

# Дисперсионный анализ

Однофакторный дисперсионный  
анализ

# Дисперсионный анализ

- Данный вид анализа применяют в тех случаях, когда необходимо сопоставить не 2, а большее число результатов однотипных экспериментов.
- Смысл дисперсионного анализа заключается в следующем – из общей суммы квадратов дисперсии вычитают сумму квадратов отклонений по изучаемым факторам (межфакторная дисперсия). В результате чего получают остаточную сумму квадратов дисперсии, которая характеризует влияние различных факторов.

# Таблица исходных данных

Уровень факторов	Результаты						$\Sigma$	Число наблюдений	Среднее арифметическое
	1	2	.....	j	.....	m			
1	$y_{11}$	$y_{12}$		$y_{1j}$		$y_{1m}$	$\sum_{j=1}^m y_{1j}$	$m_1$	$\bar{y}_1$
2									
.....									
i	$y_{i1}$	$y_{i2}$		$y_{ij}$		$y_{im}$	$\sum_{j=1}^m y_{ij}$	$m_i$	$\bar{y}_i$
....									
n	$y_{n1}$	$y_{n2}$		$y_{nj}$		$y_{nm}$	$\sum_{j=1}^m y_{nj}$	$m_n$	$\bar{y}_m$
Итого							$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m y_{ij}$	$N=m \cdot n$	$\bar{y}$

Для  $n$  разных уровней некоторого фактора проводят по  $m$  измерений (для каждого уровня) величины  $y$ . Затем проверяют гипотезу о том, что влияние фактора на средние значения для каждого уровня существенно.

# Расчетные формулы

- Вычисляют общее среднее и среднее для данного уровня фактора .  $\bar{y}$   $\bar{y}_i$
- Вычисляют остаточную дисперсию:

$$S_r^2 = \left[ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (y_{ij} - y_i)^2 \right] / (mn - m)$$

- Вычисляют межфакторную дисперсию:

- $$S_f^2 = m \left[ \sum_{i=1}^n (\bar{y}_i - \bar{y})^2 \right] / (n - 1)$$

Дисперсия генеральной совокупности:

$$S_0^2 = \left[ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (y_{ij} - y_i)^2 \right] / (mn - 1)$$

Определяют статистику:

$$F^* = S_f^2 / S_r^2$$

Сравнивают ее с табличным значением  $F_\alpha(v_1, v_2)$ , (( $v_1 = n - 1$ ), ( $v_2 = nm - n$ )).

$F^* > F_\alpha(v_1, v_2)$ , фактор статистически значим

# Дисперсионный анализ

Двухфакторный анализ

# Исходные данные

- Для двух факторного анализа необходимо задать  $m$ , как число измерений величины  $y$ .
- Пусть второй фактор  $k$  – принимает значения от 1 до  $p$ , а первый фактор – от 1 до  $n$ .
- Запишем  $y$  с тремя индексами  $k, i, j$ , где  $j$  – число повторений измерения ( $y_{kij}$ ).

# Проверяются три гипотезы:

- Влияние первого фактора – статистически значимое.
- Влияние второго фактора – статистически значимое.
- Взаимодействие между факторами – статистически значимое.



# Вычисления ведут по следующей схеме:

- Определяют общее и частное среднее.

$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^p \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m y_{kij}}{mnp} \quad \bar{y}_{ki} = \frac{\sum_{j=1}^m y_{kij}}{m} \quad \bar{y}_k = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{y}_{ki}}{n} \quad \bar{y}_i = \frac{\sum_{k=1}^p \bar{y}_{ki}}{p}$$

- Дисперсия генеральной совокупности

$$S_0^2 = \frac{\sum_{k=1}^p \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (y_{kij} - \bar{y})^2}{mnp - 1}$$

- Межфакторные  $S_1$  и  $S_2$ :

$$S_1^2 = \frac{mp \left[ \sum_{i=1}^n (\bar{y}_i - \bar{y})^2 \right]}{n - 1} \quad S_2^2 = \frac{mn \left[ \sum_{k=1}^p (\bar{y}_k - \bar{y})^2 \right]}{p - 1}$$

- Дисперсия взаимодействия:

$$S_{12} = \frac{m \left[ \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^p (\bar{y}_{ki} - \bar{y}_i - \bar{y}_k + \bar{y})^2 \right]}{(n-1) \cdot (p-1)}$$

- Остаточная дисперсия:

$$S_r^2 = \frac{\sum_{k=1}^p \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (y_{kij} - \bar{y}_{ki})^2}{pn(m-1)}$$

- Проверка статистической значимости:

$$F_1 = \frac{S_1^2}{S_r^2} \quad F_{\text{табл}} = (n-1; pn(m-1))$$

$$F_2 = \frac{S_2^2}{S_r^2} \quad F_{\text{табл}} = (p-1; pn(m-1))$$

$$F_3 = \frac{S_{12}^2}{S_r^2}$$

$$F_{\text{табл}} = ((n-1) \cdot (p-1); pn(m-1))$$

# Пример

- необходимо проанализировать зависимость пластичности полуфабриката от размера субзерна ( 1 фактор ) и объемной доли избыточных фаз ( 2 фактор ). В каждой точке испытывали по три образца

№ \ №		Первый фактор			
		1	2	3	4
Второй фактор	1	2,5 ; 2,8 ; 2,6	2,6 ; 2,6 ; 2,7	3,0 ; 3,2 ; 3,4	2,9 ; 2,4 ; 2,3
	2	3,5 ; 3,8 ; 3,6	3,3 ; 3,8 ; 3,6	3,7 ; 3,7 ; 3,3	3,9 ; 3,8 ; 3,9
	3	4,5 ; 4,9 ; 4,7	4,2 ; 4,9 ; 4,9	4,6 ; 4,4 ; 4,4	4,1 ; 4,8 ; 4,9
	4	6,0 ; 6,3 ; 6,6	6,3 ; 6,3 ; 6,5	6,0 ; 6,0 ; 7,0	6,0 ; 6,3 ; 6,6
	5	8,0 ; 8,3 ; 8,5	8,6 ; 8,0 ; 8,1	8,0 ; 8,5 ; 8,2	8,5 ; 8,5 ; 8,1

# Расчеты

- $S_0^2 = 1,41$ ;  $S_1^2 = 0,081$  ;  $S_2^2 = 632,9$  ;  
 $S_{1,2}^2 = 0,231$  ;  $S_{0,1}^2 = 0,095$ .
- Поделив друг на друга, сравниваем с табличными значениями:
- Для 1-го фактора:  $F_{0,05}(3/40)=2,84$
- Для 2-го фактора:  $F_{0,05}(4/40)=2,61$
- Для взаимодействия:  $F_{0,05}(12/40)=2,00$
- После расчета выясняем, что размер субзерна не влияет на пластичность полуфабриката, на него влияет лишь доля избыточных фаз.

# Дисперсионный анализ

Латинские квадраты

# Латинский квадрат

- это квадратная таблица размером  $n \times n$  элементов, расположенных на поле квадрата таким образом, что каждый из них встречается в каждом столбце и в каждой строке только по одному разу.

	1	2	3	4
1	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
2	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>a</i>
3	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>a</i>	<i>b</i>
4	<i>d</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>

- Если строкам, столбцам и элементам выписной таблицы поставить в соответствие уровни каких – либо факторов ( А, В, С ), то латинский квадрат можно рассматривать как план из эксперимента, позволяющий провести дисперсионный анализ с тремя факторами.
-

# Оценка статистической значимости

$$y = \mu + A_i + B_j + C_k + E_{ijk}$$

$E_{ijk}$  – эффект взаимодействия.

$$\text{ПФЭ} = 4^3 =$$

$y^3 = 64$  опыта  $\Leftrightarrow 4 \times 4 = 16$  – дисперсионный анализ

# Латинский квадрат 4x4

Уровень фактора В	Уровень фактора А			
	A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub>	A <sub>4</sub>
B <sub>1</sub>	C <sub>1</sub>	C <sub>2</sub>	C <sub>3</sub>	C <sub>4</sub>
B <sub>2</sub>	C <sub>2</sub>	C <sub>3</sub>	C <sub>4</sub>	C <sub>1</sub>
B <sub>3</sub>	C <sub>3</sub>	C <sub>4</sub>	C <sub>1</sub>	C <sub>2</sub>
B <sub>4</sub>	C <sub>4</sub>	C <sub>1</sub>	C <sub>4</sub>	C <sub>3</sub>

При проведении эксперимента порядок реализации опытов необходимо рандомизировать, статистические свойства оценок при этом улучшаются.



# Ортогональные планы

- Латинские квадраты называются взаимно ортогональными, если при размещении их элементов на поле общей таблицы каждая пара элементов двух квадратов встречается только по одному разу.

<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>		$\alpha$	$\beta$	$\gamma$		$a\alpha$	$b\beta$	$c\gamma$
<i>b</i>	<i>c</i>	<i>a</i>	✦	$\gamma$	$\alpha$	$\beta$	➔	$b\gamma$	$c\alpha$	$a\beta$
<i>c</i>	<i>a</i>	<i>b</i>		$\beta$	$\gamma$	$\alpha$		$c\beta$	$a\gamma$	$b\alpha$

# Матрица плана эксперимента

- На базе латинского квадрата 3x3

Уровень В	Уровень А		
	A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub>
B <sub>1</sub>	C <sub>1</sub> D <sub>1</sub>	C <sub>2</sub> D <sub>2</sub>	C <sub>3</sub> D <sub>3</sub>
B <sub>2</sub>	C <sub>2</sub> D <sub>3</sub>	C <sub>3</sub> D <sub>1</sub>	C <sub>1</sub> D <sub>2</sub>
B <sub>3</sub>	C <sub>3</sub> D <sub>2</sub>	C <sub>1</sub> D <sub>2</sub>	C <sub>2</sub> D <sub>1</sub>

Уровни факторов С и D располагаются по полю таблицы в виде ортогонального плана

# Методика расчета

- Вычисление сумм результатов по строкам, столбцам и одноименным буквам:  $\sum A, B, C, D$  ( по отдельности).
- Вычисление вспомогательных расчетных сумм:

$$SS_1 = \sum_{p=1}^{n^2} (y_p)^2$$

- где  $p$  – текущий индекс ячейки квадратов

Средние суммы квадратов по строкам, столбцам и латинским буквам:

$$SS_2 = \frac{\sum_{i=1}^n A_i^2}{n} \quad SS_3 = \frac{\sum_{j=1}^n B_j^2}{n} \quad SS_4 = \frac{\sum_{k=1}^n C_k^2}{n} \quad SS_5 = \frac{\sum_{l=1}^n D_l^2}{n}$$

Вычисление корректирующего члена

$$SS_6 = \frac{\left( \sum_{p=1}^{n^2} y_p \right)^2}{n^2}$$

Вычисление сумм квадратов, характеризующих эффекты строк, столбцов, латинских букв

$$SS_A = SS_2 - SS_6$$

$$SS_C = SS_4 - SS_6$$

$$SS_B = SS_3 - SS_6$$

$$SS_D = SS_5 - SS_6$$

Вычисление остаточной суммы квадратов

$$SS_{ост.} = SS_1 - (SS_A + SS_B + SS_C + SS_D + SS_6)$$

Вычисление оценок эффектов строк, столбцов и латинских букв матрицы плана, определяемых как частные от деления соответствующих сумм квадратов на числа степеней свободы, с которой они оцениваются

$$SSA/(n-1); SSB/(n-1); SSC/(n-1); SSD/(n-1).$$

Проверить по критерию Фишера значимость оценок эффектов строк, столбцов и буквенных оценок

$$F_A = \frac{SS_A / (n-1)}{SS_{ост.} / [(n-1) \cdot (n-2)]}$$

# Дисперсионный анализ результатов экспериментов (без повторных опытов)

Факторы дисперсионной модели	Число степеней свободы	Суммы квадратов эффектов	Средний квадрат	Расчетное значение $F$ -критерия	Табличное значение $F$ -критерия
Строки	$(n - 1)$	$SS_A$	$MS_A = \frac{SS_A}{n-1}$	$F_A = \frac{MS_A}{MS_{ост}}$	
Столбцы	$(n - 1)$	$SS_B$	$MS_B = \frac{SS_B}{n-1}$	$F_B = \frac{MS_B}{MS_{ост}}$	
Латинские буквы	$(n - 1)$	$SS_C$	$MS_C = \frac{SS_C}{n-1}$	$F_C = \frac{MS_C}{MS_{ост}}$	
Остаток (суммарная ошибка)	$(n-1) \times (n-2)$	$SS_{ост}$	$MS_{ост} = \frac{SS_{ост}}{(n-1)(n-2)}$	—	
Итого . . .	$(n^2 - 1)$				

# Дисперсионный анализ результатов экспериментов (с повторными опытами)

Факторы дисперсионной модели	Число степеней свободы	Суммы квадра- тов эффек- тов	Средний квадрат	Расчетное значение <i>F</i> -критерия	Таблич- ное зна- чение <i>F</i> -кри- терия
Строки	$(n - 1)$	$SS_A$	$MS_A = \frac{SS_A}{n - 1}$	$F_A = \frac{MS_A}{MS_{\text{ош}}}$	
Столбцы	$(n - 1)$	$SS_B$	$MS_B = \frac{SS_B}{n - 1}$	$F_B = \frac{MS_B}{MS_{\text{ош}}}$	
Латинские буквы	$(n - 1)$	$SS_C$	$MS_C = \frac{SS_C}{n - 1}$	$F_C = \frac{MS_C}{MS_{\text{ош}}}$	
Остаток	$(n - 1) \times$ $\times (n - 2)$	$SS_{\text{ост}}$	$MS_{\text{ост}} =$ $\frac{SS_{\text{ост}}}{(n - 1)(n - 2)}$	$F_{\text{ост}} = \frac{MS_{\text{ост}}}{MS_{\text{ош}}}$	
Ошибка (случай- ное рассеяние ре- зультатов опыта)	$n^2(m - 1)$	$SS_{\text{ош}}$	$MS_{\text{ош}} =$ $\frac{SS_{\text{ош}}}{n^2(m - 1)}$	—	
Итого . . .	$n^2 m - 1$	$SS_{\text{общ}}$			

# Пример

- Исследовали малоцикловую усталость (МЦУ) стали ВНЛ-3 в зависимости от чистоты обработки поверхности.  $\bar{N}_F$
- Предварительные исследования показали, что, хотя с повышением чистоты поверхности средние значения долговечности образцов несколько увеличиваются, для возрастающих классов чистоты поверхности значения МЦУ, как правило, попадают в пределы доверительных интервалов оценки средних значений для более низких классов чистоты.
- Было отмечено также, что результаты испытания образцов из металла разных плавов, образцов, испытанных в разное время и на разных испытательных машинах, ложатся на кривые малоцикловой усталости с большим разбросом. Так, при  $\sigma_{\max} = 800 \text{ МПа}$  разброс значений долговечности отдельных образцов составлял (суммарно по всем имевшимся результатам испытаний):
  - Для МЦУ на базе тысячи циклов
  - (19-59) циклов для точения,  $\nabla 4$ ;
  - (21-55) циклов для точения,  $\nabla 5$ ;
  - (40-60) циклов для точения,  $\nabla 6$ ;
  - (29-65) циклов для шлифования,  $\nabla 7$ .



Полученные результаты не могли быть объяснены только случайным рассеянием долговечности. В этой связи была поставлена задача произвести дисперсионный анализ результатов испытаний образцов, имеющих разную чистоту поверхности ( X<sub>1</sub> ). В качестве характерных источников неоднородности условий испытаний были выбраны:

уровень напряжений цикла X<sub>2</sub>;

плавка металла, X<sub>3</sub>;

испытательная машина, X<sub>4</sub>.

X<sub>1</sub> – чистота поверхности образца ( ∇ 4 ∇ 5 ∇ 6 ∇ 7 ).

X<sub>2</sub> – уровень напряжения цикла ( нагрузка ) 100, 90, 80, 70  
кгс/мм<sup>2</sup>

X<sub>3</sub> – плавка ( А, В, С, D ).

X<sub>4</sub> – разные испытания машины одного класса ( α, β, γ, δ).

# Матрица плана эксперимента

$X_2$	$X_1$			
	$\Delta 4$	$\Delta 5$	$\Delta 6$	$\Delta 7$
100	$A\gamma$	$B\delta$	$C\alpha$	$D\beta$
90	$C\delta$	$D\gamma$	$A\beta$	$B\alpha$
80	$B\beta$	$A\alpha$	$D\delta$	$C\gamma$
70	$D\alpha$	$C\beta$	$B\gamma$	$A\delta$

# Химический состав ВНЛ-3

Обозначение плавки в матрице плана	Содержание элементов, в %							
	C	Cr	Ni	Cu	Mo	Si	Mn	Nb
<i>A</i>	0,07	14,1	5,0	1,3	1,74	0,17	0,65	0,07
<i>B</i>	0,08	13,2	5,5	1,6	1,74	0,22	0,67	0,05
<i>C</i>	0,06	13,4	4,6	1,55	1,60	0,50	0,72	0,06
<i>D</i>	0,08	13,7	5,5	1,58	1,40	0,22	0,75	0,05

# Средние значения результатов экспериментов, тыс. циклов

$X_2$	$X_1$			
	$\Delta 4$	$\Delta 5$	$\Delta 6$	$\Delta 7$
100	8,2	10,2	8,3	5,9
90	15,1	25,8	22,3	21,2
80	48,9	25,7	49,6	36,2
70	74,1	69,5	80,9	57,1

В каждой ячейке плана было испытано по 4 образца. Испытания проводились при рандомизации экспериментов.

# Предварительные расчеты

$$SS_1 = \sum_{p=1}^N y_p^2 = (8,2 + 10,2 + 8,3 + \dots)^2 = 29063,9$$

$$SS_2 = \frac{\sum_{i=1}^N A_i^2}{n} = \frac{1062,8 + 7123,4 + 25728,2 + 79298,6}{4} = 28303,2$$

$$SS_3 = \frac{\sum_{j=1}^N B_j^2}{n} = \frac{21403,7 + 17213,4 + 25953,2 + 14496,2}{4} = 19766,6$$

$$SS_5 = \frac{\sum_{l=1}^N D_l^2}{n} = \frac{16718,5 + 21491,6 + 22831,2 + 17424,0}{4} = 19616,3$$

$$SS_4 = \frac{\sum_{k=1}^N C_k^2}{n} = \frac{12836,9 + 25985,4 + 16666,8 + 24149,2}{4} = 19909,6$$

$$SS_{\text{кор}} = \frac{\left( \sum_{p=1}^N y_p \right)^2}{N} = \frac{559,0^2}{16} = 19530,1$$

# Предварительные расчеты дисперсионного анализа

X <sub>2</sub>	X <sub>1</sub>				Итого	Квадрат А
	Δ 4	Δ 5	Δ 6	Δ 7		
100	8,2	10,2	8,3	5,9	32,6	(32,6) <sup>2</sup>
90	15,1	25,8	22,3	21,2	84,4	(84,4) <sup>2</sup>
80	48,9	25,7	49,6	36,2	160,4	(160,4) <sup>2</sup>
70	74,1	69,5	80,9	57,1	281,6	(281,6) <sup>2</sup>
Итого	146,3	131,2	161,1	120,4	559,0	–
Квадрат В	21403,7	17213,4	25953,2	14496,2		–
Эффект латинских букв					Квадрат С	
А	8,2	25,7	22,3	57,1	113,3	12836,9
В	48,9	10,2	80,9	21,2	161,2	25985,4
С	15,1	69,5	8,3	36,2	129,1	16666,8
Д	74,1	25,8	49,6	5,9	155,4	24149,2
Эффект греческих букв.					Квадрат Д	
А	74,1	25,7	8,3	21,2	129,3	16718,5
β	48,9	69,5	22,3	5,9	146,6	21491,6
γ	8,2	25,8	80,9	36,2	151,7	22831,2
δ	15,1	10,2	49,6	57,1	132	17424,0

# Вспомогательные расчеты

Суммы квадратов, характеризующие проверяемые эффекты, определены через вспомогательные суммы:

$$SS_{(строк)} = SS_2 - SS_{кор.} = 8773,2$$

$$SS_{(столбцов)} = SS_3 - SS_{кор.} = 236,6$$

$$SS_{(греч.букв)} = SS_5 - SS_{кор.} = 86,3$$

$$SS_{(лат.букв)} = SS_4 - SS_{кор.} = 379,5$$

$$SS_{(общ.)} = SS_1 - SS_{кор.} = 9533,9$$

$$SS_{ост.} = SS_{(общ.)} - [SS_{(строк)} + SS_{(столбцов)} + SS_{(лат.букв)} + SS_{(греч.букв)}] = 58,4$$

# Дисперсионный анализ результатов

Исследуемый фактор	Число степеней свободы	Сумма квадратов	Средний квадрат*	F <sub>критическое</sub>	
				F <sub>расчетное</sub>	F <sub>табличное</sub> (α = 0,9)
уровень нагрузки (строки)	3	8773	2924	150,3	5,39
чистота поверхности (столбцы)	3	236	78	4	5,39
плавка (латинские буквы)	3	379	126	6,5	5,39
испытательная машина (греческие буквы)	3	86	28	1,5	5,39
остаток	3	58	19		

Средний квадрат  $M_i S_i = \frac{SS_i}{n - 1}$



# Выводы

- Эффект от испытательных машин статистически не значим.
- Шероховатость поверхности может быть использована 4 или 5, т.к. эта сталь имеет невысокую чувствительность к чистоте поверхности.
- Уровень нагрузки статистически значим.
- Эффект от различия в плавках может перекрывать эффект от влияния чистоты поверхности.