КЛАССИФИКАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Уравнения гиперболического типа

Волновое уравнение

$$\boxed{u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(t, x)}$$

$$u_{tt} = a^2 (u_{xx} + u_{yy}) + f(t, x, y)$$

$$u_{tt} = a^2 (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + f(t, x, y, z)$$

Оператор Лапласа: $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$

$$\boxed{u_{tt} = a^2 \Delta u + f(t, x, y, z)}$$

Волновое уравнение описывает процессы распространения малых возмущений с постоянной скоростью (упругие колебания):

a – скорость звука

Для **поперечных** колебаний: $a = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}}$

T_0 – постоянное натяжение,

ρ_0 – постоянная плотность.

Для **продольных** колебаний: $a = \sqrt{\frac{k_0}{\rho_0}}$

k_0 – постоянный модуль Юнга,

ρ_0 – постоянная плотность.

Для распространения возмущений в газе: $a = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}$

γ – показатель политропы (показатель адиабаты) газа,

$\gamma = 1.407$ – для воздуха,

p_0 – постоянное давление,

ρ_0 – постоянная плотность.

Телеграфное уравнение

$$i_{xx} = (CL)i_{tt} + (CR + GR)i_t + (GR)i$$

$$v_{xx} = (CL)v_{tt} + (CR + GR)v_t + (GR)v$$

i – сила тока; v – напряжение;
R – сопротивление,
коэффициенты:
L – самоиндукции, C – емкости, G – утечки,
все R, L, C, G – рассчитаны на единицу длины.

$$\boxed{a = \sqrt{\frac{1}{CL}}}$$

Уравнения параболического типа
Линейное уравнение теплопроводности

$$\boxed{\begin{gathered} u_t = a^2 u_{xx} + f(t,x) \\ u_t = a^2 \Delta u + f(t,x,y,z) \end{gathered}}$$

Описывает распространение тепла, процессы фильтрации, диффузии:

a^2 – коэффициент теплопроводности или диффузии

Уравнения эллиптического типа
Уравнения Лапласа и Пуассона

$$\boxed{\Delta u = 0\ ;\quad \Delta u = f(x, y, z)}$$

Описывает стационарные процессы: прогиб балки, распределение температуры, распределение примесей и т.п.

Объяснение терминологии:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(t,x); \quad tt = xx: \quad t^2 = x^2 + 1 \text{ гипербола}$$

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(t,x); \quad t = xx: \quad t = x^2 \text{ парабола}$$

$$u_{xx} + u_{yy} = 0; \quad xx + yy: \quad x^2 + y^2 = 1 \text{ эллипс}$$

ЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

$$u_t = a^2 u_{xx} \qquad (1)$$

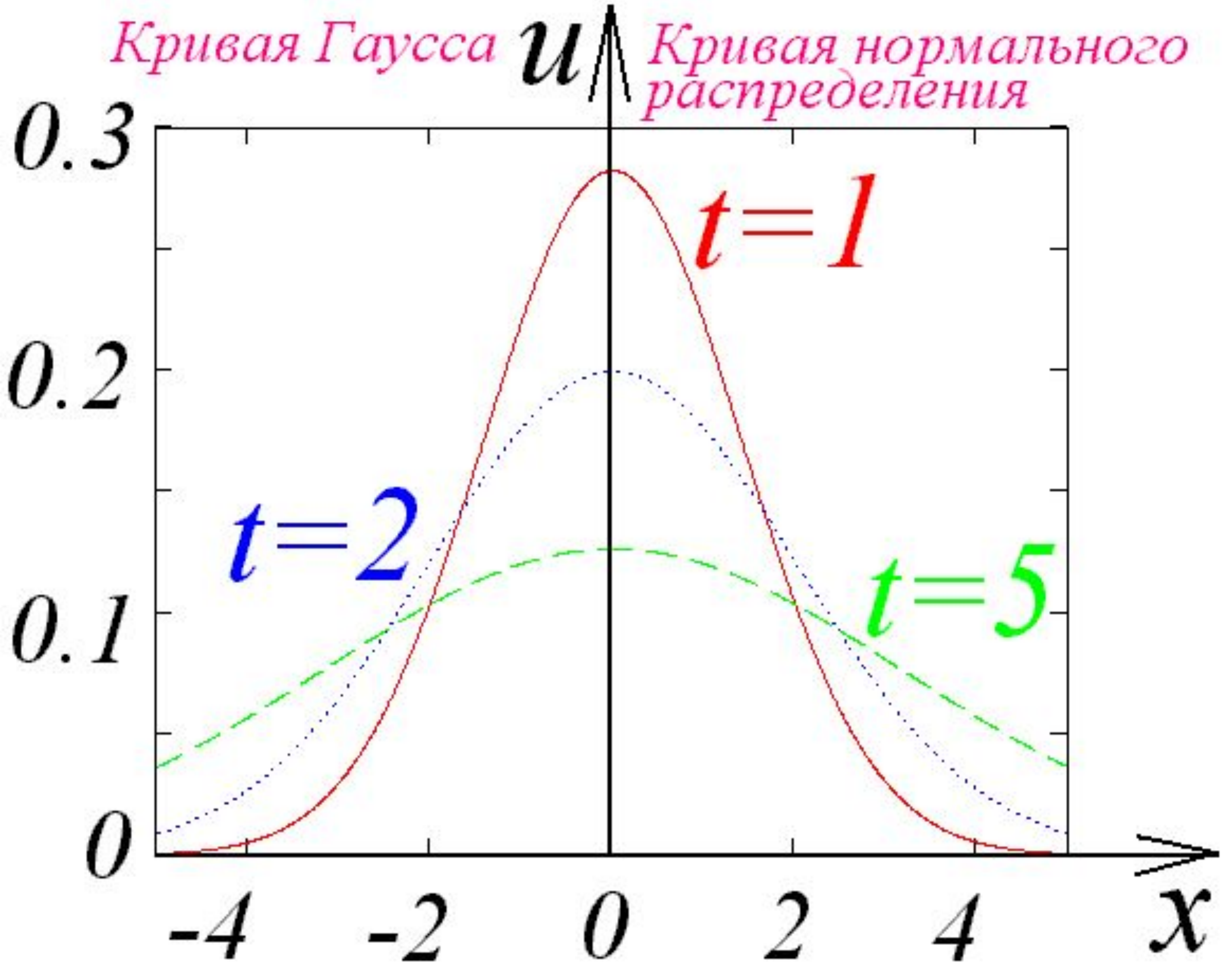
$u(t,x)$ — температура;
a^2 — коэффициент теплопроводности,
тогда уравнение (1) есть математическая форма закона Фурье для теплопроводности.

$u(t,x)$ — давление в фильтрационном потоке (воды, газа), распространяющегося в пористой среде;
a^2 — коэффициент фильтрации,
тогда уравнение (1) есть математическая форма закона Дарси для фильтрации конденсата в пористой среде.

уравнение (1) — уравнение параболического типа

Точное решение – **фундаментальное решение**:

$$\boxed{u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{2a} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot e^{-x^2/(4a^2 t)}}$$



Задача Коши.

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} \\ u(t,x)|_{t=0} = \varphi_0(x) \end{cases} \qquad (2)$$

Теорема. *Если функция $\varphi_0(x)$ — «хорошая», то задача Коши (2) при $t \geq 0$ поставлена корректно, т.е. у нее при $t \geq 0$ существует единственное решение, которое при «малых» изменениях входных данных задачи изменяется «не сильно».*

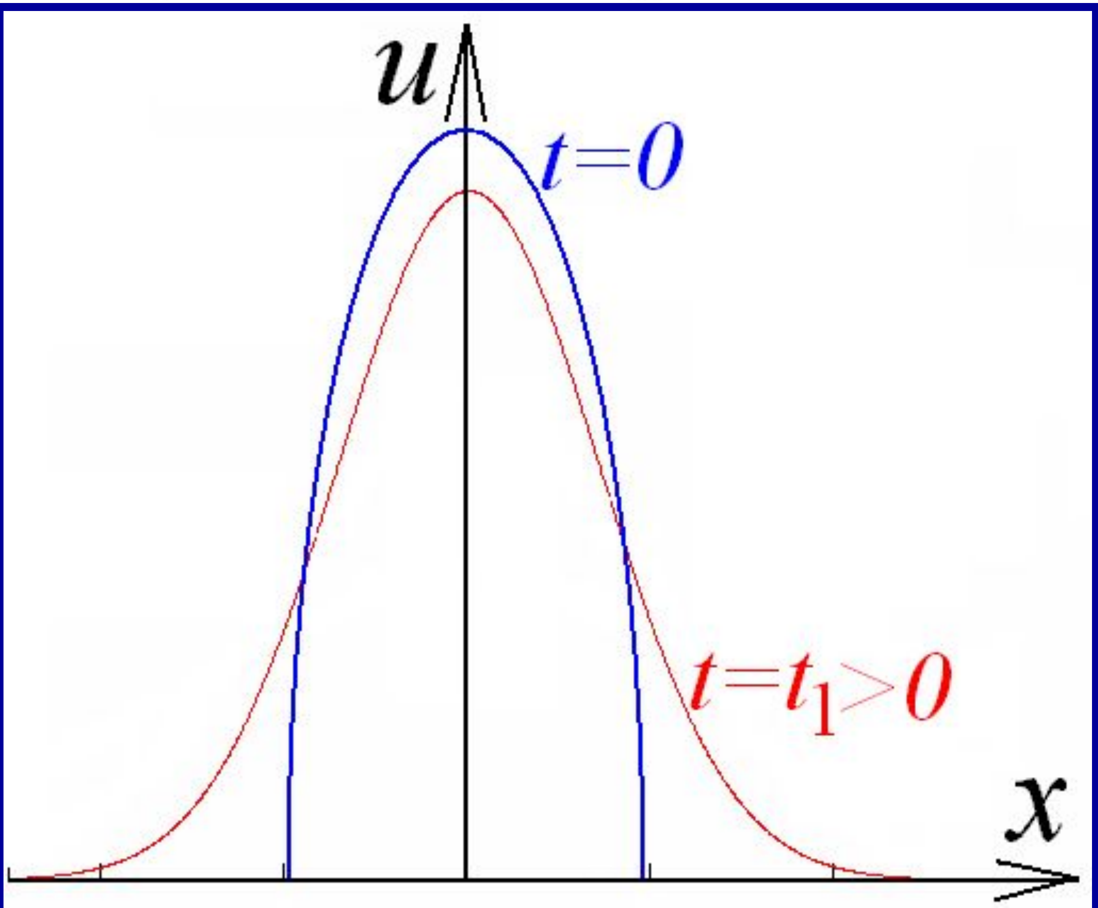
$$\boxed{u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{2a} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi_0(\xi) e^{-(x-\xi)^2/(4a^2 t)}\, d\xi}$$

Скорость распространения тепла

У решений **линейного** уравнения теплопроводности

$$u_t = (a^2 u_x)_x, \quad \text{т.е.} \quad u_t = a^2 u_{xx}; \quad \text{здесь} \quad a^2 = \text{const}$$

бесконечная скорость распространения тепла.

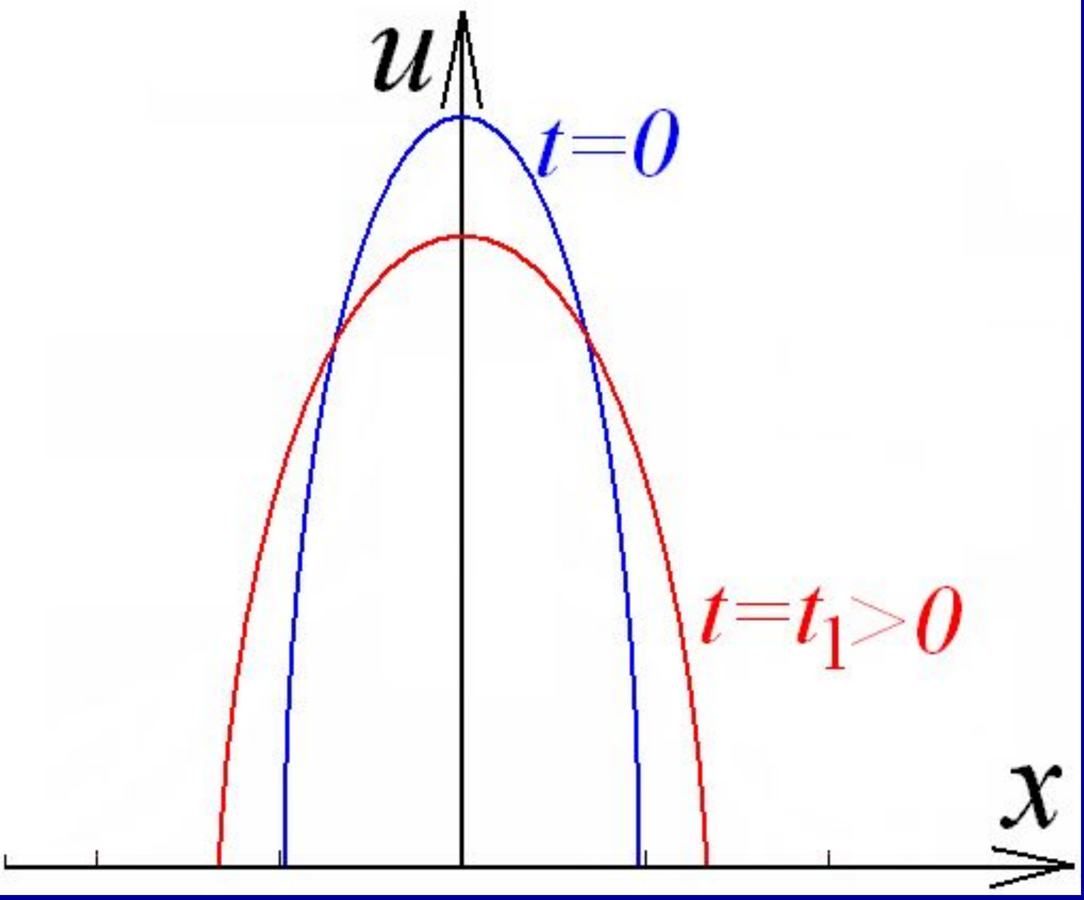


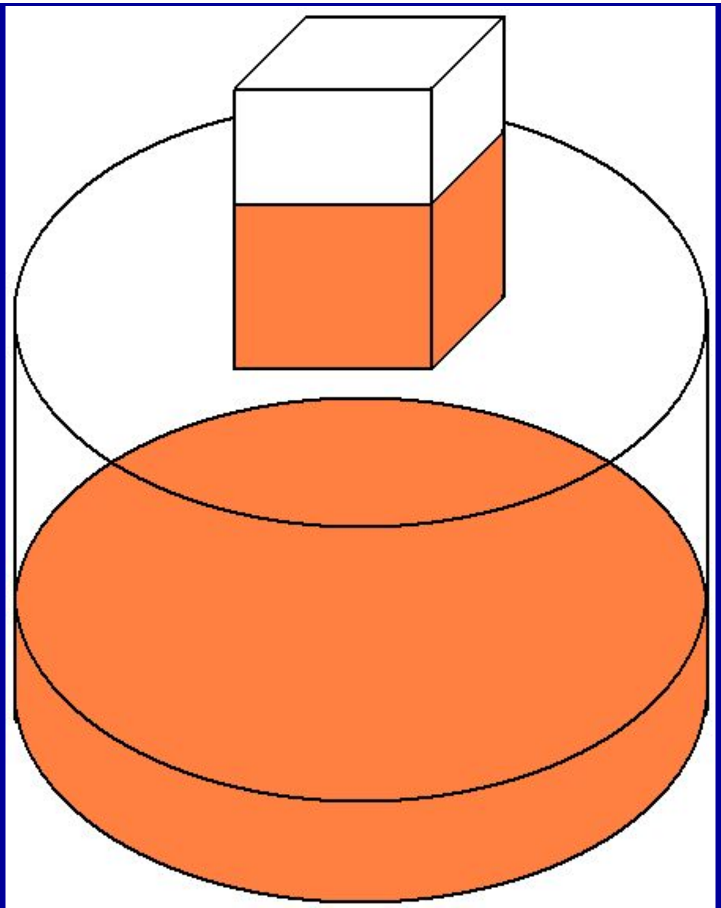
У решений **нелинейного** уравнения теплопроводности

$$u_t = (uu_x)_x, \quad \text{т.е.} \quad u_t = uu_{xx} + u_x^2; \quad \text{здесь} \quad a^2 = u$$

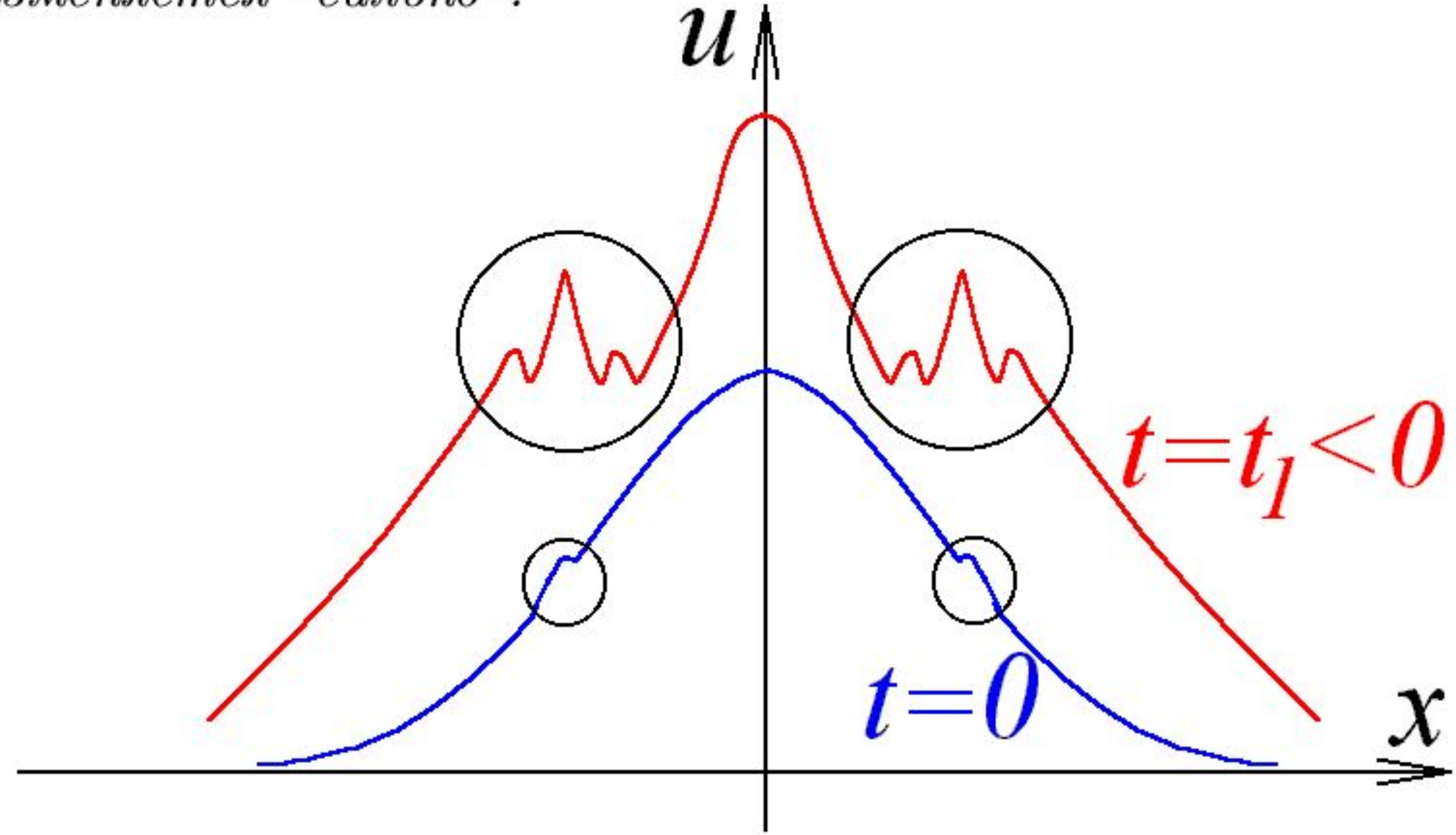
конечная скорость распространения тепла
по холодному фону.

Пример: фильтрация чая в кусочке сахара-рафинада.



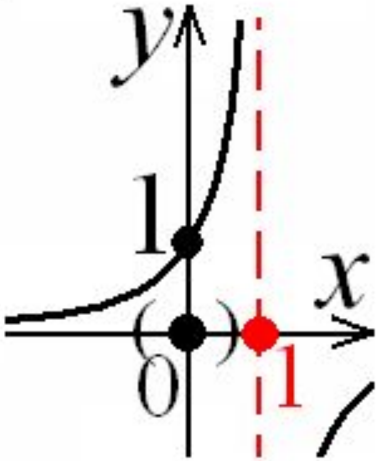


Теорема. *Задача Коши (2) при $t \le 0$ поставлена не корректно, т.е. у нее при $t \le 0$ хотя и существует единственное решение, но оно при "малых" изменениях входных данных задачи изменяется "сильно".*



Контр-пример С.В. Ковалевской

Нижеследующая задача Коши для линейного уравнения теплопроводности



$$u_t = u_{xx} \ , \quad u(x,t)\big|_{t=0} = \frac{1}{1-x}$$

имеет единственное решение в виде формального степенного ряда

$$u(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)\frac{t^k}{k!} \ ; \quad u_k(x) = \frac{\partial^k u(t,x)}{\partial t^k}\bigg|_{t=0} \ ,$$

коэффициенты которого однозначно определяются из рекуррентных соотношений

$$u_{k+1}(x) = u_k''(x) \ , \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

и поэтому индукцией по k доказываются равенства

$$u_k(x) = \frac{(2k)!}{(1-x)^{2k+1}} \ , \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Из последнего соотношения с помощью признака Даламбера

$$\frac{U_{k+1}}{U_k} = \underbrace{\frac{[2(k+1)]!}{(1-x)^{2(k+1)+1}}\frac{t^{k+1}}{(k+1)!}}_{U_{k+1}} : \underbrace{\frac{(2k)!}{(1-x)^{2k+1}}\frac{t^k}{k!}}_{U_k} =$$

$$= \frac{t}{(1-x)^2}\frac{(2k+2)!k!}{(2k)!(k+1)!} = \frac{t}{(1-x)^2}\frac{(2k+1)(2k+2)}{(k+1)} =$$

$$= \frac{2t}{(1-x)^2}(2k+1) \to \infty \text{ при } k \to +\infty$$

устанавливается расходимость ряда для этой задачи при $t \neq 0$.