

«Определенный интеграл»

Определения.
Основные термины.
Свойства определенного интеграла.

Определение:

Под определенным интегралом $\int_a^b f(x)dx$ от данной непрерывной функции $f(x)$ на данном отрезке $[a; b]$ понимается соответствующее приращение ее первообразной,

т.е. $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

Теорема 1:

(из теоремы Коши-всякая непрерывная функция на отрезке $[a; b]$ имеет первообразную) Для всякой функции, непрерывной на отрезке $[a; b]$, существует соответствующий определенный интеграл.

Теорема 2:

Определенный интеграл от непрерывной функции не зависит от выбора первообразной функции для подынтегральной функции.

Свойства:

$$1. \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt$$

$$2. \int_a^b f(x) dx = 0$$

$$3. \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

4

Если $f(x)$ непрерывна на $[a; b]; [a; c]; [c; b]$,
то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

5.
$$\int_a^b Af(x)dx = A \int_a^b f(x)dx$$

6. Определенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа непрерывных функций равен такой же алгебраической сумме определенных интегралов от этих функций.

7. Если подынтегральная функция $f(x)$ определенного интеграла непрерывна и неотрицательна и $a \leq b$,

то
$$\int_a^b f(x) dx \geq 0$$

8. Если $f(x) \leq g(x)$ и $a \leq b$,

то
$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

9. Теорема о среднем:

$f(x)$ - непрерывная функция

$$\int_a^b f(x)dx = (b - a) \cdot f(c), \text{ где } c \in [a; b]$$

Геометрический смысл определенного интеграла.

Теорема: Определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$

от непрерывной неотрицательной функции при $a \leq b$ равен площади соответствующей криволинейной трапеции.

Определенный интеграл с переменным верхним пределом

Производная определенного интеграла с переменным верхним пределом по этому пределу равна значению подынтегральной функции для этого предела.

Интегрирование по частям в определенном интеграле

$$\int_a^b uv' dx = uv \Big|_a^b - \int_a^b vu' dx$$

Замена переменной в определенном интеграле.

Введем новую переменную t , $x = \varphi(t)$,

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = F(\varphi(t)) \Big|_{\alpha}^{\beta} = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) =$$

$$= F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx$$

Площадь в прямоугольных координатах.

1. Рассмотрим криволинейную трапецию,
ограниченную линиями $y = f(x)$,
 $x = a$, $x = b$, $y = 0$.

$$S = \int_a^b f(x) dx, f(x) \geq 0, x \in [a; b]$$

2. В более сложных случаях фигуру стараются представить в виде суммы или разности криволинейных трапеций.

$$S = \int_a^b (f_1 - f_2) dx$$

Длина дуги.

Определение: Под длиной дуги АВ понимается предел, к которому стремится длина ломанной линии, вписанной в эту дугу, когда число звеньев ломанной возрастает неограниченно, а длина наибольшего звена ее стремится к нулю.

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

Определение:

Назовем кривую гладкой, если функция, задающая кривую, непрерывна и имеет непрерывную производную.

Теорема 1:

Всякая гладкая кривая имеет определенную конечную длину дуги.

Теорема 2:

Дифференциал дуги в прямоугольных координатах равен :

$$dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

Объем тела вращения.

1.
$$V_x = \pi \int_a^b y^2 dx$$

$$2. \quad V_y = \pi \int_c^d x^2 dy \quad ;$$

Несобственные интегралы

Если нарушается хотя бы одно из условий,

то $\int_a^b f(x)dx$ называется

несобственным интегралом.

Определение:

Если положительный предел существует, то интеграл называется **сходящимся**, в противном случае – **расходящимся**.