Математика 2 семестр.

Лекция № 1.

Неопределенный интеграл.

Первообразная.

В дифференциальном исчислении по заданной функции $F(x)$ отыскивали её производную $F'(x)$. Рассмотрим обратную задачу: по заданной функции $f(x)$ восстановить функцию $F(x)$, для которой:

$$F'(x) = f(x).$$

Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$.

Пример. $f(x) = \cos x$, найдём первообразные для функции $f(x)$: $F(x) = \sin x$, $F(x) = \sin x + 5$, $F(x) = \sin x + C$.

Из примера следует, что задача об отыскании первообразной имеет не единственное решение. Если $F(x)$ является первообразной для $f(x)$, то и $F(x) + C$ также является первообразной ($C = const$).

Теорема о разности первообразных.

Теорема. Всякая непрерывная функция имеет бесчисленное множество первообразных, причём любые две из них отличаются друг от друга только постоянным слагаемым.

Доказательство. Пусть $F_1(x)$ и $F_2(x)$ - две первообразные функции для $f(x)$, докажем, что $F_2(x) = F_1(x) + C$, где $C = const$.

Предположим, что разность между функциями $F_1(x)$ и $F_2(x)$ является функцией: $\varphi(x) = F_2(x) - F_1(x)$, по условию теоремы

$$F_1'(x) = f(x),\quad F_2'(x) = f(x).$$

Тогда $\varphi'(x) = F_2'(x) - F_1'(x) = f(x) - f(x) = 0$.

Зафиксируем значение переменной x_0, пусть x – произвольное значение. По формуле Лагранжа

$\varphi(x) - \varphi(x_0) = \varphi'(c)(x - x_0)$, $x_0 < c < x$,

$\varphi'(c) = 0$, тогда $\varphi(x) - \varphi(x_0) = 0$, значит $\varphi(x) = \varphi(x_0) = const$

Следовательно, $F_2(x) = F_1(x) + C$, где $C = const$

Неопределённый интеграл.

Совокупность всех первообразных функции *f(x)* называют **неопределенным интегралом** функции и обозначают $\int f(x)dx$;

f(x) - подынтегральная функция;

f(x)dx - подынтегральное выражение;

x - переменная интегрирования.

Действие отыскания неопределенного интеграла или, что то же самое, нахождение всех первообразных от данной функции, называется **интегрированием** данной функции.

Интегральная кривая.

Пусть требуется найти кривую $y = F(x)$, зная, что тангенс угла наклона касательной в каждой её точке есть заданная функция $f(x)$. Согласно геометрическому смыслу производной, тангенс угла наклона касательной в данной точке кривой равен значению производной в этой точке. Значит, нужно найти такую функцию $F(x)$, для которой $F'(x) = f(x)$. Следовательно, задача свелась к нахождению первообразной. Таким образом, $y = \int f(x)dx$, или $y = F(x) + C$. Ясно, что условию задачи удовлетворяет не одна кривая, а семейство кривых. Причем, если $y = F(x)$ одна из таких кривых, то всякая другая может быть получена из неё параллельным переносом вдоль оси OY.

Для того чтобы из данного семейства кривых выделить одну определенную кривую, требуется дополнительное условие. Например, можно потребовать, чтобы кривая проходила через заданную точку (x_0, y_0). Координаты этой точки должны удовлетворять уравнению искомой кривой: $y_0 = F(x_0)$+C. Отсюда

$$C = y_0 - F(x_0).$$

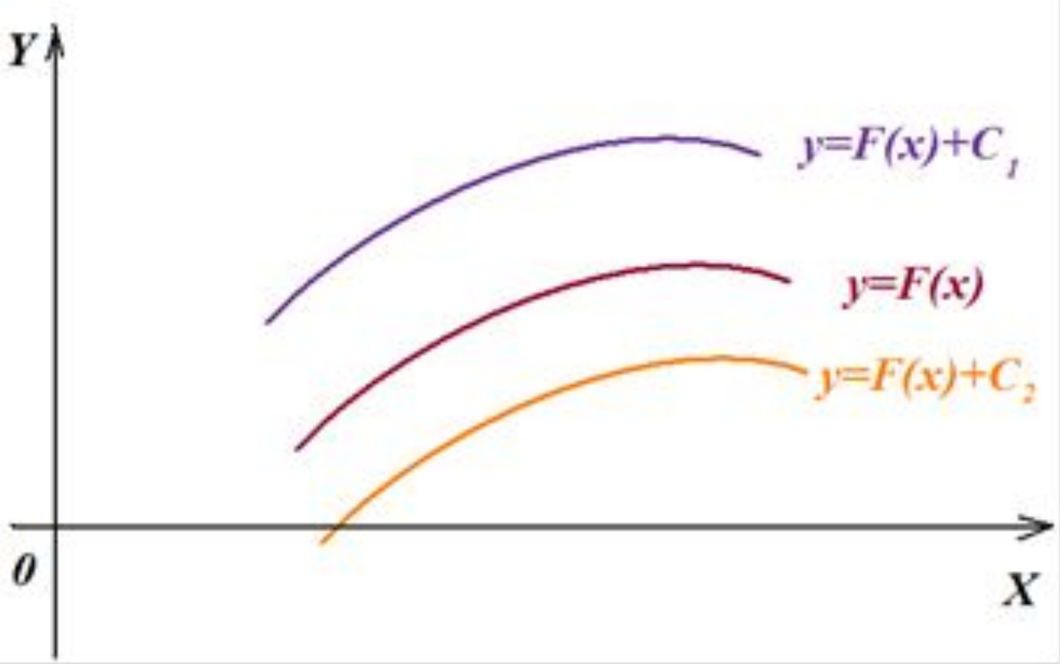

График первообразной функции от *f(x)* называют **интегральной кривой**.

Неопределенный интеграл геометрически представляется семейством всех интегральных кривых.

Таблица интегралов.

Формулы интегрирования прямо вытекают из формул дифференцирования основных элементарных функций, каждая из них легко проверяется дифференцированием.

1. $\int x^{n}dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \; n \neq -1, \; \int 0\,dx = C, \; \int dx = x + C.$
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$
3. $\int a^{x}dx = \frac{a^{x}}{\ln a} + C, \; a > 0, a \neq 1, \; \int e^{x}dx = e^{x} + C.$
4. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C.$
5. $\int \cos x\,dx = \sin x + C.$
6. $\int \frac{dx}{\cos^{2} x} = \operatorname{tg} x + C.$
7. $\int \frac{dx}{\sin^{2} x} = -\operatorname{ctg} x + C.$
8. $\int \frac{dx}{a^{2} + x^{2}} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C.$
9. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^{2} - x^{2}}} = \arcsin\frac{x}{a} + C.$
10. $\int \frac{dx}{x^{2} - a^{2}} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^{2} \pm a^{2}}} = \ln\left|x + \sqrt{x^{2} \pm a^{2}}\right| + C.$

Взаимно - обратные действия дифференцирования и интегрирования.

Возведение в степень и извлечение корня дают примеры взаимно – обратных математических операций:

$$\sqrt[n]{a^{n}} = a, \ \left(\sqrt[n]{a}\right)^{n} = a, \ a > 0 .$$

Операции дифференцирования и интегрирования являются взаимно – обратными :

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x),$$

$$d\left(\int f(x)dx\right) = \left(\int f(x)dx\right)'dx = f(x)dx,$$

$$\int F'(x)dx = \int dF(x) = F(x) + C.$$

Основные правила интегрирования.

1. Интеграл от алгебраической суммы нескольких функций равен алгебраической сумме интегралов от слагаемых: [illegible] $\pm$ [illegible] $=$ [illegible] $\pm$ [illegible].
2. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла: [illegible] $=$ [illegible] ([illegible] $=$ [illegible]).
3. Вид формул интегрирования не изменится, если независимую переменную [illegible] заменить любой дифференцируемой функцией от [illegible] (свойство инвариантности) :
[illegible] $=$ [illegible]([illegible]) , [illegible] $=$ [illegible] $+$ [illegible] [illegible] [illegible] $=$ [illegible] $+$ [illegible] .

Методы интегрирования. Интегрирование подстановкой.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна, функция $\varphi(t)$ непрерывна и дифференцируема, $\varphi'(t) \neq 0$. Заменим переменную интегрирования $x = \varphi(t)$:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))d(\varphi(t)) = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)dt.$$

Пример.

$$\int \sin x \cos x\, dx = \int \sin x\, d\sin x = |\sin x = t| = \int t\,dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{1}{2}\sin^2 x + C.$$

Методы интегрирования. Интегрирование по частям.

Возьмём формулу дифференциала произведения :

$$du \cdot v = udv + vdu, u = u(x), v = v(x),$$

$$udv = d\ uv - vdu,$$

Проинтегрируем последнее равенство : $\int udv = uv - \int vdu.$

Эта формула определяет метод интегрирования по частям. Метод используют в том случае, когда функция $u = u(x)$ упрощается после дифференцирования (например, функции lnx , $P_n(x), arcsinx$, $arctgx$ и т.д.).

Пример.

$$\int \mathrm{x} \cdot \sin 2\mathrm{x} \cdot \mathrm{dx} = \left\{ \begin{matrix} u = x, du = dx, \\ dv = sin2x, \ \ v = \int sin2xdx = -\frac{1}{2}cos2x \end{matrix} \right\} =$$

$$-\frac{1}{2}xcos2x + \frac{1}{2}\int cos2xdx = \frac{1}{2}\left(-xcos2x + \frac{1}{2}sin2x\right) + C.$$

Примеры интегрирования.

Пример 1. Найдем неопределенный интеграл $\int \frac{(1+\sqrt{x})^2}{x} dx$.

Используем формулу для квадрата суммы, операции с алгебраическими дробями, свойство линейности неопределённого интеграла и таблицу интегралов:

$$\int \frac{(1+\sqrt{x})^2}{x} dx = \int \frac{1+2\sqrt{x}+x}{x} dx = \int \left(\frac{1}{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}+1\right)dx =$$

$$= \int dx + 2\int x^{-1/2} dx + \int dx = ln|x| + 4\sqrt{x} + x + C.$$

Примеры интегрирования.

Пример 2. Найдем неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$.

Применим выделение полного квадрата, формулу линейной замены переменной и табличные интегралы:

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+5} = \int \frac{dx}{(x^2+2x+1)+4} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+2^2} = \frac{1}{2} arctg \frac{x+1}{2} + C.$$

Пример 3. Найдем неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{x^2+2x-3}$.

$$\int \frac{dx}{x^2+2x-3} = \int \frac{dx}{(x^2+2x+1)-4} = \int \frac{dx}{(x+1)^2-2^2} =$$

$$= \frac{1}{2\cdot 2} ln\left|\frac{x+1-2}{x+1+2}\right| + C = \frac{1}{4} ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right| + C.$$

Два рассмотренных примера похожи по методу нахождения, но в итоге сводятся к разным табличным интегралам.

Интегралы от тригонометрических функций *часто можно найти, применяя формулы тригонометрии для упрощения подынтегрального выражения.*

Пример 4. Найдем неопределенный интеграл $\int \cos^2 x \, dx$.

Применим для упрощения подынтегрального выражения формулу понижения степени. Затем используем свойство линейности неопределенного интеграла.

$$\int \cos^2 x \, dx = \int \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x \, dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

.

Пример 5. Найдем неопределенный интеграл $\int \sin 4x \cos 3x \, dx$.

Применим формулу преобразования произведения тригонометрических функций в сумму или разность.

$$\int \sin 4x \cos 3x \, dx = \int \frac{1}{2}\left[\sin(4x + 3x) + \sin(4x - 3x)\right]dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int (\sin 7x + \sin x)\, dx = -\frac{1}{14}\cos 7x - \frac{1}{2}\cos x + C .$$

Примеры интегрирования методом замены переменной. При применении метода замены переменной следует в последней выкладке перейти к исходной переменной.

Пример.6. Найдем неопределенный интеграл $\int \sin^2 x \cos x \; dx$.

$$\int \sin^2 x \cos x \; dx = \left| \begin{matrix} t = \sin x \\ dt = \cos x \; dx \end{matrix} \right| = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{1}{3} \sin^3 x + C.$$

Пример 7. Найдем неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{x \ln x}$.

$$\int \frac{dx}{x \ln x} = \left| \begin{matrix} t = \ln x \\ dt = \dfrac{dx}{x} \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\ln x| + C.$$

Примеры интегрирования методом замены переменной.

Пример 8. Найдем неопределенный интеграл $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$.

$$\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1-e^{2x}}} = \left| \begin{array}{l} t = e^x \\ dt = e^x dx \end{array} \right| = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + C = \arcsin e^x + C.$$

Пример 9. Найдем неопределенный интеграл $\int \frac{e^{arctg\, x} dx}{1+x^2}$.

$$\int \frac{e^{arctg\, x} dx}{1+x^2} = \left| \begin{array}{l} t = arctg\, x \\ dt = \dfrac{dx}{1+x^2} \end{array} \right| = \int e^t dt = e^t + C = e^{arctg\, x} + C.$$

Пример 10. Найдем неопределенный интеграл $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+x^6}}$.

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+x^6}} = \left| \begin{array}{l} t = x^3 \\ dt = 3x^2 dx \end{array} \right| = \int \frac{dt}{3\sqrt{1+t^2}} = \frac{1}{3} \ln\left| t + \sqrt{1+t^2} \right| + C = \frac{1}{3} \ln\left| x^3 + \sqrt{1+x^6} \right| + C$$

Примеры интегрирования методом интегрирования по частям.

Пример 11. Найдем неопределенный интеграл $\int x\, e^{2x} dx$.

$$\int x\, e^{2x} dx = \left| \begin{matrix} u = x & dv = e^{2x} dx \\ du = dx & v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{matrix} \right| = \frac{1}{2} x\, e^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx = \frac{x}{2} e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + C$$

Пример 12. Найдем неопределенный интеграл $\int ln\,(x - 1)\; dx$.

$$\int ln\,(x - 1)\; dx = \left| \begin{matrix} u = ln\,(x - 1) & dv = dx \\ du = \dfrac{dx}{x - 1} & v = x \end{matrix} \right| = x\, ln\,(x - 1) - \int \frac{x}{x - 1} dx =$$

$$= x\, ln(x - 1) - \int \frac{x - 1 + 1}{x - 1} dx = x\, ln(x - 1) - \int \left(1 + \frac{1}{x - 1}\right) dx = x\, ln\,(x - 1) - x - ln\left|x - 1\right| + C$$

Примеры интегрирования методом интегрирования по частям.

Пример 13. Найдем неопределенный интеграл

$$\int arctg\,x\,dx = \left| \begin{matrix} u = arctg\,x & dv = dx \\ du = \dfrac{dx}{1+x^2} & v = x \end{matrix} \right| = x\ arctg\,x - \int \frac{x}{1+x^2}dx =$$

$$= x \cdot arctg\,x - \frac{1}{2}\int \frac{d\left(1+x^2\right)}{1+x^2} = x \cdot arctg\,x - \frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right| + C\,.$$

Пример 14. Найдем неопределенный интеграл

$$\int x^2 \sin\frac{x}{3}dx\ .$$

$$\int x^2 \sin\frac{x}{3}dx = \left| \begin{matrix} u = x^2 & dv = \sin\dfrac{x}{3} \\ du = 2x\,dx & v = -3\cos\dfrac{x}{3} \end{matrix} \right| = -3x^2 \cos\frac{x}{3} + 6\int x\cos\frac{x}{3}dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = x & dv = \cos\dfrac{x}{3} \\ du = dx & v = 3\sin\dfrac{x}{3} \end{matrix} \right| = -3x^2 \cos\frac{x}{3} + 6\left(3x\sin\frac{x}{3} - \int 3\sin\frac{x}{3}dx\right) =$$

$$= -3x^2 \cos\frac{x}{3} + 18x\sin\frac{x}{3} + 54\cos\frac{x}{3} + C\,.$$

В заключение заметим, что в дифференциальном исчислении производная от любой элементарной функции есть функция элементарная. Другое дело операция, обратная дифференцированию, - интегрирование. Можно привести многочисленные примеры таких элементарных функций, первообразные от которых хотя и существуют, но не являются элементарными функциями. Так, например, хотя для функций e^{-x^2}; $\frac{\sin x}{x}$; $\frac{\cos x}{x}$; $\frac{1}{\ln x}$ существуют первообразные, но они не выражаются в элементарных функциях. Несмотря на это, все эти первообразные хорошо изучены и для них составлены подробные таблицы, помогающие практически использовать эти функции.

Если первообразная для некоторой функции не является элементарной функцией, то говорят, что *интеграл не берется в элементарных функциях*.

Интегралы от рациональных дробей.

Пример 15. Найдем неопределенный интеграл $\int \frac{4dx}{5x+3}$.

Используем линейную замену переменных.

$$\int \frac{4dx}{5x+3} = 4 \cdot \frac{1}{5} \int \frac{5dx}{5x+3} = \left| \begin{matrix} u = 5x+3 \\ du = 5dx \end{matrix} \right| = \frac{4}{5} \int \frac{du}{u} = \frac{4}{5} ln|u| + C = \frac{4}{5} ln|5x+3| + C$$

.

Пример 16. Найдем неопределенный интеграл $\int \frac{7dx}{(3x-2)^2}$.

$$\int \frac{7dx}{(3x-2)^2} = 7 \cdot \frac{1}{3} \int \frac{3\ dx}{(3x-2)^2} = \left| \begin{matrix} u = 3x-2 \\ du = 3dx \end{matrix} \right| = \frac{7}{3} \int \frac{du}{u^2} = \frac{7}{3} \cdot \left(-\frac{1}{u} \right) + C =$$

$$= -\frac{7}{3(3x-2)} + C = -\frac{7}{9x-6} + C .$$

Интегралы от рациональных дробей.

Пример 17. Найдем неопределенный интеграл $\int \frac{2x+1}{x^2+16}dx$.

$$\int \frac{2x+1}{x^2+16}dx = \int \frac{2x}{x^2+16}dx + \int \frac{dx}{x^2+16} = \int \frac{d\left(x^2+16\right)}{x^2+16} + \int \frac{dx}{x^2+4^2} =$$

$$= \ln\left|x^2+16\right| + \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x}{4} + C.$$

Пример 18. Найдем неопределенный интеграл $\int \frac{x^2}{x+1}dx$.

$$\int \frac{x^2}{x+1}dx = \int \frac{x^2-1+1}{x+1}dx = \int \frac{(x-1)(x+1)+1}{x+1}dx = \int\left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)dx =$$

$$= \int x\,dx - \int dx + \int \frac{1}{x+1}dx = \frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| + C.$$

Литература.

- Боронина Е.Б. Математический анализ [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Боронина Е.Б.— Электрон. Текстовые данные.— Саратов: Научная книга, 2012.— 159 с.— Режим доступа: http://www. iprbooksho p.ru/6298. — ЭБС «IPRbooks»
- Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. Полный курс [Текст] : [учебное пособие] / Д. Т. Письменный. - 9-е изд. - Москва : Айрис-пресс, 2010. - 603 с. : ил., табл. - (Высшее образование). - ISBN 978-5-8112-4073-9
- Шипачев, В. С.   Курс высшей математики [Текст] : учебник для вузов / В. С. Шипачев ; под ред. А. Н. Тихонова ; - 4-е изд., испр. - Москва : Оникс, 2009. - 600 с. : ил. - ISBN 978-5-488-02067-2