9.8 Релятивистская динамика

Принцип относительности Эйнштейна требует, чтобы все законы природы имели один и тот же вид во всех инерциальных системах отсчета. Этому принципу должны удовлетворять, в том числе, законы сохранения импульса, энергии и 2-й закон динамики Ньютона. Прежняя форма 2-го закона Ньютона

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \qquad \text{где} \qquad \vec{p} = m_0\vec{\upsilon}$$

не является релятивистски инвариантной, так как она меняет свой вид при переходе из одной инерциальной системы отсчета в другую.

Для нахождения нового, релятивистски инвариантного уравнения динамики воспользуемся свойством инвариантности интервала между двумя событиями

$$s = \sqrt{c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2}$$

Это выражение дает "длину" 4-х мерного вектора в пространстве Минковского в инерциальной системе отсчета К. Компонентами этого вектора выступают три проекции на декартовы оси и одна проекция на ось времени

$$\Delta x, \Delta y, \Delta z, c\Delta t$$

При переходе к новой инерциальной системе отсчета К′, движущейся относительно К вдоль оси y со скоростью V эти компоненты меняются согласно преобразованиям Лоренца

$$\Delta x' = \Delta x \qquad \Delta z' = \Delta z \qquad \Delta y' = \frac{\Delta y - V\Delta t}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}} \qquad \Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{V\Delta y}{c^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}}$$

При этом интервал (длина 4-х мерного вектора) не меняется $\Delta s = \Delta s'$

Пусть некоторое физическое свойство описывается 4-х мерным вектором с компонентами на 4-е оси системы К

$$\vec{A} = (A_x, A_y, A_z, A_t)$$

где A_t **– аналог** $c\Delta t$

Потребуем, чтобы при переходе к новой системе координат К′ компоненты этого вектора преобразовывались также как и разности координат двух точек

$$A'_{x'} = A_x \,; \quad A'_{y'} = A_y \,; \quad A'_{y'} = \frac{A_y - V \cdot A_t}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}} \qquad A'_{t'} = \frac{A_t - \frac{V \cdot A_y}{c^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}$$

Тогда *“длина”* вектора $\vec{A}$ **будет инвариантом, как и интервал**

$$(A_t)^2 - (A_x)^2 - (A_y)^2 - (A_z)^2 = (A'_{t'})^2 - (A'_{x'})^2 - (A'_{y'})^2 - (A'_{z'})^2$$

Любой физический закон выражает связь между физическими величинами. Пусть, например, закон связывает две физические величины A и B, которые в инерциальной системе К изображаются 4-х мерными векторами в пространстве Минковского

$$\vec{A} = (A_x, A_y, A_z, A_t) \quad ; \quad \vec{B} = (B_x, B_y, B_z, B_t)$$

Тогда релятивистски инвариантный закон можно записать в виде равенства этих векторов, поскольку преобразования двух векторов при переходе к новой инерциальной системе отсчета К′ происходят по одинаковым формулам и значит равенство этих векторов, то есть физический закон, не будет менять свою форму

$$\vec{A} = \vec{B} \quad ; \quad \vec{A}' = \vec{B}'$$

в компонентах $A_x = B_x \,;\, A_y = B_y \,;\, A_z = B_z ;\, A_t = B_t$

$$A'_x = B'_x \,;\, A'_y = B'_y \,;\, A'_z = B'_z ;\, A'_t = B'_t$$

Для нахождения релятивистского выражения импульса рассмотрим частицу, которая движется со скоростью $\vec{\upsilon}$ относительно *неподвижной* инерциальной системы **К**. Пусть за время dt частица переместилась на вектор $d\vec{r}$.

Составим **4-х** мерный вектор с компонентами

$$(d\vec{r}, cdt)$$

Если умножить этот вектор на некоторую постоянную, то получим снова **4-х** мерный вектор. Выберем в качестве такой постоянной

$$m_0/dt_0$$

где m_0 – некоторая константа,

$$dt_0 = dt\sqrt{1-\left(\frac{\upsilon}{c}\right)^2}$$

– собственное время, в системе отсчета, связанной с частицей.

В результате умножения получим новый **4-х** мерный вектор с компонентами

$$\frac{m_0}{dt_0}(d\vec{r}, cdt) = \frac{m_0}{dt\sqrt{1-\left(\frac{\upsilon}{c}\right)^2}}(d\vec{r}, cdt) =$$

(9.8.1)

$$= \frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{\upsilon}{c}\right)^2}}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}, c\right) = \frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{\upsilon}{c}\right)^2}}(\vec{\upsilon}, c) = m(\vec{\upsilon}, c)$$

Здесь введено обозначение

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\upsilon}{c}\right)^2}} \qquad (9.8.2)$$

Если частица движется медленно, так что $\upsilon/c \ll 1$, $m \approx m_0$, то пространственная составляющая **4-х** мерного вектора нерелятивистской частицы $(m_0\vec{\upsilon}, m_0 c)$ будет равна импульсу в ньютоновской механике

$$\vec{p} = m_0\vec{\upsilon}$$

если m_0 отождествить с массой частицы в нерелятивистской механике. Ее называют *массой покоя* - это масса частицы в системе, относительно которой частица находится в состоянии покоя.

В релятивистской механике вектор импульса вводится по аналогии согласно

$$\vec{P} = m\vec{\upsilon} \qquad (9.8.3)$$

m – *релятивистская масса*

Применение формулы (9.8.3) к системе тел, в частности к удару двух шаров показывает, что суммарный импульс системы сохраняется.

Вектор импульса можно записать в другом виде

$$\vec{P} = m\vec{\upsilon} = m\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{m_0 d\vec{r}}{dt\sqrt{1-\left(\frac{\upsilon}{c}\right)^2}} = m_0\frac{d\vec{r}}{dt_0} \qquad (9.8.4)$$

где dt_0 - собственное время.

Эксперименты на ускорителях элементарных частиц подтверждают, что релятивистский импульс, определенный формулами (9.8.3-9.8.4), сохраняется во всех процессах столкновений.

При приближении скорости частицы к скорости света $\upsilon \to c$ релятивистская масса частицы m неограниченно растет.

Подставим релятивистский импульс во 2-ой закон Ньютона, получим основной закон релятивистской динамики материальной точки

$$\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\left(\frac{\upsilon}{c}\right)^2}}\right)= \qquad (9.8.5)$$

$$=\frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{\upsilon}{c}\right)^2}}\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}+\frac{m_0\vec{\upsilon}}{c^2\left[1-\left(\frac{\upsilon}{c}\right)^2\right]^{3/2}}\vec{\upsilon}\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}=$$

$$=m\vec{a}+m(\vec{a}\cdot\vec{\upsilon})\frac{\vec{\upsilon}}{c^2\left[1-\left(\frac{\upsilon}{c}\right)^2\right]}$$

Из него следует, что ускорение точки $\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt}$

в общем случае ***не совпадает с направлением силы*****.**

Значит, сопротивление тела движущей силе зависит от угла между силой и скоростью.

Поэтому в релятивистской механике масса тела перестает играть роль меры инертности тела.

9.9 Взаимосвязь массы и энергии

Найдем кинетическую энергию релятивистской частицы. Для этого используем то, что элементарная работа на малом перемещении равна приращению кинетической энергии

$$dT = dA = (\vec{F}d\vec{r}) = (\vec{F}\vec{\upsilon})dt = \left(\frac{d\vec{P}}{dt}\vec{\upsilon}\right)dt = (d\vec{P}\vec{\upsilon}) =$$

$$= m_0\left(d\left(\frac{\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\left(\frac{\upsilon}{c}\right)^2}}\right)\vec{\upsilon}\right) = \frac{m_0(\vec{\upsilon}d\vec{\upsilon})}{\sqrt{1-\left(\frac{\upsilon}{c}\right)^2}} + \frac{m_0\upsilon^2(\vec{\upsilon}d\vec{\upsilon})}{c^2\left(1-\left(\frac{\upsilon}{c}\right)^2\right)^{3/2}}$$

Учитывая, что $(\vec{\upsilon}\, d\vec{\upsilon}) = d\left(\frac{\upsilon^2}{2}\right)$ **после преобразований получаем**

$$dT = d\left(\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{\upsilon}{c}\right)^2}}\right)$$

Интегрируя, находим кинетическую энергию

$$T = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{\upsilon}{c}\right)^2}} + const$$

Константу интегрирования найдем из условия, что кинетическая энергия покоящейся частицы равна нулю.

Полагаем $\upsilon = 0$

$$0 = m_0 c^2 + const$$

$$const = -m_0 c^2$$

Поэтому кинетическая энергия релятивистской частицы равна

$$T = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{\upsilon}{c}\right)^2}} - m_0 c^2 \qquad (9.9.1)$$

Для малых скоростей $\upsilon \ll c$ получаем нерелятивистское выражение для кинетической энергии

$$T = m_0 c^2 \left(1 + \frac{\upsilon^2}{2c^2} + \ldots - 1\right) \approx \frac{m_0 \upsilon^2}{2}$$

Энергия $E_0 = m_0 c^2$ называется энергией покоя.

Энергия покоя является внутренней энергией тела, она не связана с его движением как целого. Если тело состоит из многих частиц, то энергия покоя равна сумме энергий покоя этих частиц, их кинетических энергий движения относительно центра масс и потенциальной энергии взаимодействия друг с другом.

Сумма кинетической энергии и энергии покоя дает полную энергию свободной частицы

$$E = T + E_0 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{\upsilon}{c}\right)^2}} = mc^2 \qquad (9.9.2)$$

Эта формула выражает собой взаимосвязь между массой тела и его энергией. Она показывает, что всякое изменение массы тела приводит к изменению его энергии.

В полную энергию свободной частицы E не входит потенциальная энергия тела во внешнем поле.

Используя выражение для релятивистский импульса, выразим полную энергию свободной частицы через импульс

$$P^2 = \frac{m_0 \upsilon^2}{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}} \quad ; \quad E^2 = \frac{m_0^2 c^4}{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}$$

Отсюда находим релятивистское соотношение между полной энергией и импульсом частицы

$$E^2 = m_0^2 c^4 + P^2 c^2$$

или

$$E = c\sqrt{m_0^2 c^2 + P^2} \qquad (9.9.3)$$

9.10 Законы преобразований релятивистского импульса и энергии

Пусть, как и раньше, система **К** неподвижная, а система **К´** движется относительно нее со скоростью **V** вдоль оси y.

Пусть частица в системе **К** за малое время dt переместилась на малый вектор $d\vec{r}$ с проекциями на декартовые оси dx, dy, dz.

Согласно преобразованиям Лоренца в системе **К´** частица за время dt' переместится на вектор $d\vec{r}'$ с проекциями dx', dy', dz'

$$dx' = dx \qquad dz' = dz$$

$$dy' = \frac{dy - Vdt}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}} \qquad dt' = \frac{dt - \frac{Vdy}{c^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}$$

Умножим эти уравнения на массу покоя частицы m_0 и разделим на собственное время частицы dt_0 (отсчитанное по часам неподвижным относительно частицы), а выражение с временами умножим, кроме того, на скорость света c

$$m_0 dx'/dt_0 = m_0 dx/dt_0$$

$$m_0 dz'/dt_0 = m_0 dz/dt_0$$

$$m_0 \frac{dy'}{dt_0} = \frac{m_0 \frac{dy}{dt_0} - m_0 V \frac{dt}{dt_0}}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}$$

$$c \cdot m_0 \frac{dt'}{dt_0} = \frac{c \cdot m_0 \frac{dt}{dt_0} - m_0 \frac{V dy}{c \cdot dt_0}}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}} \qquad (9.10.1)$$

Учтем, что согласно (9.8.3) $\vec{P} = m_0 \frac{d\vec{r}}{dt_0}$; $\vec{P}' = m_0 \frac{d\vec{r}'}{dt_0}$

Или в компонентах

$$P_x = m_0 \frac{dx}{dt_0} \quad ; \quad P_y = m_0 \frac{dy}{dt_0} \quad ; \quad P_z = m_0 \frac{dz}{dt_0}$$

$$P'_x = m_0 \frac{dx'}{dt_0} \quad ; \quad P'_y = m_0 \frac{dy'}{dt_0} \quad ; \quad P'_z = m_0 \frac{dz'}{dt_0}$$

Так как $dx' = dx$ $\quad dz' = dz$

то

$$P_x = P'_x \quad ; \quad P_z = P'_z$$

Поскольку

$$dt_0 = dt\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

то полную энергию частицы в системе **K** можно записать в виде

$$E = mc^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = m_0c^2\frac{dt}{dt_0} \quad \rightarrow \quad \frac{dt}{dt_0} = \frac{E}{m_0c^2}$$

Аналогично полная энергия частицы в системе **K′** равна

$$E' = m_0c^2\frac{dt'}{dt_0} \quad \rightarrow \quad \frac{dt'}{dt_0} = \frac{E'}{m_0c^2}$$

Тогда формулу, связывающую проекции импульсов на ось y в двух системах отсчета можно переписать в виде

$$P'_y = m_0 \frac{dy'}{dt_0} = \frac{m_0 \dfrac{dy}{dt_0} - m_0 V \dfrac{dt}{dt_0}}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{V}{c}\right)^2}} = \frac{P_y - m_0 V \dfrac{E}{m_0 c^2}}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{V}{c}\right)^2}} = \frac{P_y - V \dfrac{E}{c^2}}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{V}{c}\right)^2}}$$

Теперь из формулы (9.10.1), связывающей времена в двух системах отсчета, получим формулу, связывающую полные энергии частицы в этих системах

$$c \cdot m_0 \frac{dt'}{dt_0} = c \cdot m_0 \frac{E'}{m_0 c^2} = \frac{E'}{c} = \frac{c \cdot m_0 \dfrac{dt}{dt_0} - m_0 \dfrac{Vdy}{c \cdot dt_0}}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{V}{c}\right)^2}} =$$

$$= \frac{c \cdot m_0 \dfrac{E}{m_0 c^2} - \dfrac{VP_y}{c}}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{V}{c}\right)^2}} = \frac{\dfrac{E}{c} - \dfrac{VP_y}{c}}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{V}{c}\right)^2}}$$

Запишем окончательные формулы, связывающие компоненты релятивистского импульса и энергии в двух системах

$$P'_x = P_x \quad ; \quad P'_z = P_z \qquad P'_y = \frac{P_y - V\dfrac{E}{c^2}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{V}{c}\right)^2}}$$

$$\frac{E'}{c} = \frac{\dfrac{E}{c} - \dfrac{VP_y}{c}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{V}{c}\right)^2}} \qquad (9.10.2)$$

Из формул (9.10.2) и результатов параграфа (9.8) следует, что совокупность величин

$$P_x \quad ; \quad P_y \quad ; \quad P_z \quad ; \quad \frac{E}{c} \quad \rightarrow \quad (\vec{P}, \frac{E}{c})$$

образует 4-х мерный вектор - ***вектор энергии-импульса***.

Сравнивая с прежней формулой (9.8.1) для 4-х мерного вектора

$$m(\vec{\upsilon}, c)$$

видим, что они совпадают, так как $\vec{P} = m\vec{\upsilon} \quad ; \quad \frac{E}{c} = mc$

Из (9.9.3), следует, что “длина” вектора энергии-импульса является инвариантом движения

$$\left(\frac{E}{c}\right)^2 - P_x^2 - P_y^2 - P_z^2 = m_0 c^2 \qquad (9.10.3)$$

9.11 Энергия связи системы

Пусть покоящееся тело с массой покоя M_0 состоит из N частей с массами покоя m_{0i}. Энергия покоя такого тела слагается из энергий покоя ее частей, кинетических энергий этих частей и потенциальной энергии взаимодействия их друг с другом.

Поэтому энергия покоя составного тела больше суммы энергий покоя его частей

$$M_0c^2 > \sum_{i=1}^{N} m_{0i}c^2$$

Следовательно, масса составного тела больше суммы масс его частей. Значит, *масса взаимодействующих частиц теряет свойство аддитивности*.

При распаде составного тела на части энергия, равная разности

$$M_0c^2 - \sum_{i=1}^{N} m_{0i}c^2$$

превращается в кинетическую энергию его частей.

При обратном процессе - неупругом соударении частиц они сливаются в одно целое, а их кинетическая энергия переходит в эквивалентное количество энергии покоя составного тела. Поэтому масса образовавшегося тела больше суммы масс исходных частиц на величину

$$\Delta M = M_0 - \sum_{i=1}^{N} m_{0i}$$

Составное тело не будет распадаться на части, если его энергия покоя меньше суммы энергий покоя частей

$$M_0 c^2 < \sum_{i=1}^{N} m_{0i} c^2$$

Чтобы разложить такое тело на составные части и разорвать связи между ними, необходимо затратить энергию, равную энергии связи

$$E_{связи} = \sum_{i=1}^{N} m_{0i} c^2 - M_0 c^2$$

Энергия связи равна работе, которую надо затратить, чтобы разложить систему на составные части.

При слиянии частиц энергия связи выделяется.

Например, цепная реакция деления ядер урана U_{92}^{235} при захвате медленных нейтронов идет одним из возможных способов согласно

$$U_{92}^{235} + n \rightarrow U_{92}^{236} \rightarrow Cs_{55}^{140} + Rb_{37}^{94} + 2n$$

Сумма масс урана U_{92}^{235} и нейтрона больше суммы масс распавшихся частиц на величину $\Delta m = 4 \cdot 10^{-29}$ кг.

Этому избытку массы отвечает большая энергия

$$\Delta E = \Delta m \cdot c^2 = 4 \cdot 10^{-11} \text{ Дж} = 250 \text{ МэВ}$$

которая превращается в кинетическую энергию осколков деления и энергию фотонов.

При синтезе легких ядер выделяется еще большая энергия.

Например, при слиянии ядер тяжелого водорода дейтерия H_1^2 или трития H_1^3, выделяется энергия

$$H_1^2 + H_1^2 \rightarrow H_1^3 + p \quad \text{МэВ} \quad 4$$

$$H_1^2 + H_1^3 \rightarrow H_2^4 + n \quad \text{МэВ} \quad 17.6$$

Однако, чтобы соединить эти ядра надо сблизить их до расстояния

~ 2 pm $= 2 \cdot 10^{-15}$ м

равного радиусу действия ядерных сил. Для этого надо совершить работу, равную потенциальной энергии отталкивания заряженных частей

0.35 МэВ

Поэтому требуются очень высокие температуры $\sim 10^7$ K.

9.12 Частицы с нулевой массой

Рассмотрим частицу, которая движется со скоростью, равной скорости света $\upsilon = c$. Согласно релятивистским формулам

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{\upsilon}{c}\right)^2}} \qquad \vec{P} = \frac{m_0 \vec{\upsilon}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\upsilon}{c}\right)^2}}$$

чтобы энергия и импульс были конечными такая частица должна иметь массу покоя, равную нулю $m_0 = 0$. Тогда из формулы

$$E = \sqrt{m_0^2 c^4 + P^2 c^2}$$

следует

$$E = Pc \qquad P = \frac{E}{c} \qquad (9.12.1)$$

Подобной частицей является **фотон** и возможно нейтрино.

Энергия фотона дается формулой Планка

$$E = h\nu$$

где h **– постоянная Планка, равная** $6.62 \cdot 10^{-34}$ **Дж · сек ,**

ν **- частота света.**

Подставляя в (9.12.1), получаем выражение для импульса фотона

$$p = \frac{h\nu}{c}$$

9.13 Давление света

Свет представляет собой ***поток корпускул - фотонов***. При поглощении света поверхности тела передается импульс, равный сумме импульсов поглощенных фотонов, что приводит к возникновению давления, оказываемого светом на тело.

Найдем давление света.

Пусть на единицу площади поверхности **1 м²** за **1 сек** падает и ею поглощается N фотонов. В результате этой площади передается энергия (**плотность потока энергии**)

$$W = Nh$$

и импульс
$$pN = \frac{h\nu}{c} N = \frac{W}{c}$$

Поскольку импульс, передан в единицу времени, то он равен силе, а так как сила отнесена к единице площади, то она равна давлению, испытываемому телом

$$P = \frac{W}{c}$$

Впервые световое давление в **1899 г.** измерил **Лебедев.**