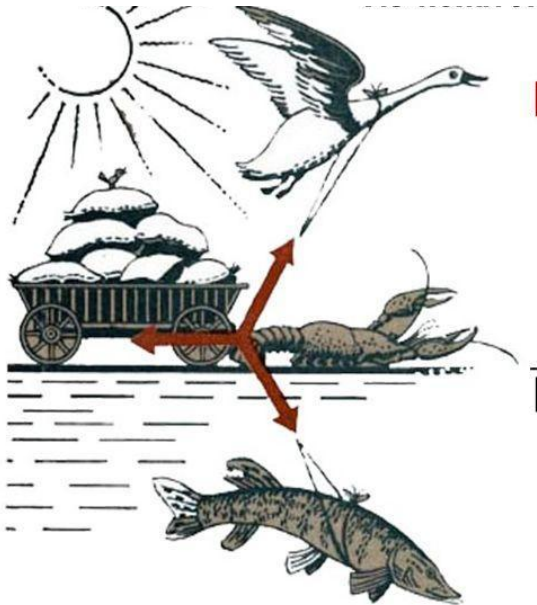


15.10.2021г.

Координаты вектора в пространстве. Скалярное произведение векторов.



Любой вектор $\vec{a}$ можно разложить по координатным векторам, т. е.

представить в виде

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

причем коэффициенты разложения x ,

y , z определяются единственным образом.

Коэффициенты x , y и z в разложении вектора $\vec{a}$ по координатным векторам называются координатами вектора $\vec{a}$ в данной системе координат.

Операции над векторами, заданные координатами

Сумма векторов

Если $\vec{a} \{x_1, y_1, z_1\}$ и $\vec{b} \{x_2, y_2, z_2\}$ —
данные векторы, то вектор
 $\vec{a} + \vec{b}$ имеет координаты
 $\{x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2\}$.

Разность векторов

Если $\vec{a} \{x_1, y_1, z_1\}$ и $\vec{b} \{x_2, y_2, z_2\}$ —

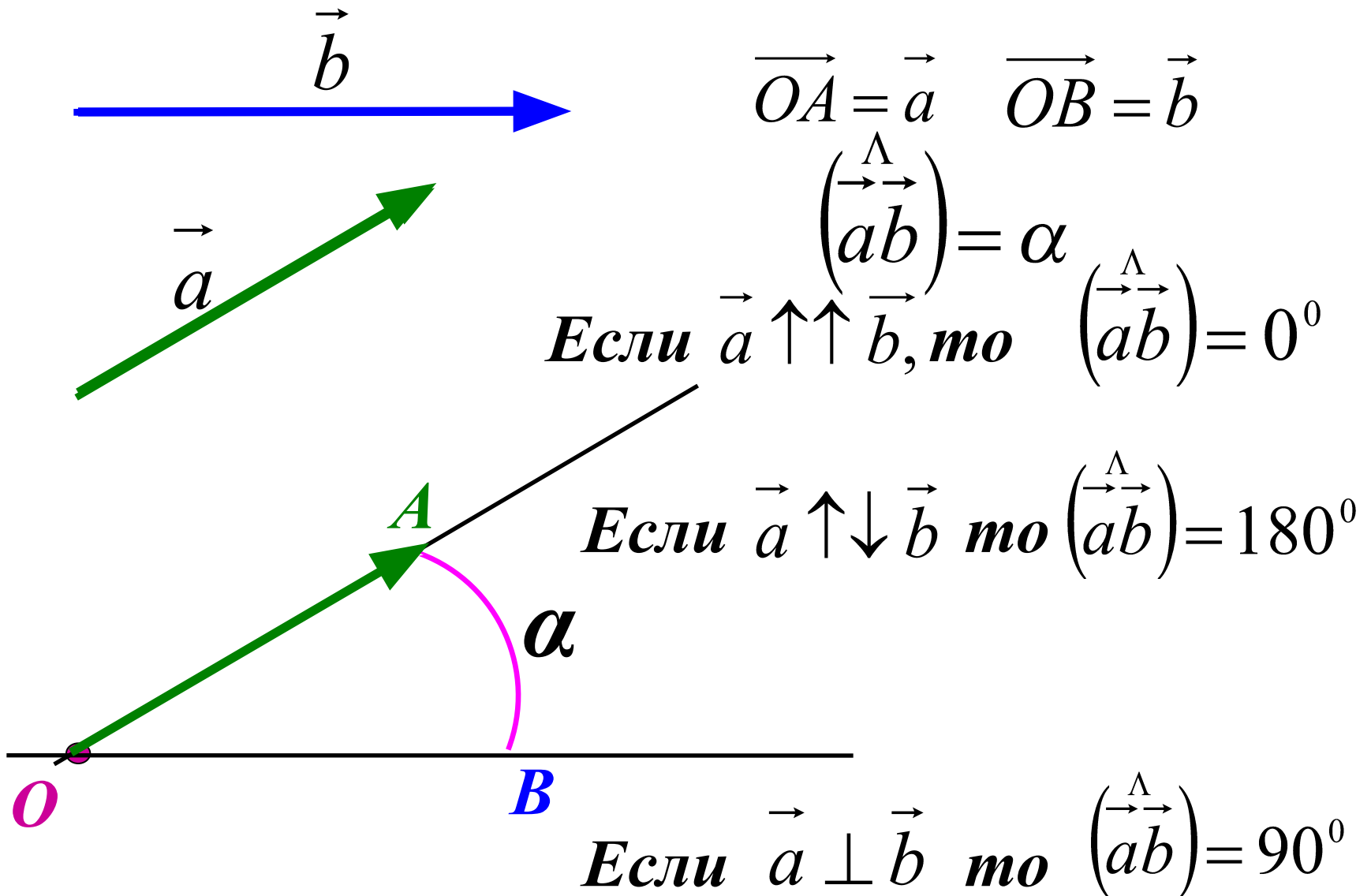
данные векторы, то вектор

$\vec{a} - \vec{b}$ имеет координаты

$$\{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}.$$

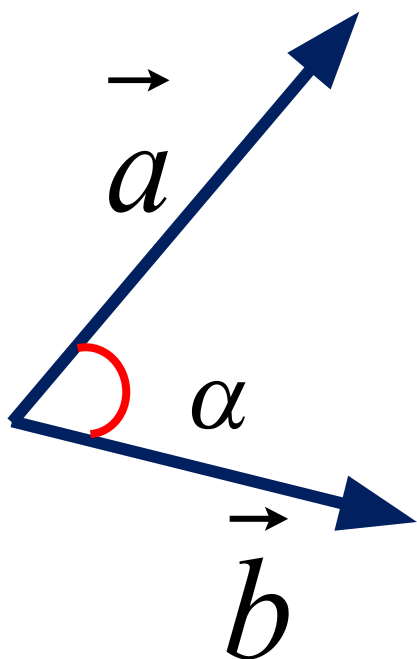
Умножение вектора на число
 α если $\{x; y; z\}$ — данный
вектор, α — данное число, то
вектор
 α имеет координаты
 $\{\alpha x; \alpha y; \alpha z\}$.

Угол между векторами.



Скалярное произведение векторов.

Скалярным произведением двух векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними.



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ тогда и только тогда, когда $\vec{a} \perp \vec{b}$

Если $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$, то α - *острый угол*

Если $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$, то α - *тупой угол*

Скалярный квадрат вектора
равен квадрату его длины.

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$$

Свойства

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$$

$$k \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) = k \cdot \vec{a} + k \cdot \vec{b}$$

Формула скалярного произведения векторов в пространстве.

Пусть векторы заданы координатами

$$\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\} \quad \vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$$

Скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений соответствующих координат этих векторов.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

Косинус угла между ненулевыми векторами

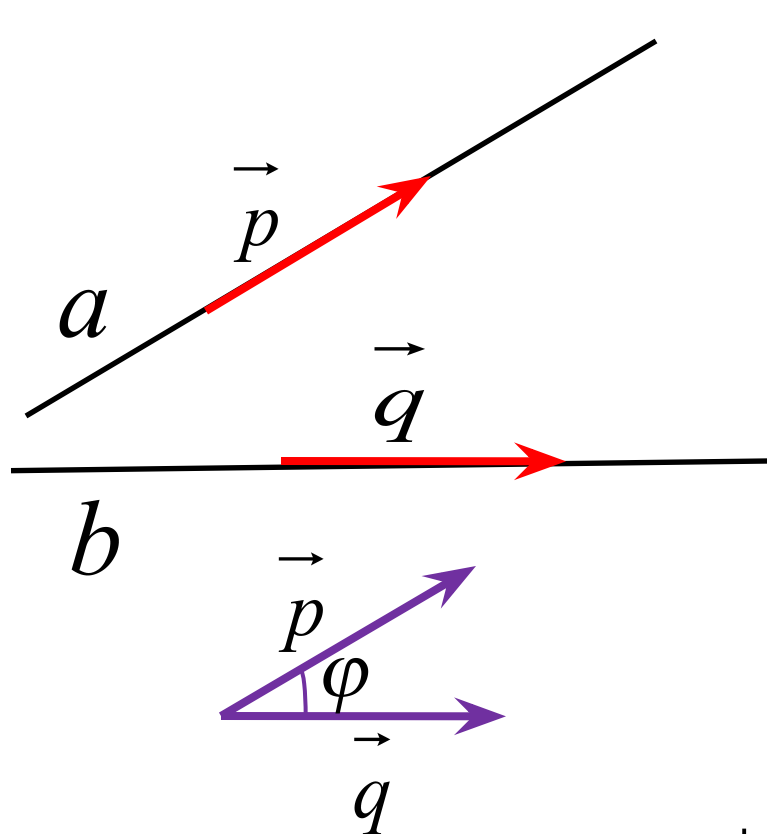
$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$$

$$\vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$$

$$\cos \alpha = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Угол между прямыми



$\vec{p}$ - направляющий вектор прямой a

$\vec{q}$ - направляющий вектор прямой b

φ - угол между прямыми

$$\vec{p}\{x_1; y_1; z_1\}$$

$$\vec{q}\{x_2; y_2; z_2\}$$

$$\cos \varphi = \frac{|x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Пример

№ 464(б)

Вычислить угол между прямыми AB и CD , если $A(5;-8;-1)$, $B(6;-8;-2)$, $C(7;-5;-11)$, $D(7;-7;-9)$

Решение

$$\overrightarrow{AB}\{1;0;-1\} \quad \overrightarrow{CD}\{0;-2;2\}$$

$$\cos \varphi = \frac{|1 \cdot 0 + 0 \cdot (-2) + (-1) \cdot 2|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{0^2 + (-2)^2 + 2^2}}$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{2} \quad \varphi = 60^\circ$$

Выводы

- Любой точке пространства можно поставить в соответствие три координаты в заданной системе координат.
- Любые три числа определяют вектор OA .
- Над векторами, заданными координатами, в пространстве можно проводить операции сложения, вычитания и умножения на число.
- Скалярное произведение векторов есть число.
- Скалярное произведение векторов равно нулю тогда и только тогда, когда они перпендикулярны.
- Скалярное произведение векторов позволяет найти длину вектора и угол между векторами, заданными координатами.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ

