Архитектура краевых задач теории переноса изображения через слой мутной среды

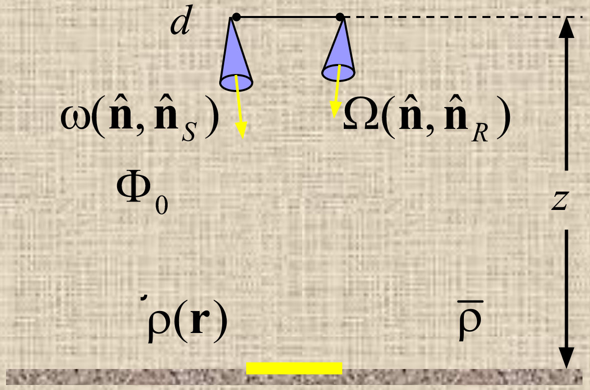
Tomoyuki Nishita (Fukuyama University), Eihachiro Nakamae (Hiroshima Prefectural University)

Будак Владимир Павлович,

Национальный исследовательский университет «МЭИ»
кафедра светотехники

: +7 (095) 763-5239 BudakVP@mpei.ru

Краевая задача теории переноса изображения



$$\bar{\rho} = \frac{1}{S}\int_{(S)} \rho(\mathbf{r})d^2r,\ \tilde{\rho}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r}) - \bar{\rho}$$

$$\int_{(S)} \oint \omega(\hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{n}}_S)(\hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{n}}_S)d\hat{\mathbf{n}}d^2r = 1, \quad \int_{(R)} \oint \Omega(\hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{n}}_R)(\hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{n}}_R)d\hat{\mathbf{n}}d^2r = 1$$

$$P_\Sigma(\hat{\mathbf{n}}_S, \hat{\mathbf{n}}_R) = \int_{(R)} \oint \Omega(\hat{\mathbf{n}}_R, \hat{\mathbf{n}})L(0, \mathbf{r}_R, -\hat{\mathbf{n}})\left|(\hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{n}}_R)\right| d\hat{\mathbf{n}}d^2r$$

Краевая задача: $$(\hat{\mathbf{l}}, \nabla)L(z, \mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}}) + \varepsilon(z)L(z, \mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}}) = \frac{\sigma(z)}{4\pi}\oint x(z, \hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{l}}')L(z, \mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}}')d\hat{\mathbf{l}}'$$

$$L_1 \equiv L(0, \mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}})\Big|_{\hat{\mathbf{l}} \in \Omega_+} = \Phi_0 \omega(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}}),$$

$$L_2 \equiv L(z_0, \mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}})\Big|_{\hat{\mathbf{l}} \in \Omega_-} = \frac{\rho(z)}{\pi}\int_{(\Omega_+)} L(z_0, \mathbf{r}, \hat{\mathbf{l}})(\hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{z}})d\hat{\mathbf{l}} \equiv \rho \mathbf{R} L$$

Имеем по сути систему интегральных уравнений

Яркость атмосферной дымки

Вследствие линейности уравнения переноса представим решение в виде суммы:

$$L(z,\mathbf{r},\hat{\mathbf{l}}) = D(z,\mathbf{r},\hat{\mathbf{l}}) + L_S(z,\mathbf{r},\hat{\mathbf{l}})$$

каждое слагаемое которой удовлетворяет краевым зачам

$$\begin{cases} D(0,\mathbf{r},\hat{\mathbf{l}}) = \Phi_0\omega(\mathbf{r},\hat{\mathbf{l}}); \\ D(z_0,\mathbf{r},\hat{\mathbf{l}}) = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} L_S(0,\mathbf{r},\hat{\mathbf{l}}) = 0; \\ L_S(z_0,\mathbf{r},\hat{\mathbf{l}}) = \rho\mathbf{R}(L_S + D); \end{cases}$$

Допустим известна функция Green УПИ: $\mathsf{I}\,(z;\mathbf{r}',\hat{\mathbf{l}}' \to \mathbf{r},\hat{\mathbf{l}})$

$$D(z,\mathbf{r},\hat{\mathbf{l}}) = \Phi_0\int \mathsf{I}\,(z;\mathbf{r}',\hat{\mathbf{l}}' \to \mathbf{r},\hat{\mathbf{l}})\omega(\mathbf{r}',\hat{\mathbf{l}}')d\hat{\mathbf{l}}'d^2r' = \Phi_0\mathsf{I}\,\otimes\omega(\mathbf{r}',\hat{\mathbf{l}}')$$

Поскольку $\omega(\mathbf{r}',\hat{\mathbf{l}}') = \int\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r})\delta(\hat{\mathbf{l}}'-\hat{\mathbf{l}})\omega(\mathbf{r}',\hat{\mathbf{l}}')d\hat{\mathbf{l}}'d^2r' = \delta\otimes\omega(\mathbf{r}',\hat{\mathbf{l}}')$, то

$$\begin{cases} \mathsf{I}_1 = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\delta(\hat{\mathbf{l}}-\hat{\mathbf{l}}'); \\ \mathsf{I}_2 = 0; \end{cases}$$

Яркость дымки – компонента яркости в среде, обусловленная только обратным рассеянием

Отражение от подстилающей поверхности

Вторую краевую задачу проанализируем на основе теории возмущений, считая отражение от объекта малым параметров:

$$\int \rho(\mathbf{r})d^2r << \rho S: \quad \rho = \bar{\rho} + \xi\rho, \;\; L_S = \sum_{n=0}^{\infty} \xi^n L^{(n)}$$

Подставим ряд во второе граничное условие, что приведет к выражению

$$\sum_{n=0}^{\infty} \xi^n L_2^{(n)} = (\bar{\rho} + \xi\rho)\mathbf{R}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \xi^n L^{(n)} + D\right)$$

Откуда, приравнивая члены при одинаковых степенях ξ - если равны ряды, то равны коэффициенты ряда:

$$n = 0: \quad L_2^{(0)} = \bar{\rho}\mathbf{R}L^{(0)} + \bar{\rho}\mathbf{R}D;$$

$$n = 1: \quad L_2^{(1)} = \bar{\rho}\mathbf{R}L^{(1)} + \tilde{\rho}\mathbf{R}(L^{(0)} + D);$$

$$n \geq 2: \quad L_2^{(n)} = \bar{\rho}\mathbf{R}L^{(n)} + \tilde{\rho}\mathbf{R}L^{(n-1)};$$

Независимо от номера *n* все уравнения имеют одинаковую структуру:

$$\mathsf{L}_2 = \bar{\rho}\mathbf{R}\mathsf{L} + G$$

Система уравнений представляет последовательность уравнений для яркости n-той кратности отражения

Оптический передаточный оператор

Возьмем Фурье-преобразование от обоих частей уравнения

$$\overline{\psi}(z,\boldsymbol{\nu},\hat{\mathbf{l}}) = \frac{1}{2\pi}\int \mathsf{L}(z,\mathbf{r},\hat{\mathbf{l}})\, e^{-i\boldsymbol{\nu}\mathbf{r}}\, d^2 r \equiv \mathsf{F}\{\mathsf{L}\},\quad G(\boldsymbol{\nu}) = \mathsf{F}\{\mathsf{G}\} \;\Rightarrow\; \overline{\psi}_2 = \overline{\rho}\mathbf{R}\overline{\psi} + G(\boldsymbol{\nu})$$

Пусть $\overline{\psi}(z,\boldsymbol{\nu},\hat{\mathbf{l}}) = \left(\overline{\rho}\mathbf{R}\overline{\psi} + G(\boldsymbol{\nu})\right)\psi(z,\boldsymbol{\nu},\hat{\mathbf{l}}) \;\Rightarrow\; \begin{cases}\psi_1 = 0; \\ \psi_2 = 1.\end{cases}$ - преобразование Fourier от яркости ТД:

$$e(z;\mathbf{r}'\to\mathbf{r}) = \mathsf{F}^{-1}\{\psi\}$$

Соответственно $\overline{\psi}(z,\boldsymbol{\nu},\hat{\mathbf{l}}) = \left(\overline{\rho}\mathbf{R}\overline{\psi} + G(\boldsymbol{\nu})\right)\psi(z,\boldsymbol{\nu},\hat{\mathbf{l}}) \;\Rightarrow\; \overline{\rho}\mathbf{R}\overline{\psi} = \left(\overline{\rho}\mathbf{R}\overline{\psi} + G(\boldsymbol{\nu})\right)\overline{\rho}\mathbf{R}\psi,\;\; \mathbf{R}\psi \equiv C(\boldsymbol{\nu})$

- среднее полусферическое альбедо слоя мутной среды

$$\overline{\rho}\mathbf{R}\overline{\psi} = \frac{G(\boldsymbol{\nu})\overline{\rho}C(\boldsymbol{\nu})}{1-\overline{\rho}C(\boldsymbol{\nu})} \;\Rightarrow\; \overline{\psi}(z,\boldsymbol{\nu},\hat{\mathbf{l}}) = \left(\frac{G(\boldsymbol{\nu})\overline{\rho}C(\boldsymbol{\nu})}{1-\overline{\rho}C(\boldsymbol{\nu})} + G(\boldsymbol{\nu})\right)\psi(z,\boldsymbol{\nu},\hat{\mathbf{l}}) = \frac{G(\boldsymbol{\nu})}{1-\overline{\rho}C(\boldsymbol{\nu})}\psi(z,\boldsymbol{\nu},\hat{\mathbf{l}})$$

$$\mathsf{L}(z,\boldsymbol{\nu},\hat{\mathbf{l}}) = \frac{1}{2\pi}\int \frac{G(\boldsymbol{\nu})}{1-\overline{\rho}C(\boldsymbol{\nu})}\psi(z,\boldsymbol{\nu},\hat{\mathbf{l}})\, e^{i\boldsymbol{\nu}\mathbf{r}}\, d^2\nu$$

Решение имеет структуру аналогичную фотометрическому шару

Компоненты сигнала

1. Яркость дымки $D(z,\mathbf{r},\hat{\mathbf{l}}) = \Phi_0 \mathsf{I} \otimes \omega(\mathbf{r}',\hat{\mathbf{l}}')$ - связана только со свечением среды под влиянием многократного рассеяния в среде – *помеха обратного рассеяния*.

2. Яркость (сигнал) подложки $\overline{L}(z,\mathbf{r},\hat{\mathbf{l}}) \equiv L^{(0)}(z,\mathbf{r},\hat{\mathbf{l}})$

$$\left.\begin{array}{l} G(\boldsymbol{\nu}) = \overline{\rho}\mathcal{F}\{\mathsf{R}D\} = \overline{\rho}\mathcal{F}\{\mathsf{R}\Phi_0\mathsf{I}\otimes\omega\} = \overline{\rho}\Phi_0\mathcal{F}\{\mathsf{RI}\otimes\omega(\mathbf{r}',\hat{\mathbf{l}}')\} \\ \mathsf{RI} = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{(\Omega_+)} \mathsf{I}(z;\mathbf{r}',\hat{\mathbf{l}}'\to\mathbf{r},\hat{\mathbf{l}})(\hat{\mathbf{z}},\hat{\mathbf{l}})d\hat{\mathbf{l}} = \dfrac{1}{\pi}e(z;\mathbf{r}'\to\mathbf{r}) \end{array}\right\} \Rightarrow G(\boldsymbol{\nu}) = \frac{\overline{\rho}\Phi_0}{\pi}\int\mathcal{F}\{e*\omega\}d\hat{\mathbf{l}}' = \frac{\overline{\rho}\Phi_0}{\pi}\int\mathcal{F}\{e\}\mathcal{F}\{\omega\}d\hat{\mathbf{l}}'$$

$$\overline{L}(z,\mathbf{r},\hat{\mathbf{l}}) = \frac{\overline{\rho}\Phi_0}{2\pi}\int\frac{E_\omega(\boldsymbol{\nu})}{1-\overline{\rho}C(\boldsymbol{\nu})}\psi(z,\boldsymbol{\nu},\hat{\mathbf{l}})e^{i\boldsymbol{\nu}\mathbf{r}}d^2\nu,\quad E_\omega(\boldsymbol{\nu}) = \frac{1}{\pi}\int\mathcal{F}\{e\}\mathcal{F}\{\omega\}d\hat{\mathbf{l}}'$$

3. Яркость сигнала – линейная часть от составляющей $\tilde{\rho}$: $\tilde{L}(z,\mathbf{r},\hat{\mathbf{l}}) \equiv L^{(1)}(z,\mathbf{r},\hat{\mathbf{l}})$

$$G(\boldsymbol{\nu}) = \mathcal{F}\{\tilde{\rho}\mathsf{R}(\overline{L}+D)\} = \int\tilde{\rho}(\boldsymbol{\nu}-\boldsymbol{\nu}_1)\left[\mathcal{F}\{\mathsf{R}\overline{L}\}+\mathcal{F}\{\mathsf{R}D\}\right]d^2\nu_1$$

$$\mathcal{F}\{\mathsf{R}D\} = \overline{\rho}\Phi_0E_\omega(\boldsymbol{\nu}),\quad \mathcal{F}\{\mathsf{R}\overline{L}\} = \Phi_0\frac{\overline{\rho}E_\omega(\boldsymbol{\nu})}{1-\overline{\rho}C(\boldsymbol{\nu})}\mathsf{R}\psi(z,\boldsymbol{\nu},\hat{\mathbf{l}}) = \Phi_0\frac{\overline{\rho}E_\omega(\boldsymbol{\nu})}{1-\overline{\rho}C(\boldsymbol{\nu})}C(\boldsymbol{\nu}) \Rightarrow \mathcal{F}\{\mathsf{R}D\}+\mathcal{F}\{\mathsf{R}\overline{L}\} = \Phi_0\frac{\overline{\rho}E_\omega(\boldsymbol{\nu})}{1-\overline{\rho}C(\boldsymbol{\nu})}$$

$$\tilde{L}(z,\mathbf{r},\hat{\mathbf{l}}) = \frac{\Phi_0}{2\pi}\int\tilde{\rho}(\boldsymbol{\nu}-\boldsymbol{\nu}_1)\frac{E_\omega(\boldsymbol{\nu}_1)}{1-\overline{\rho}C(\boldsymbol{\nu}_1)}d^2\nu_1\psi(z,\boldsymbol{\nu},\hat{\mathbf{l}})e^{i\boldsymbol{\nu}\mathbf{r}}d^2\nu$$

Все компоненты сигнала выражаются через яркость ТМ и ТД источника

Нелинейная часть сигнала

4. Яркость света, многократно отраженного от объекта $L'(z,\mathbf{r},\hat{\mathbf{l}}) = \sum_{n=2}^{\infty} L^{(n)}(z,\mathbf{r},\hat{\mathbf{l}})$

$$G(\boldsymbol{\nu}) = \mathrm{F}\left\{\rho \mathbf{R} L^{(n-1)}\right\} \int \tilde{\rho}(\boldsymbol{\nu}-\boldsymbol{\nu}_1) E^{(n)}(\boldsymbol{\nu}_1) d^2\nu_1$$

$$L^{(n-1)}(z,\boldsymbol{\nu},\hat{\mathbf{l}}) = \int \tilde{\rho}(\boldsymbol{\nu}-\boldsymbol{\nu}_1) \frac{E^{(n-1)}(\boldsymbol{\nu}_1)}{1-\bar{\rho}C(\boldsymbol{\nu}_1)} \psi(z,\boldsymbol{\nu},\hat{\mathbf{l}}) d^2\nu_1 \qquad E^{(n)}(\boldsymbol{\nu}) = \mathrm{F}\left\{\mathbf{R} L^{(n-1)}\right\} = \int \tilde{\rho}(\boldsymbol{\nu}-\boldsymbol{\nu}_1) \frac{E^{(n-1)}(\boldsymbol{\nu}_1)}{1-\bar{\rho}C(\boldsymbol{\nu}_1)} C(\boldsymbol{\nu}) d^2\nu_1$$

причем $E^{(1)}(\boldsymbol{\nu}) = \mathrm{F}\left\{\mathbf{R} L^{(1)}\right\} = \Phi_0 \int \tilde{\rho}(\boldsymbol{\nu}-\boldsymbol{\nu}_1) \frac{E_{\omega}(\boldsymbol{\nu}_1)}{1-\bar{\rho}C(\boldsymbol{\nu}_1)} C(\boldsymbol{\nu}) d^2\nu_1$

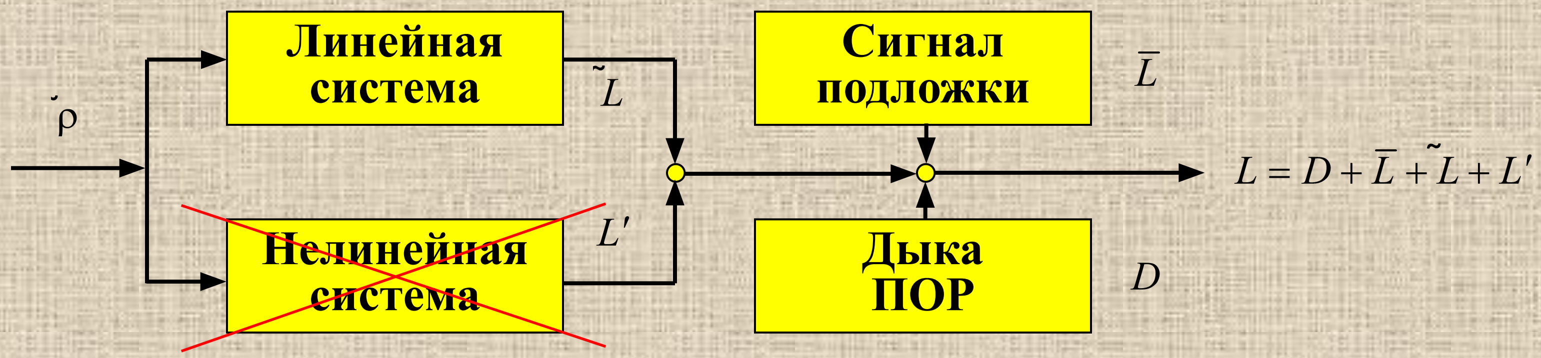
Следовательно

$$E^{(n)}(\boldsymbol{\nu}) = C(\boldsymbol{\nu}) \int \frac{C(\boldsymbol{\nu}_1)}{1-\bar{\rho}C(\boldsymbol{\nu}_1)} \frac{C(\boldsymbol{\nu}_2)}{1-\bar{\rho}C(\boldsymbol{\nu}_2)} \cdot \ldots \cdot \frac{E_{\omega}(\boldsymbol{\nu}_n)}{1-\bar{\rho}C(\boldsymbol{\nu}_n)} \tilde{\rho}(\boldsymbol{\nu}-\boldsymbol{\nu}_1) \cdot \ldots \, \tilde{\rho}(\boldsymbol{\nu}_{n-1}-\boldsymbol{\nu}_n) d^2\nu_1 \ldots d^2\nu_n$$

$$L^{(n)}(z,\mathbf{r},\hat{\mathbf{l}}) = \frac{\Phi_0}{2\pi} \int \frac{C(\boldsymbol{\nu}_1)}{1-\bar{\rho}C(\boldsymbol{\nu}_1)} \frac{C(\boldsymbol{\nu}_2)}{1-\bar{\rho}C(\boldsymbol{\nu}_2)} \cdot \ldots \cdot \frac{E_{\omega}(\boldsymbol{\nu}_n)}{1-\bar{\rho}C(\boldsymbol{\nu}_n)} \tilde{\rho}(\boldsymbol{\nu}-\boldsymbol{\nu}_1) \cdot \ldots \, \tilde{\rho}(\boldsymbol{\nu}_{n-1}-\boldsymbol{\nu}_n) \psi(z,\boldsymbol{\nu},\hat{\mathbf{l}}) e^{i\boldsymbol{\nu}\mathbf{r}} d^2\nu_1 \ldots d^2\nu_n d^2\nu$$

Многократные отражения от объекта делают слой мутной среды нелинейной системой

Линеаризация системы



Для реальных мутных сред характерно малые значения $C(\mathbf{\nu})$ и ρ, что позволяет пренебречь нелинейностью и многократными отражениями

$$\bar{L}(z,\mathbf{r},\hat{\mathbf{l}}) = \frac{\bar{\rho}\Phi_0}{2\pi}\int E_\omega(\mathbf{\nu})\psi(z,\mathbf{\nu},\hat{\mathbf{l}})\mathrm{e}^{i\mathbf{\nu r}}\,d^2\nu,\quad \tilde{L}(z,\mathbf{r},\hat{\mathbf{l}}) = \frac{\Phi_0}{2\pi}\int\tilde{\rho}(\mathbf{\nu}-\mathbf{\nu}_1)E_\omega(\mathbf{\nu}_1)d^2\nu_1\psi(z,\mathbf{\nu},\hat{\mathbf{l}})\mathrm{e}^{i\mathbf{\nu r}}\,d^2\nu$$

$$P_{\text{пл}} = \frac{\bar{\rho}\Phi_0}{2\pi}\int E_\omega(\mathbf{\nu})E_\Omega(\mathbf{\nu})\mathrm{e}^{i\mathbf{\nu r}}\,d^2\nu = \bar{\rho}\Phi_0\int E_\omega(\mathbf{r}')E_\Omega(\mathbf{r}-\mathbf{r}')d^2r'$$

$$P_{\text{пс}} = \frac{\Phi_0}{2\pi}\int\tilde{\rho}(\mathbf{\nu}-\mathbf{\nu}_1)E_\omega(\mathbf{\nu}_1)d^2\nu_1 E_\Omega(\mathbf{\nu})\mathrm{e}^{i\mathbf{\nu r}}\,d^2\nu = \Phi_0\int\tilde{\rho}(\mathbf{r}')E_\omega(\mathbf{r}')E_\Omega(\mathbf{r}-\mathbf{r}')d^2r'$$

При малости отражения от объекта и обратного рассеяния в среде слой мутной среды является линейным звеном