+5)}=\frac{1}{\cos 0\cdot 10}=\frac{1}{10}$$

4.2.11. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ФУНКЦИИ

α(x) и ***β(x)*** называются ***эквивалентными*** бесконечно малыми функциями при $x \to a$, если

$$\exists \lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$$

Обозначение: $\alpha(x) \sim \beta(x)\left(\text{при } x \to a\right)$

Таблица основных эквивалентностей (при $x \to 0$)

1) $\sin x \sim x$

2) $\operatorname{tg} x \sim x$

3) $\arcsin x \sim x$

4) $\operatorname{arctg} x \sim x$

5) $1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$

6) $e^x - 1 \sim x$

7) $a^x - 1 \sim x \cdot \ln a$

8) $\ln(1 + x) \sim x$

9) $\log_a(1 + x) \sim \dfrac{x}{\ln a}$

10) $(1 + x)^k - 1 \sim kx$

4.2.11. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ФУНКЦИИ

Свойства эквивалентных б.м.ф.

- Если **α(x) ~ β(x)** и **β(x) ~ γ(x)** при $x \to a$,

  то **α(x) ~ γ(x)** при $x \to a$.

- Предел отношения двух б.м.ф. не изменится, если одну из них (или обе сразу) заменить эквивалентными б.м.ф., т.е.

если **α(x) ~ β(x)** и **λ(x) ~ μ(x)** при $x \to a$, то $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha(x)}{\lambda(x)} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{\beta(x)}{\mu(x)}.$

Примеры

1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 11x}{e^{7x} - 1};$ 2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln\left(1 + \sin 4x\right)}{\arcsin\left(x^2 + 8x\right)}.$

4.2.10. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ

Примеры

1) $$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}11x}{e^{7x}-1}=\left\langle\frac{0}{0}\right\rangle=\left\{\begin{array}{l}\operatorname{tg}11x\sim 11x\quad(11x\to 0)\\ e^{7x}-1\sim 7x\quad(7x\to 0)\end{array}\right\}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{11x}{7x}=\lim_{x\to 0}\frac{11}{7}=\frac{11}{7}$$

2) $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin 4x)}{\arcsin(x^2+8x)}=\left\langle\frac{0}{0}\right\rangle=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\ln(1+\sin 4x)\sim\sin 4x\sim 4x\quad(4x\to 0)\\ \arcsin(x^2+8x)\sim x^2+8x\quad((x^2+8x)\to 0)\end{array}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{4x}{x^2+8x}=\left\langle\frac{0}{0}\right\rangle=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4x}{x(x+8)}=\lim_{x\to 0}\frac{4}{x+8}=\frac{4}{0+8}=0,5$$

ПРОДОЛЖЕНИЕ СЛЕДУЕТ…