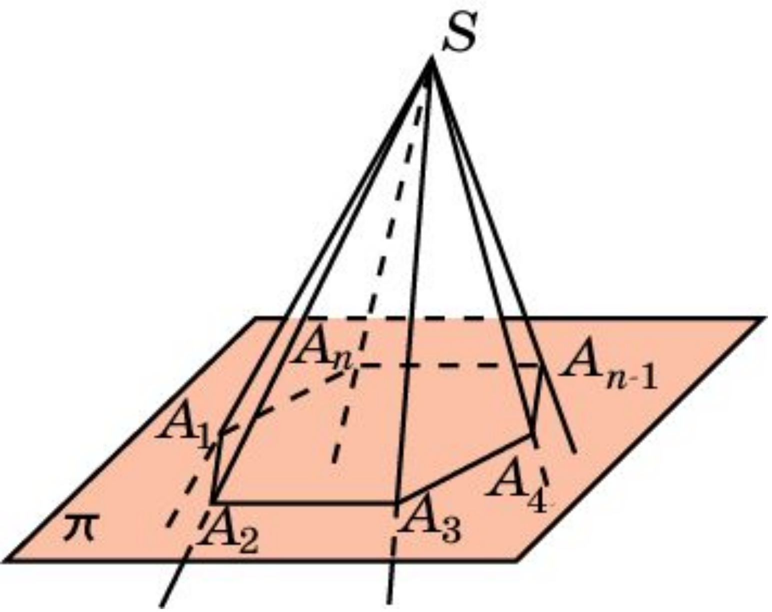
Определение многогранного угла

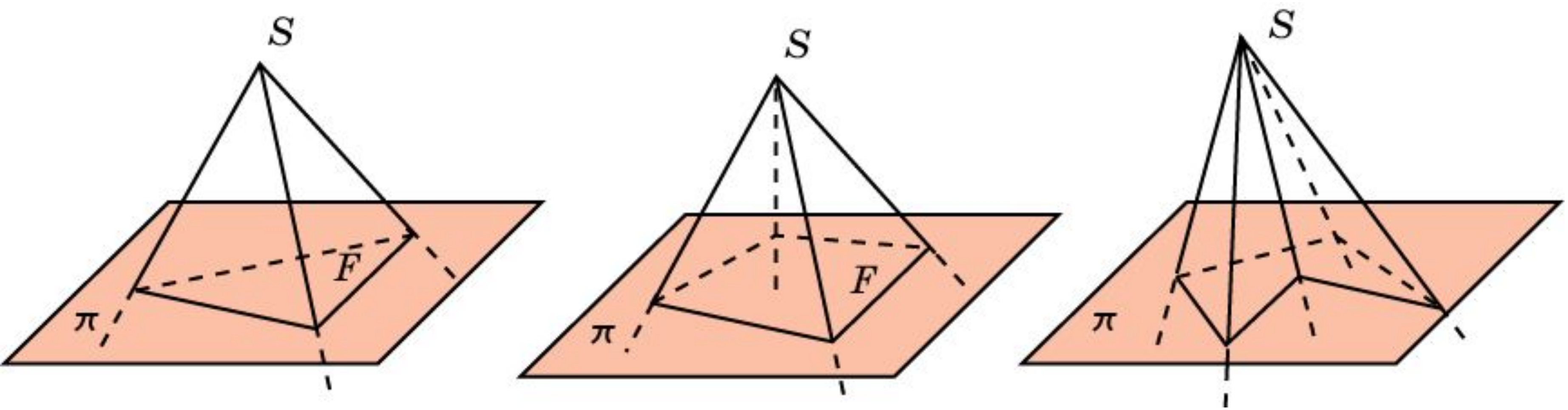


Поверхность, образованную конечным набором плоских углов A_1SA_2, A_2SA_3, …, $A_{n-1}SA_n$, A_nSA_1 с общей вершиной S, в которых соседние углы не имеют общий точек, кроме точек общего луча, а не соседние углы не имеют общих точек, кроме общей вершины, будем называть многогранной поверхностью.

Фигура, образованная указанной поверхностью и одной из двух частей пространства, ею ограниченных, называется многогранным углом. Общая вершина S называется вершиной многогранного угла. Лучи SA_1, …, SA_n называются ребрами многогранного угла, а сами плоские углы A_1SA_2, A_2SA_3, …, $A_{n-1}SA_n$, A_nSA_1 – гранями многогранного угла. Многогранный угол обозначается буквами $SA_1…A_n$, указывающими вершину и точки на его ребрах.

Виды многогранных углов

В зависимости от числа граней многогранные углы бывают трехгранными, четырехгранными, пятигранными и т. д.



Упражнение 1

Приведите примеры многогранников, у которых грани, пересекаясь в вершинах, образуют только: а) трехгранные углы; б) четырехгранные углы; в) пятигранные углы.

Ответ: а) Тетраэдр, куб, додекаэдр;
б) октаэдр;
в) икосаэдр.

Упражнение 2

Приведите примеры многогранников, у которых грани, пересекаясь в вершинах, образуют только: а) трехгранные и четырехгранные углы; б) трехгранные и пятигранные углы; в) четырехгранные и пятигранные углы.

Ответ: а) четырехугольная пирамида, треугольная бипирамида;

б) пятиугольная пирамида;

в) пятиугольная бипирамида.

Неравенство треугольника

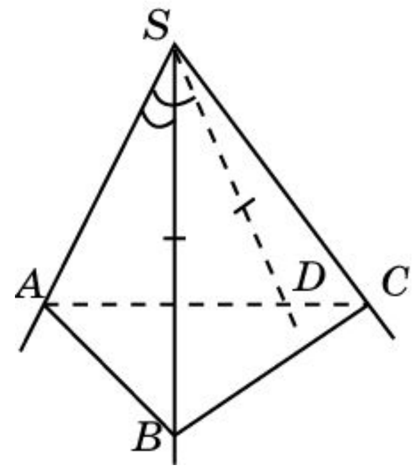
Для треугольника имеет место следующая теорема.

Теорема (Неравенство треугольника). Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон.

Докажем, что для трехгранного угла имеет место следующий пространственный аналог этой теоремы.

Теорема. Всякий плоский угол трехгранного угла меньше суммы двух других его плоских углов.

Доказательство



Рассмотрим трехгранный угол $SABC$. Пусть наибольший из его плоских углов есть угол ASC. Тогда выполняются неравенства $\angle ASB \leq \angle ASC < \angle ASC + \angle BSC$; $\angle BSC \leq \angle ASC < \angle ASC + \angle ASB$.

Таким образом, остается доказать неравенство $\angle ASC < \angle ASB + \angle BSC$.

Отложим на грани ASC угол ASD, равный ASB, и точку B выберем так, чтобы $SB = SD$. Тогда треугольники ASB и ASD равны (по двум сторонам и углу между ними) и, следовательно, $AB = AD$.

Воспользуемся неравенством треугольника $AC < AB + BC$. Вычитая из обеих его частей $AD = AB$, получим неравенство $DC < BC$. В треугольниках DSC и BSC одна сторона общая (SC), $SD = SB$ и $DC < BC$. В этом случае против большей стороны лежит больший угол и, следовательно, $\angle DSC < \angle BSC$. Прибавляя к обеим частям этого неравенства угол ASD, равный углу ASB, получим требуемое неравенство $\angle ASC < \angle ASB + \angle BSC$.

Точка пересечения биссектрис

Для треугольника имеет место следующая теорема.

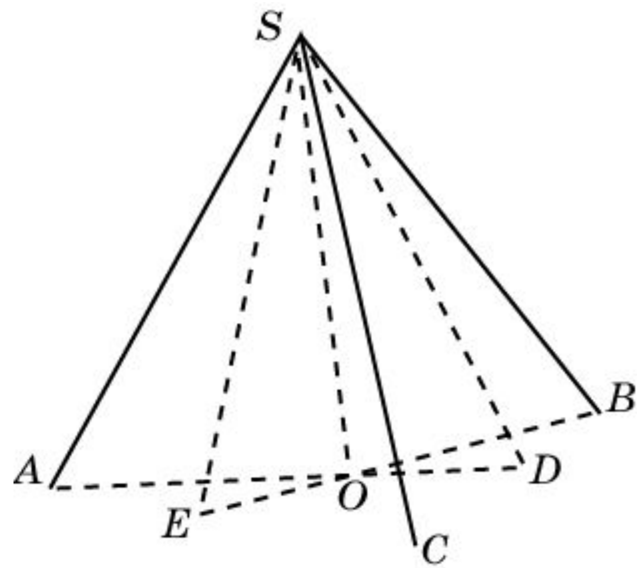
Теорема. Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке – центре вписанной окружности.

Докажем, что для трехгранного угла имеет место следующий пространственный аналог этой теоремы.

Теорема. Биссектральные плоскости двугранных углов трехгранного угла пересекаются по одной прямой.

Доказательство

Рассмотрим трехгранный угол *SABC*.



Биссектральная плоскость *SAD* двугранного угла *SA* является геометрическим местом точек этого угла, равноудаленных от его граней *SAB* и *SAC*.

Аналогично, биссектральная плоскость *SBE* двугранного угла *SB* является геометрическим местом точек этого угла, равноудаленных от его граней *SAB* и *SBC*.

Линия их пересечения *SO* будет состоять из точек, равноудаленных от всех граней трехгранного угла. Следовательно, через нее будет проходить биссектральная плоскость двугранного угла *SC*.

Точка пересечения серединных перпендикуляров

Для треугольника имеет место следующая теорема.

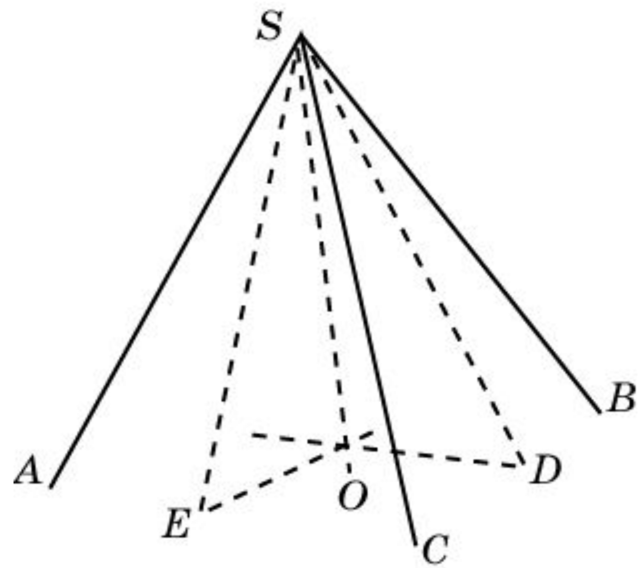
Теорема. Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке – центре описанной окружности.

Докажем, что для трехгранного угла имеет место следующий пространственный аналог этой теоремы.

Теорема. Плоскости, проходящие через биссектрисы граней трехгранного угла и перпендикулярные этим граням, пересекаются по одной прямой.

Доказательство

Рассмотрим трехгранный угол *SABC*.



Плоскость, проходящая через биссектрису *SD* угла *BSC* и перпендикулярная его плоскости, состоит из точек равноудаленных от ребер *SB* и *SC* трехгранного угла *SABC*.

Аналогично, плоскость, проходящая через биссектрису *SE* угла *ASC* и перпендикулярная его плоскости, состоит из точек равноудаленных от ребер *SA* и *SC* трехгранного угла *SABC*.

Линия их пересечения *SO* будет состоять из точек, равноудаленных от всех ребер трехгранного угла. Следовательно, ее будет содержать плоскость, проходящая через биссектрису угла *ASB* и перпендикулярная его плоскости.

Точка пересечения медиан

Для треугольника имеет место следующая теорема.

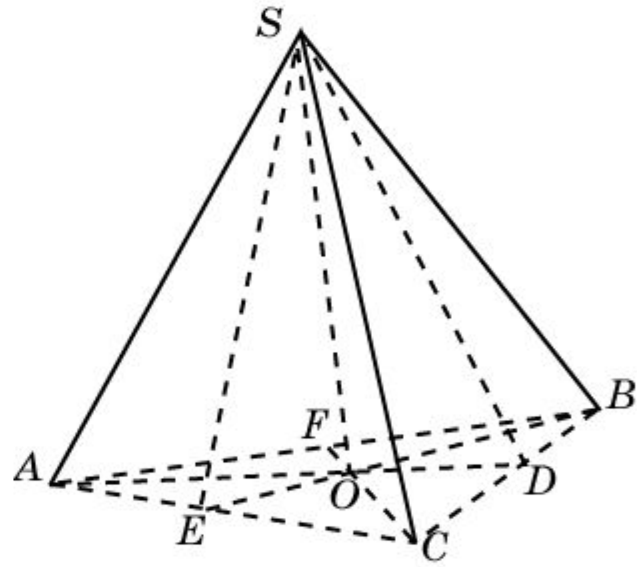
Теорема. Медианы треугольника пересекаются в одной точке – центре вписанной окружности.

Докажем, что для трехгранного угла имеет место следующий пространственный аналог этой теоремы.

Теорема. Плоскости, проходящие через ребра трехгранного угла и биссектрисы противоположных граней, пересекаются по одной прямой.

Доказательство

Рассмотрим трехгранный угол $SABC$. На его ребрах отложим равные отрезки $SA = SB = CS$.



Биссектрисы SD, SE, SF плоских углов трехгранного угла являются медианами треугольников соответственно SBC, SAC, SAB. Следовательно, AD, BE, CF – медианы треугольника ABC.

Пусть O – точка пересечения медиан. Тогда прямая SO будет линией пересечения рассматриваемых плоскостей.

Точка пересечения высот

Для треугольника имеет место следующая теорема.

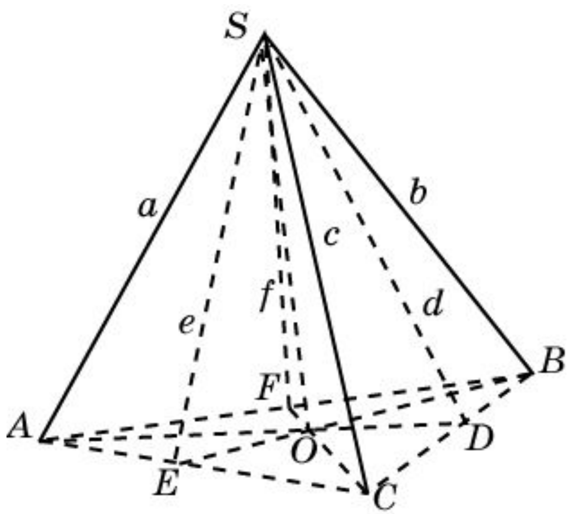
Теорема. Высоты треугольника или их продолжения пересекаются в одной точке.

Докажем, что для трехгранного угла имеет место следующий пространственный аналог этой теоремы.

Теорема. Плоскости, проходящие через ребра трехгранного угла и перпендикулярные плоскостям противоположных граней, пересекаются по одной прямой.

Доказательство

Рассмотрим трехгранный угол *Sabc*. Пусть *d*, *e*, *f* – линии пересечения плоскостей граней трехгранного угла с плоскостями, проходящими через ребра *a*, *b*, *c* этого угла и перпендикулярные соответствующим плоскостям граней.



Выберем какую-нибудь точку *C* на ребре *c*. Опустим из нее перпендикуляры *CD* и *CE* на прямые *d* и *e* соответственно. Обозначим *A* и *B* точки пересечения прямых *CD* и *CE* с прямыми *SB* и *SA* соответственно.

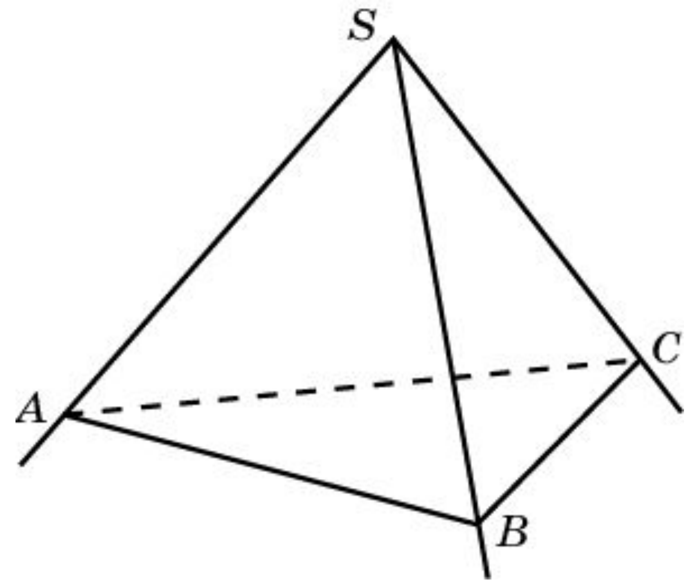
Прямая *d* является ортогональной проекцией прямой *AD* на плоскость *BSC*. Так как *BC* перпендикулярна прямой *d*, то она перпендикулярна и прямой *AD*. Аналогично, прямая *AC* перпендикулярна прямой *BE*.

Пусть *O* – точка пересечения прямых *AD* и *BE*. Прямая *BC* перпендикулярна плоскости *SAD*, следовательно, она перпендикулярна прямой *SO*. Аналогично, Прямая *AC* перпендикулярна плоскости *SBE*, следовательно, она перпендикулярна прямой *SO*. Таким образом, прямая *SO* перпендикулярна прямым *BC* и *AC*, следовательно, перпендикулярна плоскости *ABC*, значит, перпендикулярна и прямой *AB*.

С другой стороны, прямая *CO* перпендикулярна прямой *AB*. Таким образом, прямая *AB* перпендикулярна плоскости *SOC*. Плоскость *SAB* проходит через прямую *AB*, перпендикулярную плоскости *SOC*, следовательно, сама перпендикулярна этой плоскости. Значит, все три рассматриваемые плоскости пересекаются по прямой *SO*.

Сумма плоских углов

Теорема. Сумма плоских углов трехгранного угла меньше 360°.

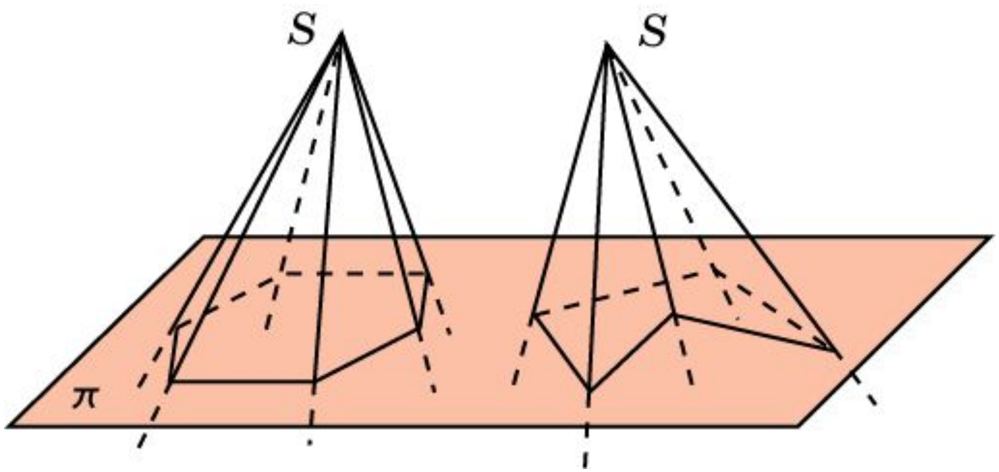


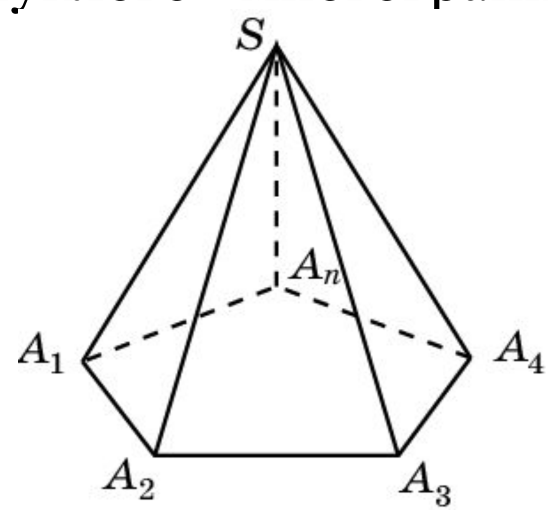
Доказательство. Пусть $SABC$ – данный трехгранный угол. Рассмотрим трехгранный угол с вершиной A, образованный гранями ABS, ACS и углом BAC. В силу неравенства треугольника, имеет место неравенство $\angle BAC < \angle BAS + \angle CAS$.

Аналогично, для трехгранных углов с вершинами B и C имеют место неравенства: $\angle ABC < \angle ABS + \angle CBS$, $\angle ACB < \angle ACS + \angle BCS$. Складывая эти неравенства и учитывая, что сумма углов треугольника ABC равна 180°, получаем $180° < \angle BAS + \angle CAS + \angle ABS + \angle CBS + \angle BCS + \angle ACS = 180° - \angle ASB + 180° - \angle BSC + 180° - \angle ASC$. Следовательно, $\angle ASB + \angle BSC + \angle ASC < 360°$.

Выпуклые многогранные углы

Многогранный угол называется выпуклым, если он является выпуклой фигурой, т. е. вместе с любыми двумя своими точками целиком содержит и соединяющий их отрезок. На рисунке приведены примеры выпуклого и невыпуклого многогранных углов.





Свойство. Сумма всех плоских углов выпуклого многогранного угла меньше 360°.

Доказательство аналогично доказательству соответствующего свойства для трехгранного угла.

Упражнение 3

Может ли быть трехгранный угол с плоскими углами: а) 30°, 60°, 20°; б) 45°, 45°, 90°; в) 30°, 45°, 60°?

Ответ: а) Нет; б) нет; в) да.

Упражнение 4

Можно ли составить выпуклый четырёхгранный угол с такими плоскими углами: а) 56^o, 98^o, 139^o и 72^o; б) 32^o, 49^o, 78^o и 162^o; в) 85^o, 112^o, 34^o и 129^o; г) 43^o, 84^o, 125^o и 101^o.

Ответ: а) Нет; б) да; в) нет; г) да.

Упражнение 5

Два плоских угла трехгранного угла равны 70° и 80°. В каких границах находится третий плоский угол?

Ответ: $10^{o} < \phi < 150^{o}$.

Упражнение 6

Плоские углы трехгранного угла равны 45°, 45° и 60°. Найдите величину угла между плоскостями плоских углов в 45°.

Ответ: 90°.

Упражнение 7

В трехгранном угле два плоских угла равны по 45°; двугранный угол между ними прямой. Найдите третий плоский угол.

Ответ: 60°.

Упражнение 8

Плоские углы трехгранного угла равны 60°, 60° и 90°. На его ребрах от вершины отложены равные отрезки *OA*, *OB*, *OC*. Найдите двугранный угол между плоскостью угла в 90° и плоскостью *ABC*.

Ответ: 90°.

Упражнение 9

Каждый плоский угол трехгранного угла равен 60°. На одном из его ребер отложен от вершины отрезок, равный 3 см, и из его конца опущен перпендикуляр на противоположную грань. Найдите длину этого перпендикуляра.

Ответ: $\sqrt{6}$ см.