Московская школа экономики

МГУ им. М.В.Ломоносова

ЛЕКЦИЯ 4.

Максимизация индивидуального благосостояния в условиях неопределенности

Введение в общую экономическую теорию

(курс лекций академика А.Д.Некипелова)

Вопросы

1. Неопределенность и риск
2. Отношение людей к риску
3. Принятие решений в условиях неопределенности
4. Возможность снижения рисков «робинзоном»

1. Неопределенность и риск

Типы экономических процессов

- Детерминированные (при заданных условиях гарантируется строго определенное следствие)
- Вероятностные (при заданных условиях возможны с определенной – известной или не известной принимающему решение - степенью вероятности различные следствия)

Общее и особенное понятий «неопределенность» и «риск»

- В обоих случаях речь идет о неизвестном результате для субъекта, принимающего решение
- О риске говорят в тех случаях, когда из опыта известна вероятность наступления различных результатов (то есть когда имеются объективные данные о распределении вероятностей их наступления)
- В случае понимаемой в узком смысле слова неопределенности такие данные отсутствуют

Понятие риска

- Пусть выращивающий пшеницу крестьянин из опыта знает, что из пяти последовательных лет два каких-то года он получит урожай в 20, два года – 30 и один год – 25 центнеров с гектара
- Несложные расчеты средней взвешенной показывают, что **ожидаемая величина (величина математического ожидания)** урожайности составляет 25 центнеров с гектара $((20 \times 2 + 30 \times 2 + 25 \times 1)/5 = 25))$
- Однако известно, что точно такой ее уровень на практике будет наблюдаться лишь раз в пять лет
- Начиная посевную кампанию крестьянин должен считаться с *риском* отклонения фактического результата в ту или иную сторону от ожидаемого

Измерение степени риска

- *Степень риска,* с которой индивиду приходится сталкиваться при принятии решений, характеризуется **возможным масштабом отклонения фактических показателей от ожидаемого**
- Показатели степени риска:
  – Величина **дисперсии**: $D(X) = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$
  – Величина **среднеквадратичного отклонения**

$$\sigma_X = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}$$

Сравнение вариантов по степени риска

- Первый вариант распределения величины урожайности:
  - Дисперсия: $D(X) = (20-25)^2 + (20-25)^2 + (30-25)^2 + (30-25)^2 + (25-25)^2 = 100$
  - Среднеквадратичное отклонение: $\sigma_X = \sqrt{100} = 10$
- Второй вариант распределения величины урожайности
  - Рассмотрим теперь иное распределение значений дискретной случайной величины, характеризующей урожайность пшеницы: 15, 20, 25, 30 и 35 центнеров с гектара
  - *Математическое ожидание* урожайности и в данном случае будет равняться 25 центнерам с гектара: $(15 \times 1 + 20 \times 1 + 25 \times 1 + 30 \times 1 + 35 \times 1)/5 = 25$
  - Величина дисперсии: $D(X) = (15-25)^2 + (20-25)^2 + (25-25)^2 + (30-25)^2 + (35-25)^2 = 250$
  - Среднеквадратичное отклонение: $\sigma_X = \sqrt{250} = 15{,}81$.

2. Отношение людей к риску

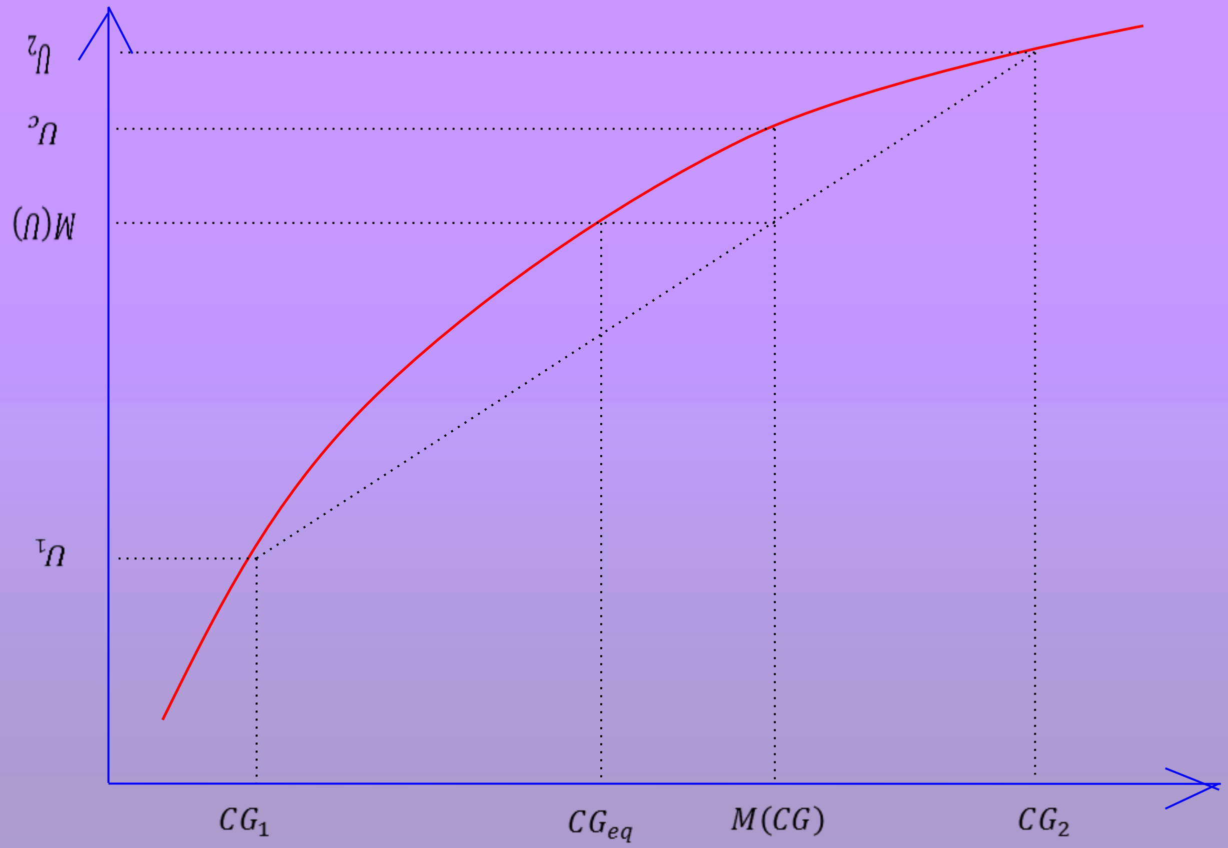
Критерий отношения к риску

- Понятие **«справедливого пари»:** пари, ожидаемый результат которого равен нулю (то есть, как в игре в “орел-решку”, играющий имеет абсолютно равные шансы как выиграть, так и проиграть)
- Отношение к «справедливому пари» как критерий отношения к риску

Композитное благо

- Под «композитным благом» (CG) будем иметь в виду набор, состоящий из фиксированных количеств благ, входящих в потребление «робинзона»
- Увеличение или уменьшение количества «композитного блага» означает пропорциональное изменение количеств всех предметов потребления, входящих в его состав
- Распространим на композитное благо гипотезу об убывающей предельной полезности
- В силу этого кривая полезности композитного блага (U_{CG}) будет выпуклой вверх

Графическое представление негативного отношения к риску



Комментарий к графику

- Пусть «робинзон» получает композитное благо в количестве CG_1 с вероятностью ¼ и в количестве CG_2 с вероятностью ¾
- Тогда ожидаемая величина копозитного благ составит $M(CG) = CG_1 \cdot (1/4) + CG_2 \cdot (3/4)$
- В то же время ожидаемая величина полезности составит $M(U) = M(U_1) \cdot (1/4) + M(U_2) \cdot (3/4)$
- В случае определенности количеству композитного блага $M(CG)$ соответствовала бы величина полезности $U_c > M(U)$
- CG_{eq} - эквивалент величины композитного блага $M(CG)$ в условиях определенности

3. Принятие решений в условиях неопределенности

Постановка задачи

- Пусть одно из решений (действий) «робинзона» может привести к исходам («событиям», на языке теории вероятностей) A_1 и A_2, причем вероятность наступления исхода A_1 равняется 0,3, а исхода A_2 – 0,7
- Результатом иного решения могут стать исходы B_1 – с вероятностью 0,2 и исхода B_2 – с вероятностью 0,8, с другой
- Как установить отношения предпочтения между этими двумя выборами, последствия которых характеризуются **разными распределениями вероятностей между возможными исходами?**

Функция полезности фон Нейманна – Моргенштерна

- Фон Нейманн и Моргенштерн доказали, что если рассматриваемая под этим углом зрения система предпочтений индивида отвечает ряду требований, то существует функция полезности следующего вида, выражающая эти предпочтения: $U(p) = \sum u(x)p(x)$
- Соответственно, $U(p) > U(q)$ тогда и только тогда, когда соответствующий потребитель предпочитает распределение вероятностей p распределению вероятностей q

Конкретный пример

- Функция полезности «робинзона» : $U = {x_1}^{0,3} + {x_2}^{0,6}$
- Действие 1 приводит к исходу A_1 (получение *3* единиц блага *1* и *4* единиц блага *2*) с вероятностью *0,3* или исходу A_2 (получение *2* единиц блага *1* и *5* единиц блага *2)* с вероятностью 0,7
- Действие 2 приводит к исходу A_1 с вероятностью *0,2* или исходу A_2 (получение *2* единиц блага *1* и *5* единиц блага *2)* с вероятностью 0,8
- **Полезность исхода** A_1 равняется $3^{0,3} + 4^{0,6} = 3{,}69$, **полезность исхода** A_2 - $2^{0,3} + 5^{0,6} = 3{,}86$
- **Полезность распределения вероятностей**, соответствующего первому действию «робинзона»: $3{,}69 \cdot 0{,}3 + 3{,}86 \cdot 0{,}7 = \mathbf{3{,}81}$
- **Полезность распределения вероятностей**, соответствующего второму действию «робинзона»: $3{,}69 \cdot 0{,}2 + 3{,}86 \cdot 0{,}8 = \mathbf{3{,}82}$
- Вывод: второе распределение вероятностей является предпочтительным для рассматриваемого хозяйствующего субъекта.

Важная особенность функции фон Неймана - Моргенштерна

- Функция $U(p)$ фон Неймана-Моргенштерна имеет форму математического ожидания
- Такие функции сохраняют свою структуру лишь в условиях **линейных** монотонных преобразований
- Если задать нулевое значение и масштаб изменений функции, то мы получим шкалу полезностей, подобную любой из имеющихся шкал измерения температуры. Поэтому *функцию объективной ожидаемой полезности фон Неймана-Моргенштерна*, принято называть *кардиналистским индексом*

Кривые безразличия на основе функции фон Неймана - Моргенштерна

- Пусть $U(p) = \frac{1}{4} \cdot U(CG_1) + \frac{3}{4} \cdot U(CG_2)$
- Фиксируем величину полезности на уровне $U(p)_0$, величина CG_2 становится функцией величины CG_1:

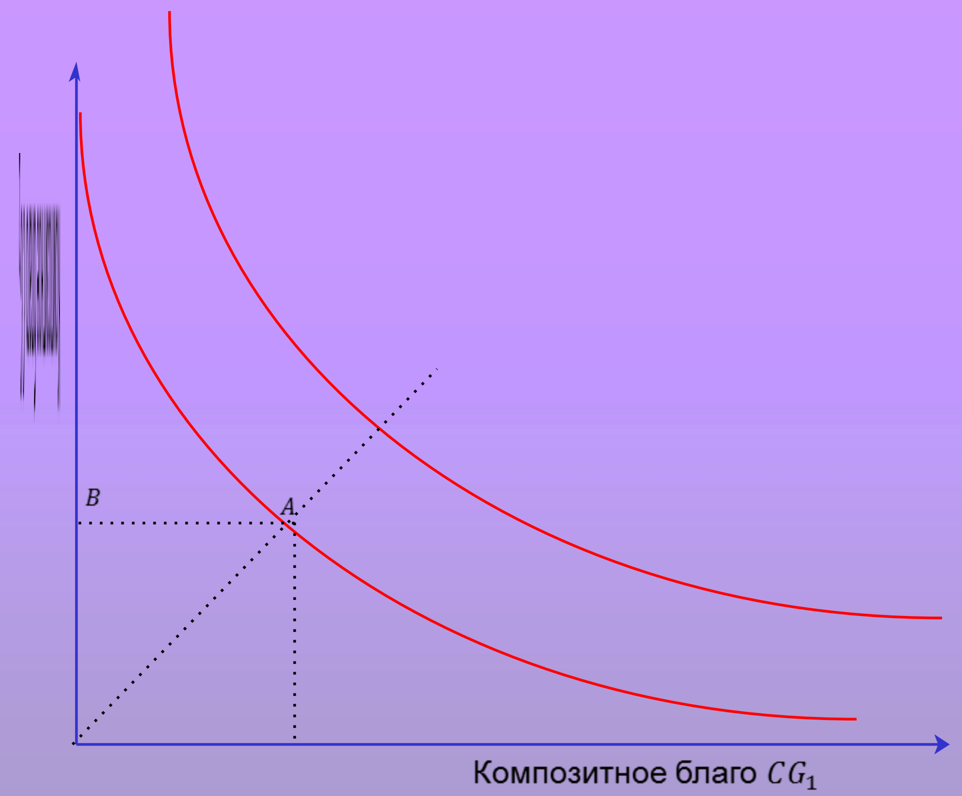
$$U(p)_0 \equiv \frac{1}{4} \cdot U(CG_1) + \frac{3}{4} \cdot U[CG_2(CG_1)]$$

- Решаем в отношении $U(CG_2)$ и получаем формулу кривой безразличия:

$$U[CG_2(CG_1)] \equiv \frac{4}{3} \cdot U(p)_0 - \frac{1}{3} \cdot U(CG_1)$$

- Кривые безразличия являются выпуклыми по отношению к началу системы координат; степень выпуклости является характеристикой отношения к риску

Графическое представление кривых безразличия



Подход с позиций «состояний окружающего мира»(1)

- «Робинзону» предстоит сделать выбор из множества H действий $(h_1, h_2, \dots, h_n)$
- Результат каждого из таких действий будет различным при разных внешних условиях $s_1, s_2, \dots, s_k$, объективная вероятность возникновения которых «робинзону» не известна. Эти условия, составляющие множество S принято называть *«состояниями окружающего мира»*
- Выбор (действие) h_i $(i = 1, \dots, n)$ приводит к разным результатам при наступлении разных «состояний окружающего мира»: $h_i(s) = x_i$, где x_i представляет собой состоящее из k элементов (по числу «состояний окружающего мира») множество исходов, которые могут стать результатом действия h_i
- Совокупность наборов благ, составляющих подмножество x_i, получила название *«наборов потребительских благ, увязанных с состоянием окружающего мира» (state contingent commodity bundles)*

Подход с позиций «состояний окружающего мира»(2)

- В модели Л.Сэвиджа индивид субъективно присваивает вероятность $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k$ наступлению каждого из «состояний окружающего мира»
- При соблюдении определенных условий можно дать количественное выражение предпочтениям индивидуума на множестве действий H (*функции субъективной ожидаемой полезности Фридмана - Сэвиджа*):
- $U(h) = \sum_{s \in S} u[h(s)] \cdot \pi(s)$
- Соответственно, $h_1 \succ h_2$, тогда и только тогда, когда
- $U(h) = \sum_{s \in S} u[h_1(s)] \cdot \pi(s) > \sum_{s \in S} u[h_2(s)] \cdot \pi(s)$

Подход с позиций «состояний окружающего мира» (3)

- Потребности человека в тех или иных благах могут быть неодинаковыми в разных условиях
- Для учета этого нужно ввести для каждого такого состояния собственную функцию полезности - $u[h(s),s]$. Тогда

$$U(h) = \sum_{s \in S} u[h(s),s] \cdot \pi(s)$$

- Введем $v(h(s),s) = u[h(s)] \cdot \pi(s)$. Тогда

$$U(h) = \sum_{s \in S} u[h(s),s] \cdot \pi(s) = \sum_{s \in S} v[h(s),s]$$

- Таким образом, функция $U(h)$ является результатом суммирования функций Фридмана - Сэвиджа, определенные для отдельных состояний s

4. Возможности снижения рисков «робинзоном»

Снижение рисков

- Если отношение к риску является негативным, то снижение его уровня является вкладом в повышение благосостояния
- Но как можно добиваться снижения рисков?
- Формирование *страховых запасов.* При производстве, превышающем ожидаемый уровень $M(CG)$, «робинзону» следует воздерживаться от потребления всего продукта, создавая запас для поддержания потребления в неблагоприятных условиях. В результате колебания в выпуске продукции будут сопровождаться сохранением равномерного уровня потребления, характерного для ситуации полной определенности
- Страховой запас - инвестиция особого рода. Специфика в том, что целью такой инвестиции является не увеличение производства, а обеспечение равномерности потребления