Омский государственный технический университет

ПОЛИТЕХНИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА - 2017

МАТЕМАТИКА

Омск, 16.04.2017

9 класс, задача № 1

Докажите, что круги, построенные на сторонах выпуклого четырехугольника как на диаметрах, полностью покрывают этот четырехугольник. Справедливо ли это утверждение для треугольника? Для произвольного выпуклого пятиугольника?

Решение Возьмем произвольную точку *P* внутри выпуклого четырехугольника *ABCD* и соединим ее с вершинами четырехугольника.

Тогда

$$\angle APB + \angle BPC + \angle CPD + \angle DPA = 360^{\circ}$$

Из этого равенства следует, что хотя бы один из этих углов больше или равен 90°.

9 класс, задача № 1

Покажем, для определенности, что это $\angle BPC$.

Тогда, если угол $\angle BPC > 90^\circ$, то точка P лежит внутри круга, построенного как на диаметре на стороне BC.

Если $\angle BPC = 90^\circ$, то точка P лежит на границе этого круга, что и требовалось доказать.

Для любого треугольника это утверждение также справедливо. Доказательство такое же, как для 4-угольников.

9 класс, задача № 1

Для пятиугольников это утверждение несправедливо.

Действительно, рассмотрим правильный пятиугольник и возьмем точку *P* центр пятиугольника, соединив точку *P* с вершинами.

Из правильности следует

$$\angle APB = \angle BPC = \ldots = \angle EPA = \alpha$$

Сумма всех этих углов равняется 360°, откуда

$$5\alpha = 360^\circ,\ \alpha = 72^\circ.$$

Таким образом, точка *P* не принадлежит ни одному из кругов, построенному на сторонах как на диаметрах. ■

9 класс, задача № 2

Докажите, что дробь $\dfrac{21n+4}{14n+3}$ несократима ни при каких натуральных значениях n.

Решение

Способ 1.

Предположим, что $21n+4$ и $14n+3$ при некотором n имеют наибольший общий делитель $d \in N$.

$$\begin{cases} 21n+4 = sd \\ 14n+3 = td \end{cases} \Rightarrow (3t-2s)d = 1 \Rightarrow 3t-2s = \frac{1}{d} > 0$$ целое число

$s, t \in N$

$$\Downarrow$$

$$d = 1$$

т.е. ни при каком натуральном n дробь несократима (числитель и знаменатель имеют при $\forall n \in N$ общий наибольший делитель $d = 1$, поэтому они взаимно просты).

9 класс, задача № 2

Докажите, что дробь $\dfrac{21n+4}{14n+3}$ несократима ни при каких натуральных значениях n.

Решение **Способ 2.** Применим алгоритм Евклида

$$\begin{array}{r|l} 21n+4 & \underline{14n+3} \\ \underline{14n+3} & 1 \\ 7n+1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 14n+3 & \underline{7n+1} \\ \underline{14n+2} & 2 \\ 1 & \end{array}$$

Таким образом, остаток от деления всегда есть.

9 класс, задача № 3

Дано высказывание

$A \equiv$ {при каждом $a > 0$ уравнение $x^2 = a$ имеет действительный корень}.

Постройте отрицание данного высказывания $\neg A$ и укажите, какое из них истинно.

Решение

$\neg A \equiv$ {существует (хотя бы одно) $a > 0$, при котором уравнение $x^2 = a$ не имеет действительных корней}.

A истинно, $\neg A$ ложно

9 класс, задача № 4

n параллельных прямых плоскости пересекаются серией из m параллельных прямых. Сколько параллелограммов можно выделить в образовавшейся сетке?

Решение

Параллелограмм определяется двумя парами параллельных прямых, соответственно, из первого и второго семейств.

Пару параллельных прямых первого семейства (без учета порядка) можно выбрать $C_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$ способами.

Пару параллельных прямых второго семейства (без учета порядка) можно выбрать $C_m^2 = \dfrac{m(m-1)}{2}$ способами.

9 класс, задача № 4

$$\boxed{C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}} \qquad \boxed{C_m^2 = \frac{m(m-1)}{2}}$$

Соответственно, на образовавшейся сетке можно выделить

$$\frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{m(m-1)}{2} = \frac{n(n-1)m(m-1)}{4}$$

параллелограммов.

Ответ $\dfrac{n(n-1)m(m-1)}{4}$ параллелограммов

9 класс, задача № 5; 10 класс, задача № 2

Имеются два куска сплава серебра с медью. Один из них содержит $p\%$ меди, другой – $q\%$ меди. В каком отношении нужно брать сплавы от первого и второго кусков, чтобы получить новый сплав, содержащий $r\%$ меди? При каких соотношениях между p, q, r задача возможна и какой максимальный вес нового сплава можно получить, если первый кусок весил P кг, второй - Q кг?

Решение

Пусть отношение весов сплавляемых кусков равно $\dfrac{\alpha}{\beta}$.

$$\Rightarrow \frac{\frac{\alpha p}{100} + \frac{\beta q}{100}}{\alpha + \beta} = \frac{r}{100} \Rightarrow \frac{\frac{\alpha}{\beta} p + q}{\frac{\alpha}{\beta} + 1} = r \Rightarrow \boxed{\frac{\alpha}{\beta} = \frac{q - r}{r - p}}$$

9 класс, задача № 5

$$\boxed{\frac{\alpha}{\beta} = \frac{q - r}{r - p}}$$

Положим для определенности $p > q$

Тогда решение возможно при $\frac{q - r}{r - p} > 0$

$$p > r > q$$

Найдем максимальный вес нового сплава.

Воспользуемся $\boxed{\frac{\alpha}{r - q} = \frac{\beta}{p - r}}$

9 класс, задача № 5

$$\boxed{\frac{\alpha}{r-q}=\frac{\beta}{p-r}}$$

Предположим, что $\alpha = P, \beta = Q$

Тогда возможны 3 случая:

$\dfrac{P}{r-q}=\dfrac{Q}{p-r}$	Чтобы получить сплав, содержащий $r\%$ меди, можно взять весь первый и весь второй кусок целиком, т.е. максимальный вес W нового сплава будет равен $W = P + Q$.
$\dfrac{P}{r-q}<\dfrac{Q}{p-r}$	Чтобы получить сплав, содержащий $r\%$ меди, можно взять весь первый кусок целиком, а от второго куска часть весом β, определяемая из условия $\dfrac{P}{r-q}=\dfrac{\beta}{p-r}$. Откуда $W = P+\beta = \dfrac{p-q}{r-q}\cdot P$.
$\dfrac{P}{r-q}>\dfrac{Q}{p-r}$	Рассуждая, как в случае 2, получим $W = \dfrac{p-q}{p-r}\cdot Q$

9 класс, задача № 6

Решите систему уравнений $\begin{cases} x^4 + x^2y^2 + y^4 = 91 \\ x^2 - xy + y^2 = 7 \end{cases}$

Решение

Возводим второе уравнение в квадрат

$$\left(x^2 - xy + y^2\right)^2 = 7^2$$

$$x^4 + 3x^2y^2 + y^4 - 2x^3y - 2xy^3 = 49$$

Вычтем полученное уравнение из первого уравнения системы и получим

$$2xy(x^2 + y^2 - xy) = 42$$

$$\Downarrow$$

$$x^2 - xy + y^2 = 7 \quad \Rightarrow \quad 14xy = 42 \quad \Rightarrow \quad xy = 3 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{3}{x}$$

9 класс, задача № 6

$$x^2 - xy + y^2 = 7$$

$$y = \frac{3}{x}$$

$$x^4 - 10x^2 + 9 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$x^2_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{2} = 5 \pm 4$$

$$\Downarrow$$

$$x_{1,2} = \pm 3, \ x_{3,4} = \pm 1,$$

$$y_{1,2} = \pm 1, \ y_{3,4} = \pm 3$$

Проверка показывает, что все четыре пары чисел являются решениями заданной системы.

Ответ

$$x_1 = 3, \ y_1 = 1; \ x_2 = -3, \ y_2 = -1; \ x_3 = 1, \ y_3 = 3; \ x_4 = -1, \ y_4 = -3$$

10 класс, задача № 1

Докажите, что круги, построенные на сторонах выпуклого четырехугольника как на диаметрах, полностью покрывают этот четырехугольник. Справедливо ли это утверждение для треугольника? Для каждого ли выпуклого n-угольника ($n \geq 5$) справедливо это утверждение?

Решение Возьмем произвольную точку *P* внутри выпуклого четырехугольника *ABCD* и соединим ее с вершинами четырехугольника.

Тогда

$$\angle APB + \angle BPC + \angle CPD + \angle DPA = 360^{\circ}$$

Из этого равенства следует, что хотя бы один из этих углов больше или равен 90°.

10 класс, задача № 1

Покажем, для определенности, что это $\angle BPC$.

Тогда, если угол $\angle BPC > 90^\circ$, то точка *P* лежит внутри круга, построенного как на диаметре на стороне BC.

Если $\angle BPC = 90^\circ$, то точка *P* лежит на границе этого круга, что и требовалось доказать.

Для любого треугольника это утверждение также справедливо. Доказательство такое же, как для 4-угольников.

10 класс, задача № 1

Для каждого ли выпуклого n-угольника $(n \geq 5)$ справедливо это утверждение?

Нет.

Докажем, что существует пятиугольник, для которого это утверждение несправедливо.

Действительно, рассмотрим правильный пятиугольник и возьмем точку *P* центр пятиугольника, соединив точку *P* с вершинами.

Из правильности следует

$$\angle APB = \angle BPC = \ldots = \angle EPA = \alpha$$

10 класс, задача № 1

$$\angle APB = \angle BPC = \ldots = \angle EPA = \alpha$$

Сумма всех этих углов равняется 360°, откуда

$$5\alpha = 360^\circ,\ \alpha = 72^\circ.$$

Таким образом, точка *P* не принадлежит ни одному из кругов, построенному на сторонах как на диаметрах.

Для n-угольников $(n > 5)$ доказательство такое же, как для пятиугольников. $\blacksquare$

10 класс, задача № 3; 11 класс, задача № 5

Сколько цифр имеет число 2^{100}?

Решение $2^{10} = 1024$, тогда $2^{100} = 1024^{10}$

Поскольку $1000^{10} = 10^{30}$ состоит из единицы с 30 нулями, а

$$2^{100} = 1024^{10} > 1000^{10} = 10^{30},$$

то число 2^{100} содержит цифр $n \geq 31$

С другой стороны,

$$\frac{1024^{10}}{1000^{10}} < \left(\frac{1025}{1000}\right)^{10} = \left(\frac{41}{40}\right)^{10} < \frac{41}{40} \cdot \frac{40}{39} \cdot \frac{39}{38} \cdot \ldots \cdot \frac{33}{32} \cdot \cdot \frac{32}{31} = \frac{41}{31} < 10$$

так как $\frac{41}{40} < \frac{40}{39} < \frac{39}{38} \ldots,$ и т.д. (ибо $\frac{41}{40} < 1 + \frac{1}{40}, \frac{40}{39} < 1 + \frac{1}{39}$, и т.д.)

10 класс, задача № 3

$$2^{100} = 1024^{10} < 10 \cdot 1000^{10} = 10^{31}$$

↓

число 2^{100} содержит цифр $n < 32$

↓

Число 2^{100} имеет $n = 31$ цифру

Ответ 31

Замечание: Задачу можно решить, используя логарифмы. Так как

$$\lg 2 \approx 0{,}30103,$$

то

$$\lg 2^{100} = 100 \lg 2 \approx 100 \cdot 0{,}30103 = 30{,}103\,.$$

Следовательно, число 2^{100} имеет 31 цифру.

10 класс, задача № 4

Определите количество решений системы уравнений

$$\begin{cases}(x-a)^2+y^2=1\\ |x|=|y|\end{cases}$$

в зависимости от параметра a.

Решение Воспользуемся методом геометрических мест точек.

$|x|=|y|$ - две прямые $y=x$ и $y=-x$ (рис. 1)

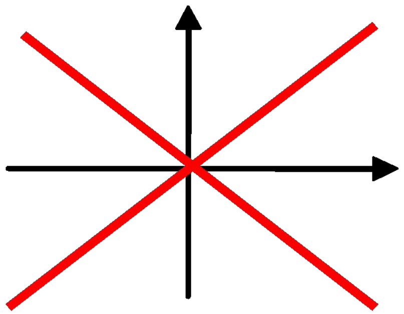


Рис. 1.

$(x-a)^2+y^2=1$ окружность радиуса 1 с центром на оси *Ox* в точке $(a;0)$

10 класс, задача № 4

Всего возможны 5 вариантов взаимного расположения

этих геометрических мест точек:

$\lvert a\rvert < 1, -1 < a < 1$	$\lvert a\rvert = 1,\ a = \pm 1$
Система имеет 4 решения	Система имеет 3 решения

Система имеет 4 решения

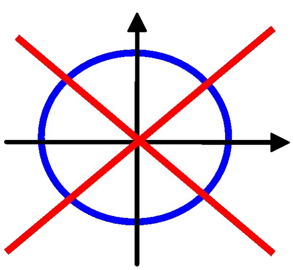


Рис. 2. $a = 0$

Система имеет 3 решения

При $a = 1$ имеем $(x-1)^2 + y^2 = 1,\ x = 0, x = 1.$

При $a = -1$ имеем $(x+1)^2 + y^2 = 1,\ x = 0, x = -1.$

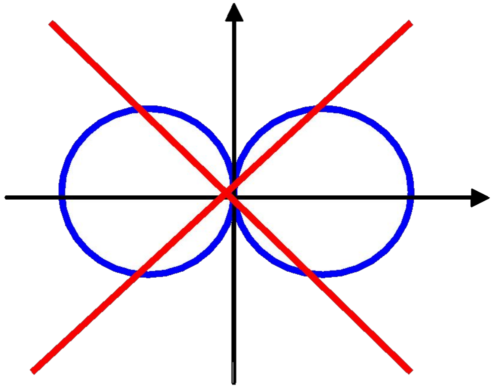


Рис. 3. $a = \pm 1$

10 класс, задача № 4

$1<\|a\|<\sqrt{2}$	$\|a\|=\sqrt{2}$	$\|a\|>\sqrt{2}$
Система имеет 4 решения	Система имеет 2 решения	Система не имеет решений

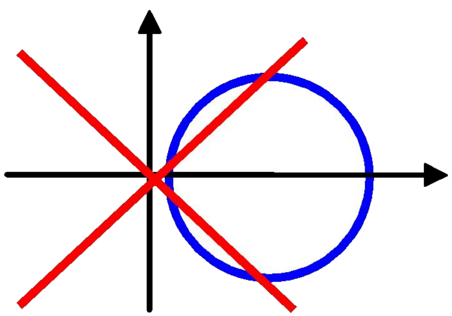


Рис. 4. $1<a<\sqrt{2}$

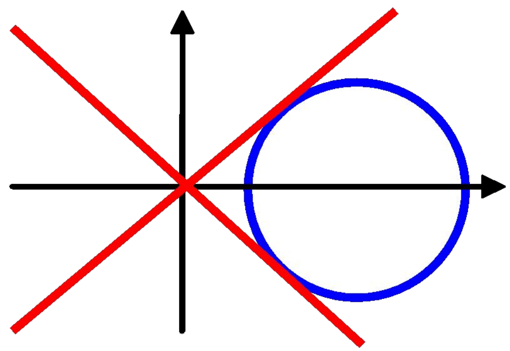


Рис. 5. $|a|=\sqrt{2}$

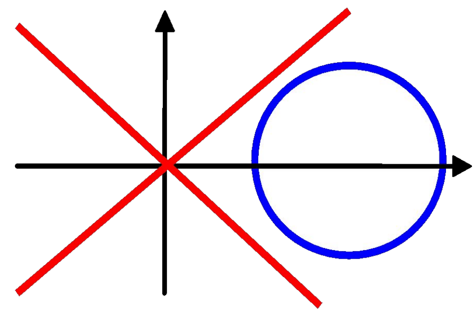


Рис. 6. $|a|>\sqrt{2}$

10 класс, задача № 5

Сколько существует положительных целых чисел *x*, меньших 10000, для которых $2^x - x^2$ делится на 7?

Решение

Рассмотрим остатки от деления $2^x, x^2$, $2^x - x^2$ на 7 (см. таблицу).

Период остатков от деления 2^x на 7 равен 3,

период остатков от деления x^2 на 7 равен 7.

Так как 7 и 3 – взаимно простые числа,

период остатков от деления $2^x - x^2$ на 7 равен $7 \cdot 3 = 21$

10 класс, задача № 5

Деление 2^x на 7		Деление x^2 на 7		Деление $2^x - x^2$ на 7	
x	Остаток, период 3	x	Остаток, период 7	x	Остаток, период $7 \cdot 3 = 21$
1	2	1	1	1	2-1=1
2	4	2	4	2	4-4=0 (число делится на 7)
3	1	3	2	3	1-2=-1+7=6
4	2	4	2	4	2-2=0
5	4	5	4	5	4-4=0
6	1	6	1	6	1-1=0
7	2	7	0	7	2-0=2
8	4	8	1	8	4-1=3
9	1	9	4	9	1-4=-3+7=4
10	2	10	2	10	2-2=0

10 класс, задача № 5

Деление 2^x на 7		Деление x^2 на 7		Деление $2^x - x^2$ на 7	
x	Остаток, период 3	x	Остаток, период 7	x	Остаток, период $7 \cdot 3 = 21$
11	4	11	2	11	4-2=2
12	1	12	4	12	1-4=-3+7=4
13	2	13	1	13	2-1=1
14	4	14	0	14	4-0=4
15	1	15	1	15	1-1=0
16	2	16	4	16	2-4=-2+7=5
17	4	17	2	17	4-2=2
18	1	18	2	18	1-2=-1+7=6
19	2	19	4	19	2-4=-2+7=5
20	4	20	1	20	4-1=3
21	1	21	0	21	1-0=1
22	2	22	1	22	2-1=1
23	4	23	4	23	4-4=0
24	1	24	2	24	1-2=-1+7=6
25	2	25	2	25	2-2=0

10 класс, задача № 5

Вычислим количество чисел $2^x - x^2$ в периоде, которые делятся на 7 (количество остатков, равных 0, в последнем столбце таблицы с x=1 по x=21). Их 6 штук.

Теперь делим 9999 на 21 и берем целую часть 476.

Таким образом, 476 – количество полных периодов, в каждом из которых содержится 6 чисел, делящихся на 7. Таким образом, получим $476 \cdot 6 = 2856$ чисел, делящихся на 7.

Поскольку всего чисел 9999, а $476 \cdot 21 = 9996$, то остаются 3 числа (x=9997, 9998, 9999), не входящих во множество рассмотренных 9996 чисел.

Остатки от деления $2^x - x^2$ на 7 при x=9997, 9998, 9999 равны 1, 0, 6, соответственно.

Число $2^x - x^2$ при x= 9998 делится на 7. Таким образом, количество положительных целых чисел x, меньших 10000, для которых $2^x - x^2$ делится на 7, равно 2856+1=2857.

Ответ 2857

10 класс, задача № 6

Найдите вещественные решения системы $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2xy-z^2=4 \end{cases}$

Решение

$$\begin{cases} z=2-x-y \\ 2xy-(2-x-y)^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=2-x-y \\ (x-2)^2+(y-2)^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$(x-2)^2+(y-2)^2=0$ для вещественных чисел возможно при $x=2$, $y=2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z=2-x-y \\ x=2 \\ y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=2-2-2=-2 \\ x=2 \\ y=2 \end{cases}$$

Ответ $x=2$, $y=2$, $z=-2$

10 класс, задача № 7

На противоположных сторонах реки расположены города А и В. Город А находится на расстоянии a км от реки, город В – на расстоянии b км от реки. Река прямолинейна и на всем протяжении имеет одинаковую ширину, равную h км. Расстояние между городами вдоль реки равно d км. Найдите минимальную длину дороги (включая длину моста) между городами А и В.

Решение

Известно, что на плоскости кратчайшее расстояние между точками определяется прямой линией, соединяющей эти точки. Кратчайшее расстояние между двумя берегами реки в данном случае – это ширина реки.

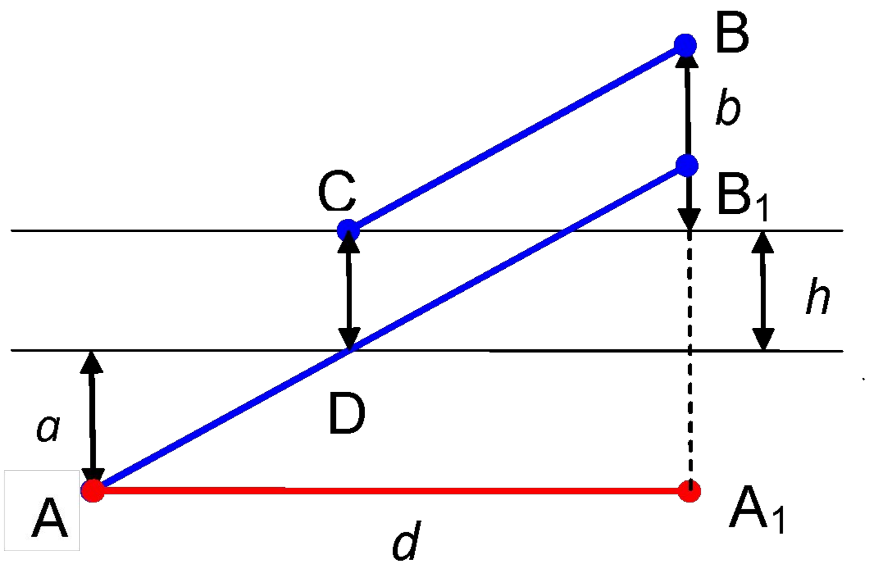
10 класс, задача № 7

Длина дороги складывается из длин 3 прямолинейных участков дороги:

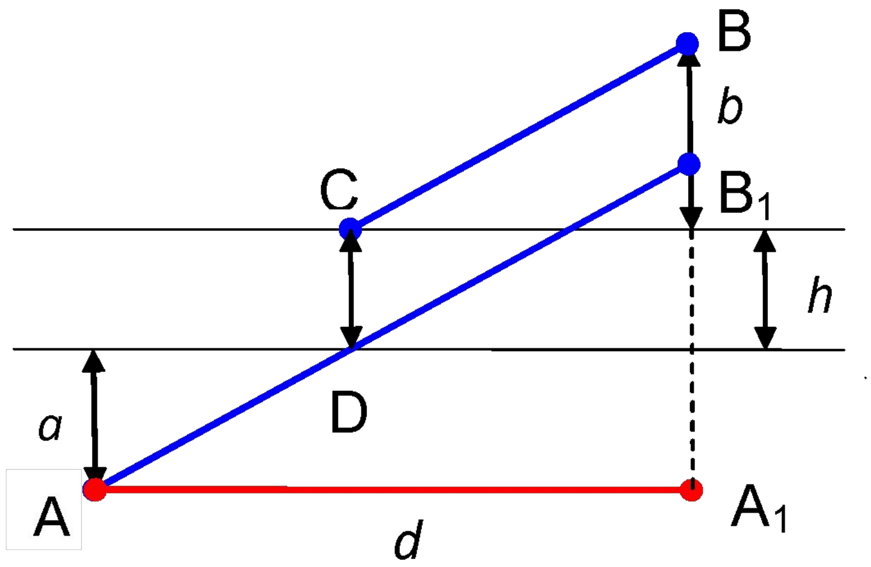
1-й участок дороги – от города A до моста (AD),

2-й участок – мост (DC),

3-й участок – от моста до города B (CB); $CB \parallel AB_1$



10 класс, задача № 7



Длина дороги будет минимальной, если после параллельного переноса места расположения города B на ширину реки перпендикулярно ее течению (точка B_1, $CB \parallel AB_1$), дороги по 1-му участку (AD) и 3-му участку (CB) превратятся в сплошную прямую линию (ADB_1).

Ответ

$$h + \sqrt{d^2 + (a+b)^2}$$

11 класс, задача № 1

Докажите, что

а) середины сторон пространственного 4-угольника являются вершинами параллелограмма;

б) центр параллелограмма есть середина отрезка, соединяющего середины диагоналей 4-угольника.

Решение

Пусть A, B, C, D - вершины пространственного 4-угольника, M, N, P, Q и K, L - середины сторон AB, BC, CD, DA и диагоналей AC, BD пространственного 4-угольника $ABCD$ соответственно (рис. 1).

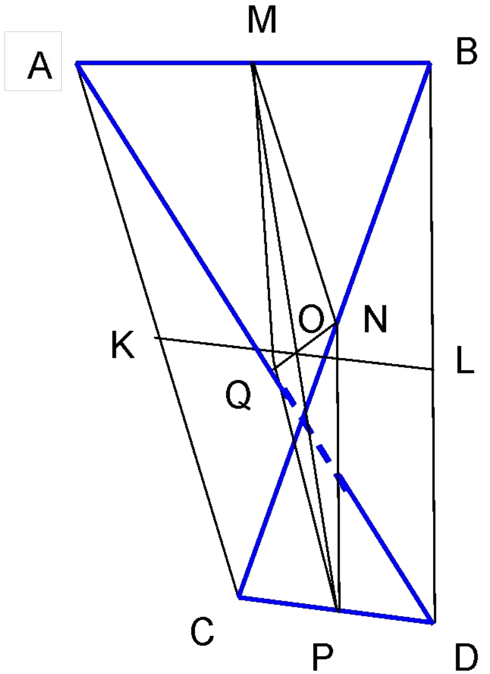


Рис. 1

11 класс, задача № 1

Из ΔABC следует, что $MN \parallel AC$ и $MN = \frac{1}{2}AC$,

из ΔADC следует, что $PQ \parallel AC$ и $PQ = \frac{1}{2}AC$.

Откуда получим, что 4-угольник $MNPQ$ есть параллелограмм.

Отрезки MP и NQ делятся в точке пересечения O пополам (как диагонали параллелограмма $MNPQ$).

Из ΔABC следует, что $KN \parallel AB$ и $KN = \frac{1}{2}AB$.

Следовательно, $KNLQ$ есть параллелограмм, и отрезок KL проходит через середину O отрезка NQ как диагональ нового параллелограмма и делится в ней пополам.

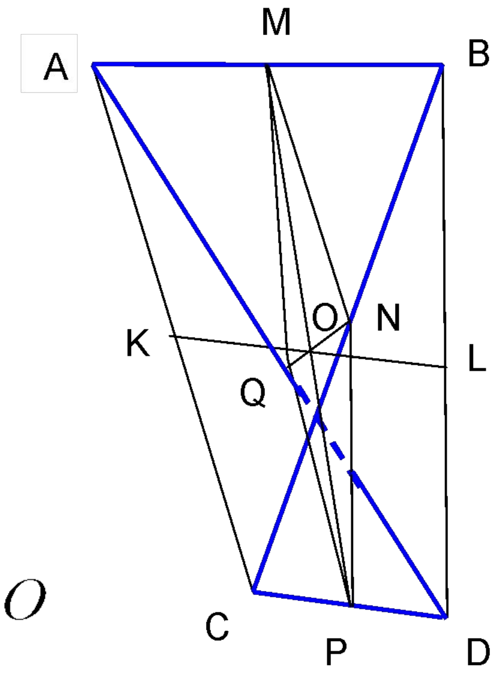


Рис. 1

11 класс, задача № 2

Докажите, что круги, построенные на сторонах выпуклого четырехугольника как на диаметрах, полностью покрывают этот четырехугольник. Справедливо ли это утверждение для треугольника? Для каждого ли выпуклого n-угольника ($n \geq 5$) справедливо это утверждение? Существует ли выпуклый n-угольник ($n \geq 5$), для которого справедливо данное утверждение?

Решение

Возьмем произвольную точку *P* внутри выпуклого четырехугольника *ABCD* и соединим ее с вершинами четырехугольника.

Тогда

$$\angle APB + \angle BPC + \angle CPD + \angle DPA = 360^{\circ}$$

Из этого равенства следует, что хотя бы один из этих углов больше или равен 90°.

11 класс, задача № 2

Покажем, для определенности, что это $\angle BPC$.

Тогда, если угол $\angle BPC > 90^{\circ}$, то точка *P* лежит внутри круга, построенного как на диаметре на стороне BC.

Если $\angle BPC = 90^{\circ}$, то точка *P* лежит на границе этого круга, что и требовалось доказать.

Для любого треугольника это утверждение также справедливо. Доказательство такое же, как для 4-угольников.

11 класс, задача № 2

Для каждого ли выпуклого n-угольника $(n \geq 5)$ справедливо это утверждение?

Нет.

Докажем, что существует пятиугольник, для которого это утверждение несправедливо.

Действительно, рассмотрим правильный пятиугольник и возьмем точку *P* центр пятиугольника, соединив точку *P* с вершинами.

Из правильности следует

$$\angle APB = \angle BPC = \ldots = \angle EPA = \alpha$$

11 класс, задача № 2

$$\angle APB = \angle BPC = \ldots = \angle EPA = \alpha$$

Сумма всех этих углов равняется 360°, откуда

$$5\alpha = 360^\circ,\ \alpha = 72^\circ.$$

Таким образом, точка *P* не принадлежит ни одному из кругов, построенному на сторонах как на диаметрах.

Для n-угольников ($n > 5$) доказательство такое же, как для пятиугольников.

11 класс, задача № 2

Существует ли выпуклый n-угольник ($n \geq 5$), для которого справедливо данное утверждение?

Да, при любом $n \geq 5$ существует такой выпуклый многоугольник.

Возьмем круг и проведем один из его диаметров, концы которого обозначим A_1 и A_n.

Возьмем один из получившихся полукругов и расставим в произвольных местах полуокружности (n-2) точки A_2, A_3, …, A_{n-1}, начиная от конца диаметра, обозначенного A_1.

Затем соединим точки A_1 и A_2, A_2 и A_3, и т.д. до A_{n-1} и A_n, A_n и A_1 хордами и получим n-угольник.

Очевидно по построению, что любая точка этого многоугольника принадлежит исходному кругу, построенному на стороне $A_n A_1$ как на диаметре.

11 класс, задача № 2

Осталось доказать, что построенный многоугольник выпуклый.

Возьмем сторону $A_{k-1}A_k$ и продолжим ее неограниченно в обоих направлениях. На дуге окружности $A_{k-1}A_k$ по построению нет других вершин многоугольника. Отсюда следует, что весь многоугольник лежит по одну сторону от этой прямой. Это утверждение справедливо для всех сторон построенного многоугольника. Следовательно, построенный многоугольник выпуклый.

Таким образом, существует выпуклый n-угольник ($n \geq 5$), для которого круги, построенные на его сторонах как на диаметрах, полностью его покрывают. ■

11 класс, задача № 3

Решите уравнение $x^3+1=2\sqrt[3]{2x-1}$

Решение

$$\left(\frac{x^3+1}{2}\right)^3=\left(\sqrt[3]{2x-1}\right)^3 \Leftrightarrow \left(\frac{x^3+1}{2}\right)^3=2x-1 \Leftrightarrow \frac{1+\left(\frac{x^3+1}{2}\right)^3}{2}=x$$

$$\frac{1+\left(\frac{x^3+1}{2}\right)^3}{2}=x \Leftrightarrow \frac{x^3+1}{2}=x \Leftrightarrow x^3-2x+1=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x-1)=0$$

Ответ

$$\boxed{x_1=1;\, x_2=\frac{-1+\sqrt{5}}{2};\, x_3=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}$$

Это уравнение вида $f(f(x))=x$, где $f(x)=\frac{1+x^3}{2}$

Воспользуемся **теоремой:** Если $f(x)$ – монотонно возрастающая функция, то уравнения $f(f(x))=x$ и $f(x)=x$ эквивалентны.

11 класс, задача № 4

Постройте график функции $y = \frac{[x]}{x}$, где $[x]$ - целая часть числа *x* (целой частью числа *x* называется наибольшее целое число, не превосходящее *x*).

Решение

Построим график функции $y = [x]$.

Если $x \in [-n; -n+1)$, то $y = -n$, $n \in N$;

$x \in [0;1)$, то $y = 0$;

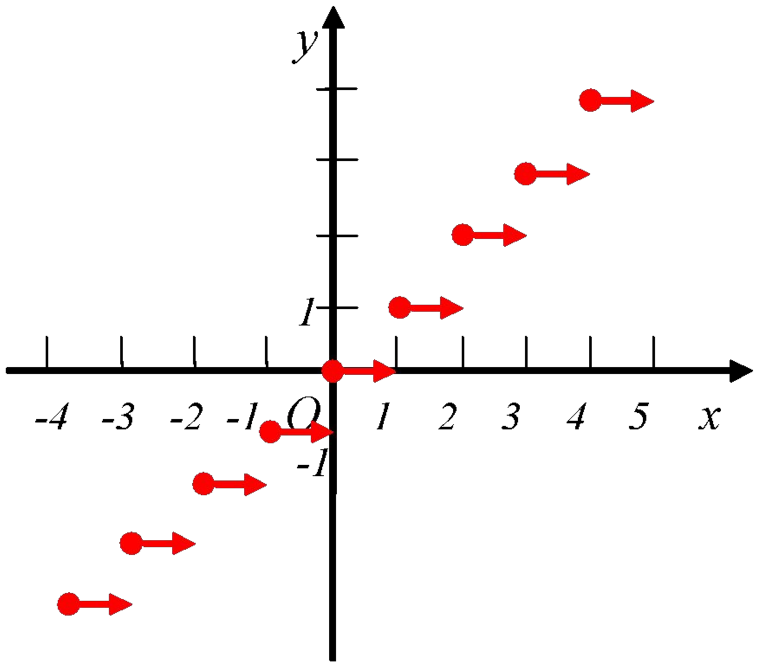
если $x \in [n; n+1)$, то $y = n$, $n \in N$.

$x \in [-4;-3)$	$y = -4$
$x \in [-3;-2)$	$y = -3$
$x \in [-2;-1)$	$y = -2$
$x \in [-1;0)$	$y = -1$
$x \in [0;1)$	$y = 0$
$x \in [1;2)$	$y = 1$
$x \in [2;3)$	$y = 2$

11 класс, задача № 4

$x \in [-4;-3)$	$y = -4$
$x \in [-3;-2)$	$y = -3$
$x \in [-2;-1)$	$y = -2$
$x \in [-1;0)$	$y = -1$
$x \in [0;1)$	$y = 0$
$x \in [1;2)$	$y = 1$
$x \in [2;3)$	$y = 2$

$y = [x]$



11 класс, задача № 4

Построим график функции $y = \frac{[x]}{x}$.

Если $x \in [-n; -n+1)$, то $y = -\frac{n}{x}$, $n \in N$;

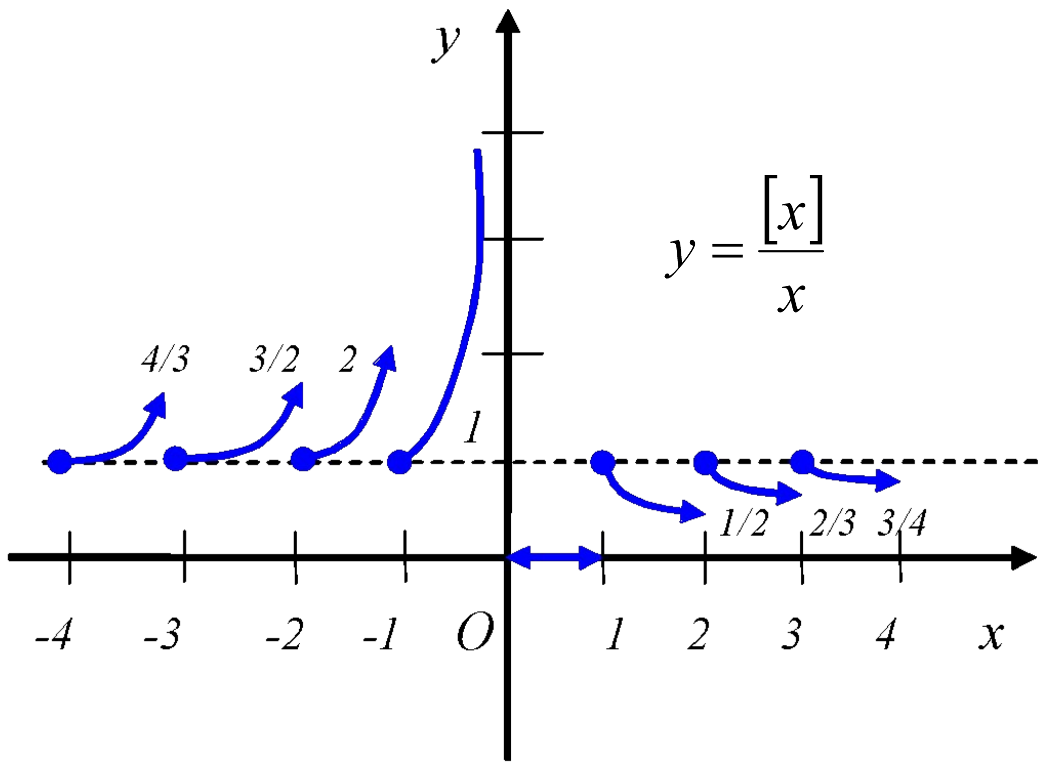
$x \in [0;1)$, то $y = 0$;

если $x \in [n; n+1)$, то $y = \frac{n}{x}$, $n \in N$.

$x \in [-4;-3)$	$y = -\frac{4}{x}$
$x \in [-3;-2)$	$y = -\frac{3}{x}$
$x \in [-2;-1)$	$y = -\frac{2}{x}$
$x \in [-1;0)$	$y = -\frac{1}{x}$
$x \in [0;1)$	$y = 0$
$x \in [1;2)$	$y = \frac{1}{x}$
$x \in [2;3)$	$y = \frac{2}{x}$

11 класс, задача № 4

$x \in [-4;-3)$	$y = -\dfrac{4}{x}$
$x \in [-3;-2)$	$y = -\dfrac{3}{x}$
$x \in [-2;-1)$	$y = -\dfrac{2}{x}$
$x \in [-1;0)$	$y = -\dfrac{1}{x}$
$x \in [0;1)$	$y = 0$
$x \in [1;2)$	$y = \dfrac{1}{x}$
$x \in [2;3)$	$y = \dfrac{2}{x}$



11 класс, задача № 6

Решите уравнение $\arccos x = \mathrm{arctg} x$

Решение

По определению обратных тригонометрических функций

$$\cos(\arccos x) = x.$$

Найдем $\cos(\mathrm{arctg} x)$.

Эта задача сводится к следующей:

Найти $\cos\alpha$, если $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ и $\mathrm{tg}\alpha = x$ $(\alpha = \mathrm{arctg} x)$.

$$\cos\alpha > 0 \quad \Longrightarrow \quad \cos\alpha = \sqrt{\cos^2\alpha} = \sqrt{\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}} = \sqrt{\frac{1}{1+x^2}}$$

11 класс, задача № 6

Получим уравнение $x = \sqrt{\dfrac{1}{1+x^2}}$

$$x^4 + x^2 - 1 = 0$$

$$x \geq 0$$

$$\left(x^2\right)_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2};\left(x^2\right)_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

$$x^2 \geq 0 \quad x^2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$$

Ответ $x = \sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}}$

11 класс, задача № 7

Дана последовательность целых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{2n+1}$. Переставляя элементы этой последовательности произвольным образом, получим новую последовательность $b_1, b_2, \ldots, b_{2n+1}$. Из этих двух последовательностей строим третью последовательность, чьи элементы определяются следующим образом: $c_i = a_i - b_i$. Докажите, что произведение $c_1 \cdot c_2 \cdot \ldots \cdot c_{2n+1}$ всегда четно.

Решение

Если все элементы последовательности $c_1, c_2, \ldots, c_{2n+1}$ нечетны, то их произведение $p = c_1 \cdot c_2 \cdot \ldots \cdot c_{2n+1}$ тоже нечетно.

Если среди элементов последовательности $c_1, c_2, \ldots, c_{2n+1}$ есть хотя бы один четный элемент, то p – четно.

Таким образом, необходимо доказать, что среди элементов последовательности $c_1, c_2, \ldots, c_{2n+1}$ найдется хотя бы один четный.

11 класс, задача № 7

Для этого рассмотрим сумму всех элементов последовательности $c_1, c_2, \ldots, c_{2n+1}$

$$S = c_1 + c_2 + \ldots + c_{2n+1} = (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \ldots + (a_{2n+1} - b_{2n+1}) =$$

$$= \left(a_1 + a_2 + \ldots + a_{2n+1}\right) - \left(b_1 + b_2 + \ldots + b_{2n+1}\right) = 0$$

(так как суммы в скобках одинаковы)

Сумма нечетного количества целых чисел может равняться нулю только тогда, когда среди них есть хотя бы одно четное число.

Таким образом, среди элементов последовательности $c_1, c_2, \ldots, c_{2n+1}$ есть хотя бы один четный и, следовательно, p четно.

Спасибо за внимание!