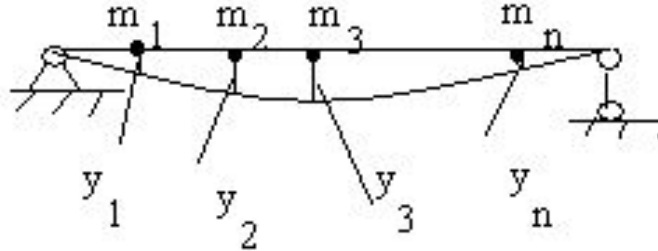


Свободные колебания системы с несколькими степенями свободы

1. **Вековое уравнение.**
2. **Спектр собственных частот и формы собственных колебаний.**
3. **Ортогональность собственных форм.**

Свободные колебания системы с несколькими степенями свободы.



$$ry_i + m_i y_i'' = 0,$$

$$I_i = -m_i y_i'' \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

$$y_i = (y_i)_o \sin(\omega t + \varphi_o), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$(y_i)_o$ – представляет собой амплитудное значение перемещения i -ой массы, а ω – частоту свободных колебаний масс.

$$I_1 = m_1 y_{1o} \omega^2 \sin(\omega t + \varphi_o),$$

$$I_2 = m_2 y_{2o} \omega^2 \sin(\omega t + \varphi_o),$$

.....,

$$I_n = m_n y_{no} \omega^2 \sin(\omega t + \varphi_o)$$

Перемещения масс. Интегралы Мора при изгибе

$$y_1 = I_1 \delta_{11} + I_2 \delta_{12} + \dots + I_n \delta_{1n},$$

$$y_2 = I_1 \delta_{21} + I_2 \delta_{22} + \dots + I_n \delta_{2n},$$

.....,

$$y_n = I_1 \delta_{n1} + I_2 \delta_{n2} + \dots + I_n \delta_{nn}$$

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{M_1 M_1^0 dx}{EI}; \quad \delta_{12} = \sum \int \frac{M_1 M_2^0 dx}{EI}; \quad \delta_{1n} = \sum \int \frac{M_1 M_n^0 dx}{EI};$$

$$\delta_{n1} = \sum \int \frac{M_n M_1^0 dx}{EI}; \quad \delta_{n2} = \sum \int \frac{M_n M_2^0 dx}{EI}; \quad \delta_{nn} = \sum \int \frac{M_n M_n^0 dx}{EI};$$

Вековое уравнение

$$(m_1\delta_{11}\omega^2 - 1)y_{1o} + m_2\delta_{12}\omega^2 y_{2o} + \dots + m_n\delta_{1n}\omega^2 y_{no} = 0,$$

$$m_1\delta_{21}\omega^2 y_{1o} + m_2(\delta_{22}\omega^2 - 1)y_{2o} + \dots + m_n\delta_{2n}\omega^2 y_{no} = 0,$$

.....,

$$m_1\delta_{n1}\omega^2 y_{1o} + m_2\delta_{n2}\omega^2 y_{2o} + \dots + (m_n\delta_{nn}\omega^2 - 1)y_{no} = 0,$$

$$\lambda = \frac{1}{\omega^2}$$

$$\begin{vmatrix} (m_1\delta_{11} - \lambda) & m_2\delta_{12} & \dots & m_n\delta_{1n} \\ m\delta_{21} & (m_2\delta_{22} - \lambda) & \dots & m_n\delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_1\delta_{n1} & m_2\delta_{n2} & \dots & (m_n\delta_{nn} - \lambda) \end{vmatrix} = 0 \quad (1)$$

Вековое уравнение для системы с двумя степенями свободы

$$\omega_{1,2} = \frac{(m_1\delta_{11} + m_2\delta_{22}) \pm \sqrt{(m_1\delta_{11} + m_2\delta_{22})^2 - 4m_1m_2(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2)}}{2m_1m_2(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2)}$$

Движение k-ой массы

$$y_k = \sum_1^n y_{ki} \sin(\omega_i t + \varphi), \quad k = 1, 2, \dots, n$$

Собственные формы колебаний

$$\rho_{1i} = \frac{y_{1i}}{y_{1i}} = 1, \quad \rho_{2i} = \frac{y_{2i}}{y_{1i}}, \quad \rho_{3i} = \frac{y_{3i}}{y_{1i}}, \quad \dots \rho_{ni} = \frac{y_{ni}}{y_{1i}}, \quad (2)$$

$$(m_1 \delta_{11} \omega_i^2 - 1) + m_2 \delta_{12} \omega_i^2 \rho_{2i} + \dots + m_n \delta_{1n} \omega_i^2 \rho_{ni} = 0,$$

$$m_1 \delta_{21} \omega_i^2 + (m_2 \delta_{22} \omega_i^2 - 1) \rho_{2i} + \dots + m_n \delta_{2n} \omega_i^2 \rho_{ni} = 0,$$

.....,

$$m_1 \delta_{n1} \omega_i^2 + m_2 \delta_{n2} \omega_i^2 \rho_{2i} + \dots + (m_n \delta_{nn} \omega_i^2 - 1) \rho_{ni} = 0, \quad (3)$$

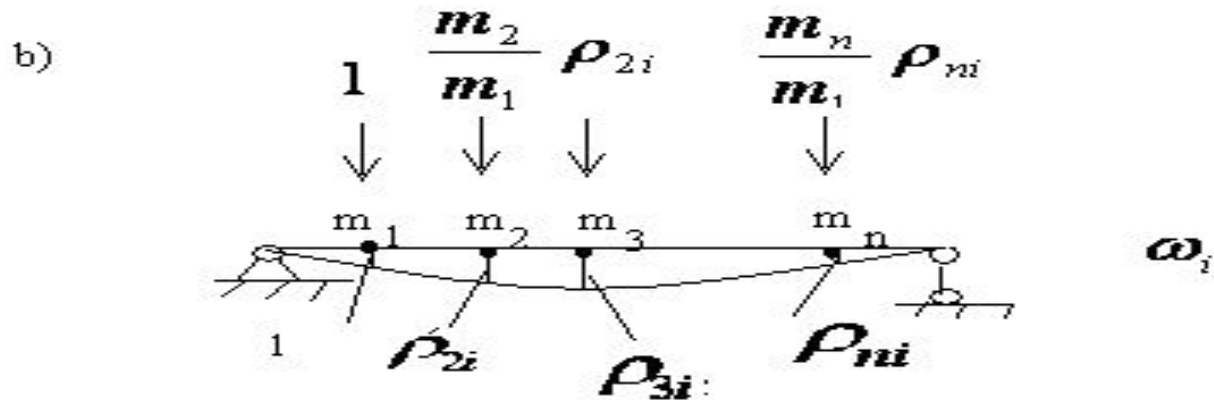
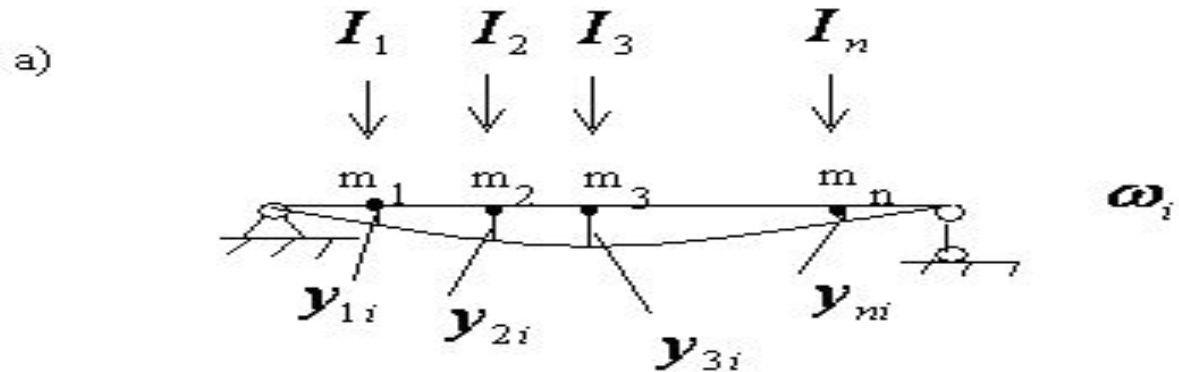
Полное перемещение k-ой массы

$$y_k(t) = \sum_1^n \rho_{ki} y_{1i} \sin(\omega_i t + \varphi), \quad k = 1, 2, \dots, n$$

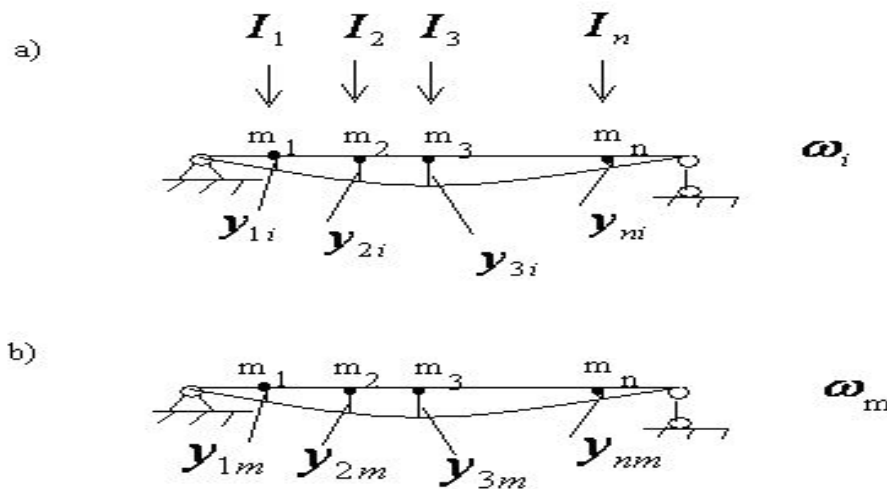
Главные формы собственных колебаний

$$I_1 = m_1 y_{1i} \omega_i^2, I_2 = m_2 y_{2i} \omega_i^2,$$

$$I_3 = m_3 y_{3i} \omega_i^2, \dots, I_n = m_n y_{ni} \omega_i^2$$



Ортогональность главных форм колебаний



$$A_{im} = \sum_{k=1}^n m_k \omega_i^2 y_{ki} \sin \omega_i t \cdot y_{km} \sin \omega_m t,$$

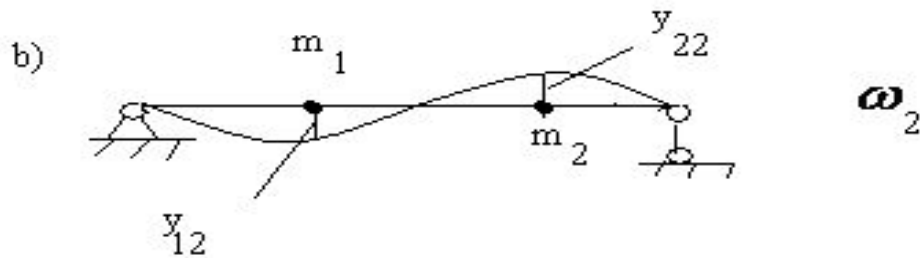
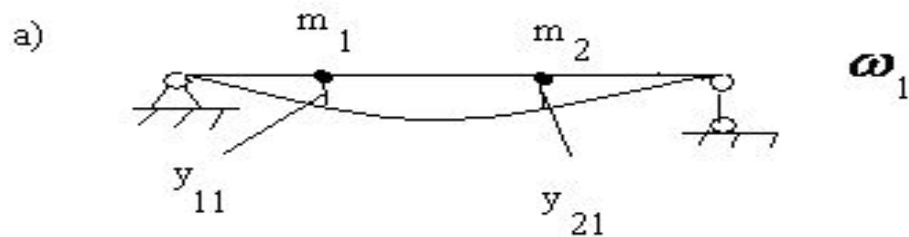
$$A_{mn} = \sum_{k=1}^n m_k \omega_m^2 y_{km} \sin \omega_m t \cdot y_{ki} \sin \omega_i t,$$

$$(\omega_i^2 - \omega_m^2) \sum_{k=1}^n m_k y_{ki} y_{km} = 0, \quad \omega_i \neq \omega_m,$$

$$\sum_{k=1}^n m_k y_{ki} y_{km} = 0$$

Свойство ортогональности для системы с двумя степенями свободы

$$m_1 y_{12} y_{11} + m_2 y_{21} y_{22} = 0$$



Разложение нагрузки по нормальным составляющим

$$P_1 = C_1 m_1 y_{11} + C_2 m_1 y_{12},$$

$$P_2 = C_1 m_2 y_{21} + C_2 m_2 y_{22}$$

$$C_1 = \frac{\sum_1^2 P_i y_{i1}}{\sum_1^2 m_i y_{i1}^2},$$

$$C_2 = \frac{\sum_1^2 P_i y_{i2}}{\sum_1^2 m_i y_{i2}^2}$$

$$P_k(t) = \sum_{i=1}^n C_i \omega_i^2 m_k y_{ki}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

Нормальные составляющие внешней нагрузки

