

Лекция 12. Формула Тейлора.

Остаточный член в виде

Лагранжа. Разложение

элементарных функций.

Формула Тейлора

Если $f(x)$ - непрерывна в т. x_0 , то справедливо разложение

$$f(x) = f(x_0) + o(1), \text{ при } x \rightarrow x_0,$$

если же $f(x)$ дифференцируема в т. x_0 тогда имеем, что $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$, при $x \rightarrow x_0$.

Оказывается, что если функция несколько раз дифференцируема, то справедлива теорема.

Теорема. О разложении по формуле Тейлора.

Если функция $f(x)$ в т. x_0 и некоторой ее окрестности « n » раз дифференцируема, то она в окрестности т. x_0 представима в виде:

$f(x) = P_n(x) + o((x - x_0)^n)$, $x \rightarrow x_0$, где

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \text{ (многочлен Тейлора).}$$

Доказательство.

Так как функция n раз дифференцируема в т. x_0 , то существуют $f(x_0)$, $f'(x_0)$; $f''(x_0)$... $f^{(n)}(x_0)$.

Рассмотрим многочлен $P_n(x) = a_0 + a_1 \cdot (x - x_0) + a_2 \cdot (x - x_0)^2 + \dots + a_n \cdot (x - x_0)^n$. Подберем коэффициенты этого многочлена так, чтобы:

$$\left. \begin{array}{l} P_n(x_0) = f(x_0) \\ P'_n(x_0) = f'(x_0) \\ \dots \\ P_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) \end{array} \right\} \Rightarrow a_0 = f(x_0); a_1 = \frac{f'(x_0)}{1!}; a_2 = \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}; a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!},$$

так как

$$P'_n(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + \dots + na_n(x - x_0)^{n-1}$$

$$P''_n(x) = 2a_2 + \dots + n(n-1)a_n \cdot (x - x_0)^{n-2}$$

$$P_n^{(n)} = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}_{n!} a_n.$$

Получим: $P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$ - многочлен Тейлора.

Рассмотрим функцию $r_n(x) = f(x) - P_n(x)$. Она такова, что $r_n(x_0) = r'_n(x_0) = \dots = r_n^{(n)}(x_0) = 0$. Применяя правило Лопиталья имеем

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r_0(x)}{(x-x_0)^n} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r'_n(x)}{n(x-x_0)^{n-1}} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \dots =$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r^{(n)}(x)}{n!} \stackrel{\text{def}}{=} 0 \Rightarrow r_n(x) = \underline{o}((x-x_0)^n) - \text{бесконечно-малая более высокого порядка,}$$

чем $(x-x_0)^n$, а значит получена формула $f(x) = P_n(x) + \underline{o}((x-x_0)^n)$ - формула Тейлора.

Функция $r_n(x)$ - остаточный член формулы Тейлора. Если остаточный член $r_n(x) = \underline{o}((x-x_0)^n)$, то такая форма записи остаточного члена называется формой записи Пеано. Если же $\exists f^{(n+1)}(x)$, то $r_n(x)$ можно представить в форме

$$\text{записи Лагранжа } r_n = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1},$$

где θ - некоторое число из окрестности точки x_0 .

Теорема. О наилучшем приближении дифференцируемой функции многочленом.

Если «n» раз дифференцируемая функция в окрестности точки x_0 представлена в виде

$f(x) = P_n(x) + o((x-x_0)^n)$, $x \rightarrow x_0$, то многочлен $P_n(x)$, коэффициенты которого $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$, $k=0, 1, \dots, n$, - многочлен Тейлора.

Многочлен Тейлора является наилучшим из всех других многочленов для приближения функции в окрестности т. x_0 , так как разность $f(x) - P_n(x) = o((x-x_0)^n)$ можно сделать сколь угодно малой.

Если же $x_0=0$, то формула Тейлора преобразуется в формулу Маклорена:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n).$$

многочлен Маклорена

Сделав замену переменных $x-x_0=\theta$ всегда можно перейти от формулы Тейлора к формуле Маклорена и наоборот. А поэтому для разложений на практике пользуются таблицей разложений по формуле Маклорена как более простой.

Таблица разложений:

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^{n+1})$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \dots + o(x^{2n+1})$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + o(x^{n+1})$$

$$\operatorname{arcsin} x = x + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^5 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^7 + \dots + o(x^{2n+1})$$

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n+1) = (2n+1)!!$$

$$2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \dots \cdot 2n = (2n)!!$$

$$\operatorname{arccos} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcsin} x$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + o(x^{2n+1})$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \dots + o(x^n)$$