# «Квадратный трехчлен в задачах с параметрами»

Выполнил: Педь Т.В.

Пусть дана функция **$f(x) = ax^2 + bx + c$**

Графиком функции **$f(x)$** является парабола, которая может располагаться на координатной плоскости следующим образом.

Если **$a>0$**, то возможны три случая, изображенные на рисунках **1, 2 и 3**.

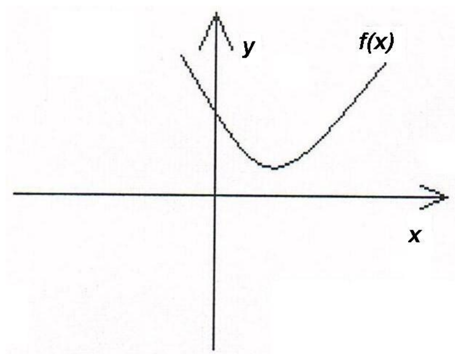


**Рисунок 1**

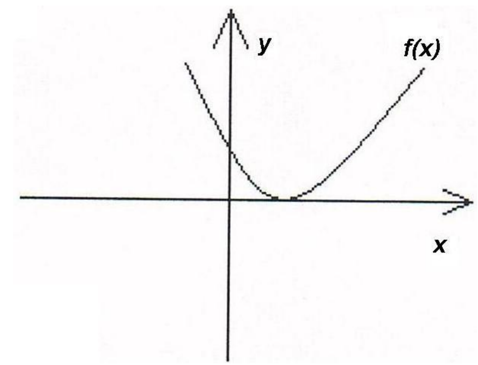


**Рисунок 2**

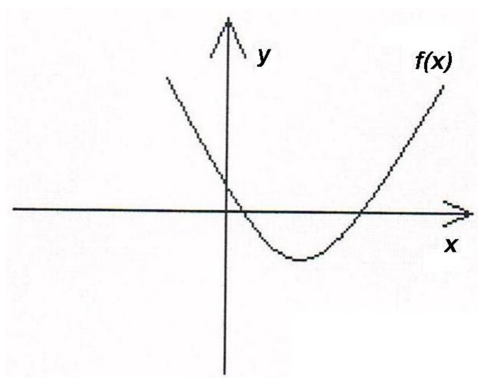


**Рисунок 3**

<u>На рисунке 1</u> **$D<0$**, квадратный трехчлен не имеет корней .

<u>Рисунок 2</u>. **$D=0$** и квадратный трехчлен имеет 1 корень кратности 2.

<u>Рисунок 3</u> – **$D>0$** и трехчлен имеет два различных корня.

- Если **a<0,** то возможны также три случая.

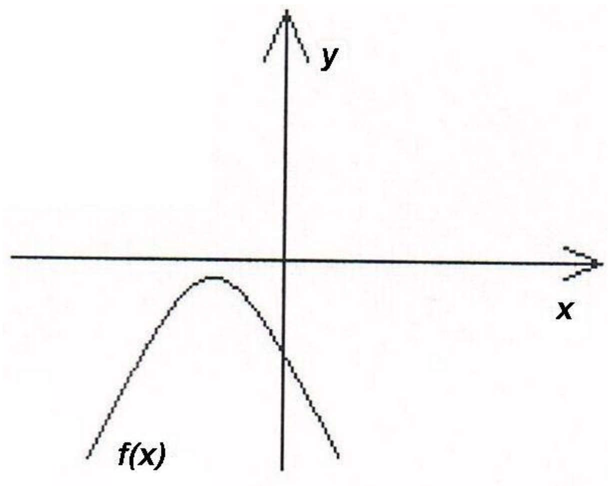


**Рисунок 4**

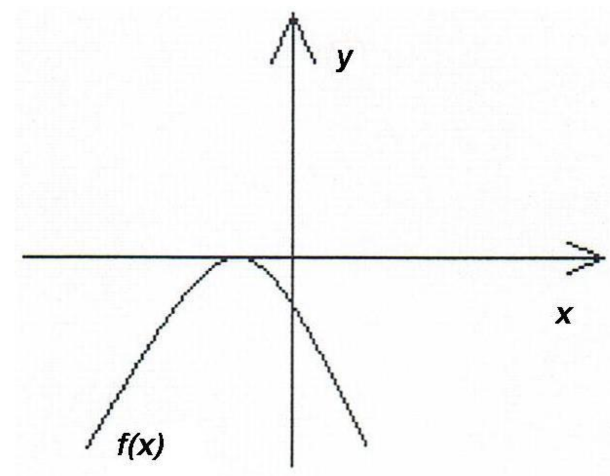


**Рисунок 5**

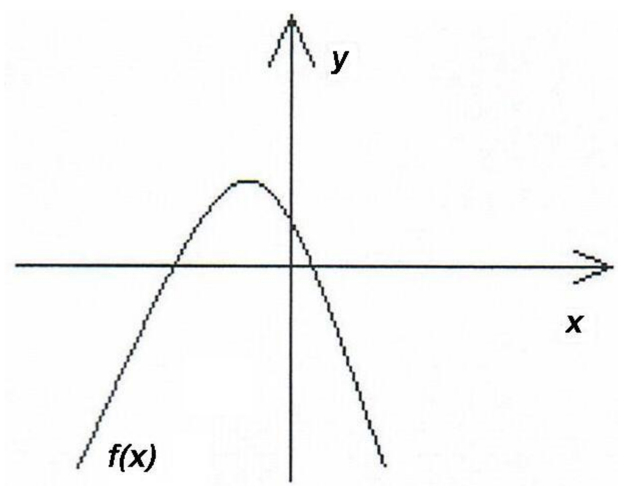


**Рисунок 6**

<u>На рисунке 4, 5 и 6</u>, где соответственно показано отсутствие корней (**D<0**), один корень (**D=0**) и два различных корня (**D>0**)

# Возможные случаи расположения корней квадратного трехчлена в решении задач с параметрами

1. Корни больше (меньше) некоторого числа n
2. Корни лежат по разные стороны некоторого числа n
3. Корни лежат (не лежат) на отрезке [m;n]
4. Только один корень лежит на отрезке [m;n]
5. Один корень расположен на отрезке [m;n], а другой – (p;q)

I. Какие условия надо выполнить, чтобы корни квадрантного трехчлена **<u>были больше некоторого заданного числа n</u>**

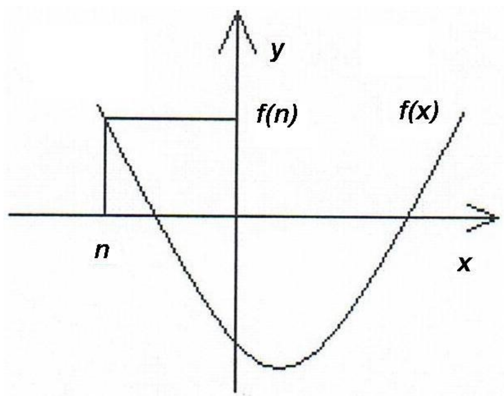


**Рисунок 7**

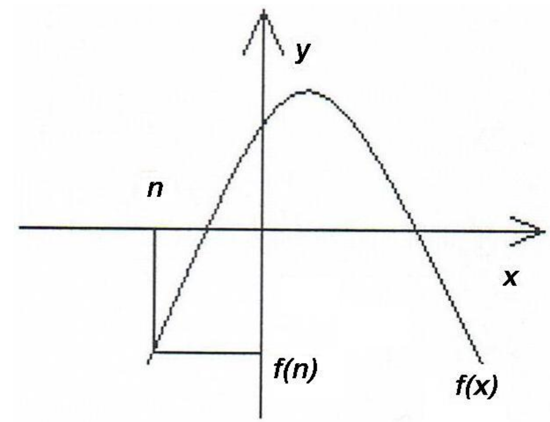


**Рисунок 8**

Во-первых, очевидно, что вершина параболы должна находиться <u>правее n</u>

Во-вторых, <u>необходимо наличие корней</u>

Но выполнение этих двух условий, хотя является необходимым, но еще не достаточное условие выполнение задачи.

Достаточным условием является : при **<u>a>0,</u>** значение функции в точке x=n должно быть f(n)>0, а при **<u>a<0</u>**, f(n)<0.

Таким образом, получаем, что **<u>необходимым и достаточным условием</u>** выполнения условия исходной задачи является решением системы неравенств

$$\begin{cases} D_x \geq 0 \\ a * f(n) > 0, \quad m.e \\ -\dfrac{b}{2a} > n \end{cases} \quad \begin{cases} b^2 - 4ac \geq 0 \\ a(an^2 + bn + c) > 0 \\ -\dfrac{b}{2a} > n \end{cases}$$

- Аналогично для **<u>корней меньше n</u>**

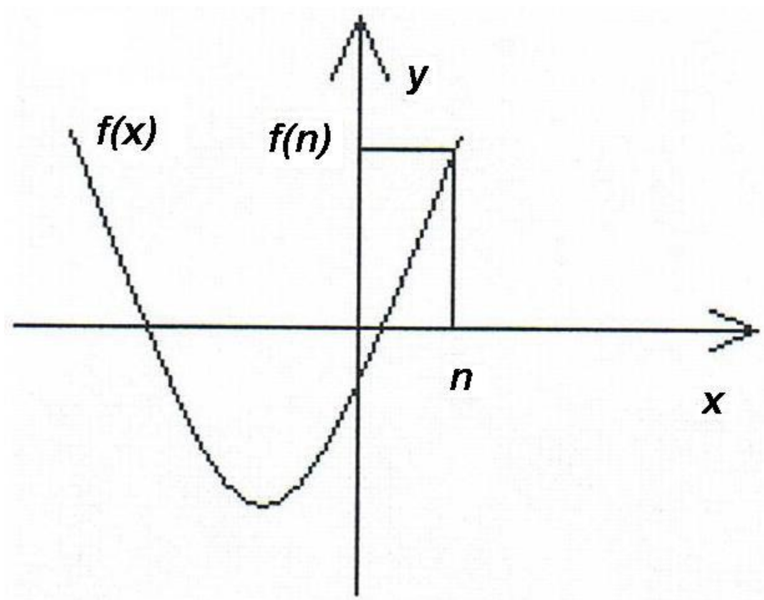


**Рисунок 9**

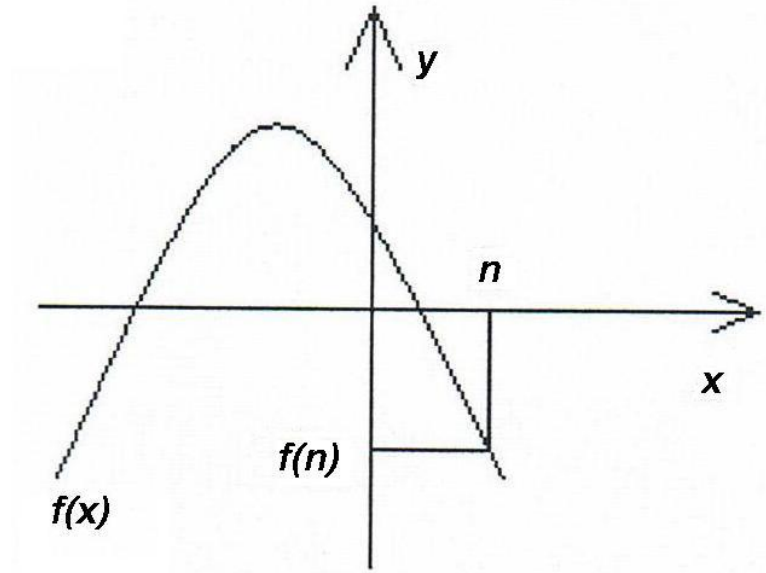


**Рисунок 10**

$$\begin{cases} D_x \geq 0 \\ a * f(n) > 0, \quad т.е \\ -\dfrac{b}{2a} < n \end{cases} \quad \begin{cases} b^2 - 4ac \geq 0 \\ a(an^2 + bn + c) > 0 \\ -\dfrac{b}{2a} < n \end{cases}$$

# II. Рассмотрим случай, когда корни лежат по **<u>разные стороны от числа n</u>**

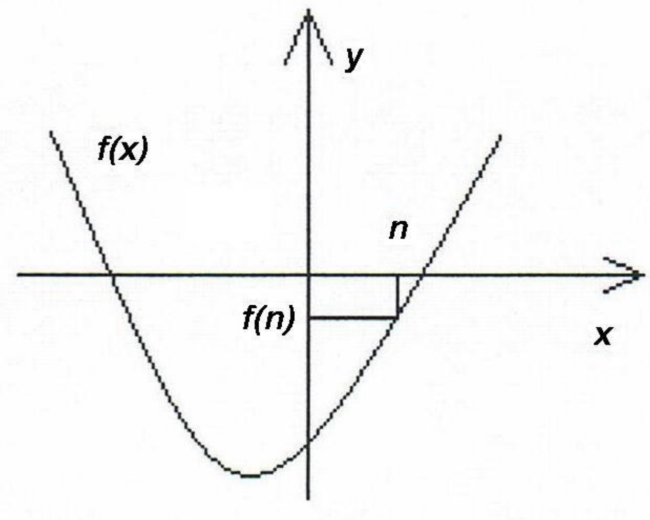


**Рисунок 11**

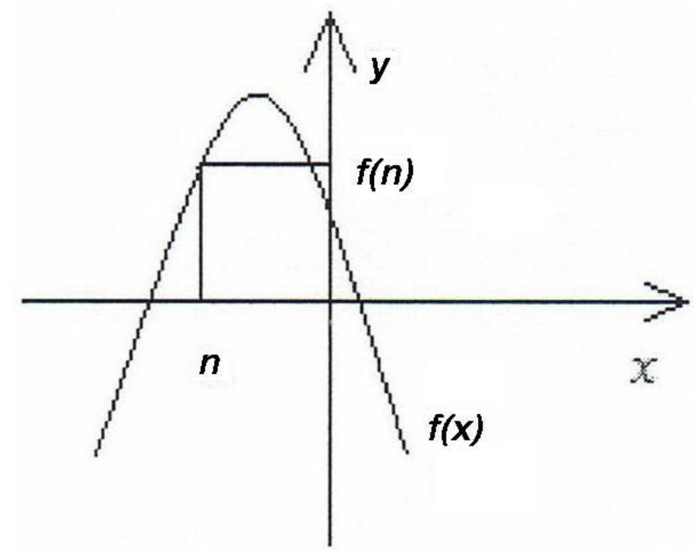


**Рисунок 12**

При **a>0, f(n)<0**, следовательно **a*f(n)<0**

При **a<0, f(n)>0**, следовательно **a*f(n)<0.**

Таким образом, получается, что необходимым и достаточным условием заданной задачи является **a*f(n)<0**.

**D>0** будет выполняться автоматически

# Пример 1

- Найти все значения параметра *а*, при которых уравнение $(2a-1)x^2+2(a+2)x+a-4=0$ имеет два различных корня, каждый из которых больше чем - 2

**Решение**: Рассмотрим функцию $f(x)=(2a-1)x^2+2(a+2)x+a-4$

Условию задачи удовлетворяет положение функции f(x), показанное на рисунке 13.

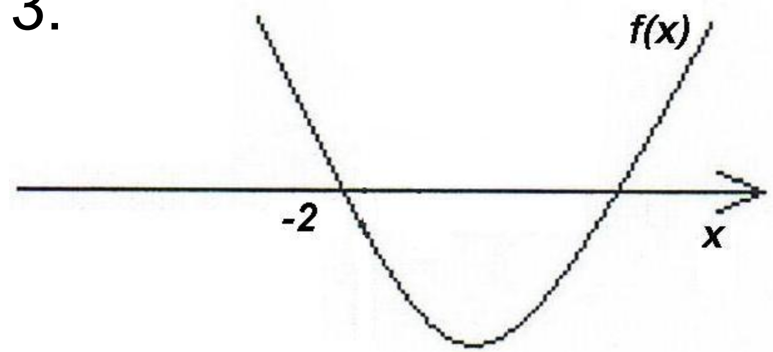


**Рисунок 13**

Следовательно, условие задачи обеспечивается решением системы неравенств:

$$\begin{cases} D>0 \\ (2a-1)*f(-2)>0 \\ \dfrac{2(a+2)}{2(2a-1)}>-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\in(0;13) \\ a\in(-\infty;0,5)\cup(3,2;+\infty) \\ a\in(-\infty;0,5)\cup(\dfrac{4}{3};+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow a\in(0;\frac{1}{2})\cup(3,2;13)$$

Ответ: $a\in(0;\frac{1}{2})\cup(3,2;13)$

# Пример 2

- Найти все значения параметра а при которых уравнение $2\log_3^2(3+x^2)-5a*\log_3(3+x^2)+2a=0$ не имеет решения

**Решение**: Допустимые значения параметра $a\in R.$ Ведем новую переменную $t=\log_3(3+x^2)$ . Заметим, что $t\geq 1$ . Тогда данное уравнение имеет вид $2t^2-5at+2a=0$ . Это уравнение не будет иметь решений, если $D_t<0$ , либо *t<1.* Пусть $f(t)=2t^2-5at+2a$. Тогда условие *t<1* обеспечивается решением следующей системы неравенств:

$$\begin{cases} 2f(1)>0 \\ -\dfrac{-5a}{4}<1 \\ D_t\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a<\dfrac{2}{3} \\ a<\dfrac{4}{5} \\ a\in(-\infty;0]\cup[\dfrac{16}{25};+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow a\in(-\infty;0]\cup[\dfrac{16}{25};\dfrac{2}{3})$$

Условие

$$D_t<0\Leftrightarrow 25a^2-16a<0\Leftrightarrow a(a-\frac{16}{25})<0\Leftrightarrow a\in(0;\frac{16}{25}).$$

Ответ:

$$a\in(-\infty;\frac{2}{3}).$$