* Обратный анализ погрешности вычисления собственных значений симметрических матриц.

*Вычисление собственных векторов симметрических матриц

Определение последовательности Штурма

$$D_k(\lambda) = (d_k - \lambda)D_{k-1}(\lambda) - b_k c_k D_{k-2}(\lambda)$$

$$\frac{|c_{k+1}|D_{k-1}(\lambda)}{D_k(\lambda)} = \frac{|c_{k+1}|}{d_k - \lambda - |b_k||c_k|D_{k-2}(\lambda)/D_{k-1}(\lambda)}$$

$$\mathcal{P}_k(\lambda) = \frac{|c_{k+1}|D_{k-1}(\lambda)}{D_k(\lambda)} \quad (1 \le k \le M)$$

Последовательность Штурма

$$\mathcal{P}_1(\lambda) = \frac{|c_2|}{d_1 - \lambda}$$

$$\mathcal{P}_k(\lambda) = \frac{|c_{k+1}|}{d_k - \lambda - |b_k|\mathcal{P}_{k-1}(\lambda)}$$

Вычисление последовательности Штурма

$$S = \begin{pmatrix} d_1 & b_2 & & 0 \\ b_2 & d_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b_M \\ 0 & & b_M & d_M \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1^{[c]}(\lambda) &= |b_2| \oslash (d_1 \ominus_0 \lambda), \\ \mathcal{P}_j^{[c]}(\lambda) &= |b_{j+1}| \oslash (d_j \ominus_0 \lambda \ominus_0 |b_j| \otimes \mathcal{P}_{j-1}^{[c]}(\lambda)), \\ \mathcal{P}_M^{[c]}(\lambda) &= 1 \oslash (d_M \ominus_0 \lambda \ominus_0 |b_M| \otimes \mathcal{P}_{M-1}^{[c]}(\lambda)). \end{aligned}$$

$[c]$ – "computation"

$$a \ominus_0 b = \begin{cases} a \ominus b & \text{при } a \ominus b \neq 0, \\ \dfrac{\varepsilon_1}{\gamma} \max\{|a|, |b|\} & \text{при } a \ominus b = 0, \end{cases}$$

Лемма. Пусть

$$\varepsilon_1 \geq 2\gamma \max\left\{ \sqrt[4]{\varepsilon_0}\,,\ \sqrt[4]{\frac{2}{\varepsilon_\infty}} \right\},$$

$$\frac{\varepsilon_1}{\gamma} \leq |d_i| \leq 1, \quad \frac{\varepsilon_1}{\gamma} \leq |b_j| \leq 1,$$

$$-3 \leq \lambda \leq 3$$

$\Rightarrow$ нет ПЕРЕПОЛНЕНИЙ:

$$\varepsilon_0 < \frac{\varepsilon_1^4}{2\gamma^4} \leq \left|\mathcal{P}_j^{[c]}\right| \leq \frac{\gamma^3}{\varepsilon_1^3} < \varepsilon_\infty.$$

Замечание. If S удовл. усл. леммы

$$\frac{\varepsilon_1}{\gamma} \leq |d_i| \leq 1, \quad \frac{\varepsilon_1}{\gamma} \leq |b_j| \leq 1,$$

$\Rightarrow ||S|| \leq \mathcal{M}(S) \leq 3 \Rightarrow -3 \leq \lambda \leq 3$

Моделирование погрешностей

$$a \otimes b = ab(1+\psi) + \xi.$$

$$a \oslash b = \frac{a}{b}(1+\varphi), \quad |\varphi| \le \varepsilon_1,$$

$$a \ominus_0 b = (1+\alpha)a - (1+\overline{\alpha})b,$$

где $|\alpha| \le \varepsilon_1, \quad |\overline{\alpha}| \le \varepsilon_1, \quad |(1+\alpha)/(1+\overline{\alpha}) - 1| \le \varepsilon_1/\gamma.$

$$\mathcal{P}_1^{[c]} = \frac{|\overline{c}_2|}{\overline{d}_1 - \lambda},$$
$$\mathcal{P}_j^{[c]} = \frac{|\overline{c}_{j+1}|}{\overline{d}_j - \lambda - |\overline{b}_j|\mathcal{P}_{j-1}^{[c]}},$$
$$\mathcal{P}_M^{[c]} = \frac{|\overline{c}_{M+1}|}{\overline{d}_M - \lambda - |\overline{b}_M|\mathcal{P}_{M-1}^{[c]}}.$$

$$\overline{S} = \begin{pmatrix} \overline{d}_1 & \overline{c}_2 & & 0 \\ \overline{b}_2 & \overline{d}_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \overline{c}_M \\ 0 & & \overline{b}_M & \overline{d}_M \end{pmatrix}$$

$$\overline{S} = \begin{pmatrix} \overline{d}_1 & \overline{c}_2 & & 0 \\ \overline{b}_2 & \overline{d}_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \overline{c}_M \\ 0 & & \overline{b}_M & \overline{d}_M \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{S} = \begin{pmatrix} \widetilde{d}_1 & \widetilde{b}_2 & & 0 \\ \widetilde{b}_2 & \widetilde{d}_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \widetilde{b}_M \\ 0 & & \widetilde{b}_M & \widetilde{d}_M \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{d}_i = \overline{d}_i \qquad \widetilde{b}_j = \mathrm{sign}(b_j)\sqrt{|\overline{b}_j \overline{c}_j|}$$

$$\overline{D}_M(\lambda) = \widetilde{D}_M(\lambda)$$

$$\Delta S = S - \widetilde{S} = \begin{pmatrix} \beta_1 & \eta_2 & & 0 \\ \eta_2 & \beta_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \eta_M \\ 0 & & \eta_M & \beta_M \end{pmatrix}$$

$$|\eta_j| \le \varepsilon_1 \frac{3-\varepsilon_1}{1-2\varepsilon_1}, \quad |\beta_i| \le \frac{\varepsilon_1}{\gamma} + \frac{\varepsilon_0}{1-2\varepsilon_1} \Rightarrow \|\triangle S\| \le \mathcal{M}(\triangle S) \le 7\varepsilon_1$$

1)нормировать S:

$$\rho = \gamma^k, \qquad \frac{1}{\gamma} \le \max_{i,j} \left\{ |\rho d_i| \ , \ |\rho b_j| \right\} < 1 \qquad \Rightarrow \ S_1 = \rho S, \qquad \|S_1\| \le 3$$

2) “возмутить"матрицу $S_1 \to S_2$,
т. е. if $|\rho d_i| \ , \ |\rho b_j| < \varepsilon_1/\gamma \ \rho d_i \ , \ \rho b_j \ \longrightarrow \ \pm\varepsilon_1/\gamma$

3)метод бисекций для S_2

Теорема. Пусть в $\{\mathcal{P}_j^{[c]}(\lambda)\}$ $(j = 1, \ldots, M)$ p неположительных $\Longrightarrow$

$$\lambda_p(S_2) < \lambda + 7\varepsilon_1, \qquad \lambda - 7\varepsilon_1 \le \lambda_{p+1}(S_2).$$

Критерий остановки итераций

$\lambda_n \in [X^-, X^+]$, $X^+ - X^- \le \varepsilon$

$|\widetilde{\lambda}_n - \lambda_n| \le ||\widetilde{S}_2 - S_2|| \Longrightarrow \varepsilon \approx ||\widetilde{S}_2 - S_2|| \Rightarrow \varepsilon = 3 \cdot 7\varepsilon_1 = 21\varepsilon_1$

$\lambda_n^{[c]}(S_2) = (X^+ - X^-)/2 \Rightarrow \lambda_n(S_2) \in [\lambda_n^{[c]}(S_2) - \delta, \lambda_n^{[c]}(S_2) + \delta]\ \delta = 10.5\varepsilon_1$

Двусторонние последовательности Штурма

$$T = \begin{pmatrix} d_1 & c_2 & & 0 \\ b_2 & d_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & c_M \\ 0 & & b_M & d_M \end{pmatrix}, \qquad b_j c_j > 0$$

$\mathcal{P}_j = \mathcal{P}_j(\lambda)$

$$\mathcal{P}_0 - (d_1 - \lambda) + \frac{|c_2|}{\mathcal{P}_1} = 0,$$
$$|b_2|\mathcal{P}_1 - (d_2 - \lambda) + \frac{|c_3|}{\mathcal{P}_2} = 0,$$
$$\ldots$$
$$|b_{M-1}|\mathcal{P}_{M-2} - (d_{M-1} - \lambda) + \frac{|c_M|}{\mathcal{P}_{M-1}} = 0,$$
$$|b_M|\mathcal{P}_{M-1} - (d_M - \lambda) + \frac{1}{\mathcal{P}_M} = 0.$$

Левосторонняя последовательность

$$\mathcal{P}_0^{(+)}(\lambda) = 0,$$
$$\mathcal{P}_j^{(+)}(\lambda) = \frac{|c_{j+1}|}{d_j - \lambda - |b_j|\mathcal{P}_{j-1}^{(+)}(\lambda)},$$
$$\mathcal{P}_M^{(+)}(\lambda) = \frac{1}{d_M - \lambda - |b_M|\mathcal{P}_{M-1}^{(+)}(\lambda)}.$$

Правосторонняя последовательность

$$\mathcal{P}_M^{(-)}(\lambda) = +\infty,$$
$$\mathcal{P}_j^{(-)}(\lambda) = \frac{d_{j+1} - \lambda - |c_{j+2}|/\mathcal{P}_{j+1}^{(-)}(\lambda)}{|b_{j+1}|},$$
$$\mathcal{P}_0^{(-)}(\lambda) = d_1 - \lambda - |c_2|/\mathcal{P}_1^{(-)}(\lambda)\ .$$

$$\mathcal{P}_M^{(+)}(\lambda_n) = \frac{D_{M-1}(\lambda_n)}{D_M(\lambda_n)} = +\infty$$

$$Tv = \lambda v$$

$$\begin{aligned} &-(d_1 - \lambda) + \frac{|c_2|}{\mathcal{P}_1} = 0, \\ &|b_j|\mathcal{P}_{j-1}(\lambda) - (d_j - \lambda) + \frac{|c_{j+1}|}{\mathcal{P}_j} = 0, \\ &|b_M|\mathcal{P}_{M-1}(\lambda) - (d_M - \lambda) = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &-(d_1 - \lambda) - c_2\frac{v_2}{v_1} = 0, \\ &-b_j\frac{v_{j-1}}{v_j} - (d_j - \lambda) - c_{j+1}\frac{v_{j+1}}{v_j} = 0, \\ &-b_M\frac{v_{M-1}}{v_M} - (d_M - \lambda) = 0 \end{aligned}$$

$$\mathcal{P}_j(\lambda_n) = \frac{-\mathrm{sign}(c_{j+1})v_j}{v_{j+1}}$$

Вычисление двусторонней последовательности

$$S = \begin{pmatrix} d_1 & b_2 & & & & 0 \\ b_2 & d_2 & b_3 & & & \\ & b_3 & d_3 & b_4 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & b_{M-1} & d_{M-1} & b_M \\ 0 & & & & b_M & d_M \end{pmatrix}, \qquad \lambda_n^{(-)} \leq \lambda_n(S) \leq \lambda_n^{(+)}$$

$$\mathcal{P}_j^{(+)[c]} = |b_{j+1}| \overline{\oslash} (d_j \underline{\ominus}_0 \lambda_n^{(+)} \underline{\ominus}_0 |b_j| \overline{\otimes} \mathcal{P}_{j-1}^{(+)\,[c]}$$

$$\mathcal{P}_j^{(-)[c]} = (d_{j+1} \overline{\ominus}_0 \lambda_n^{(-)} \overline{\ominus}_0 |b_{j+2}| \underline{\oslash} \mathcal{P}_{j+1}^{(-)\,[c]} \overline{\oslash} |b_{j+1}|$$

Лемма.

$$\varepsilon_1 \geq 2\gamma \max\left\{ \sqrt[4]{\varepsilon_0}\,,\ \sqrt[4]{\frac{2}{\varepsilon_\infty}} \right\},$$

$$\frac{\varepsilon_1}{\gamma} \leq |d_i| \leq 1, \quad \frac{\varepsilon_1}{\gamma} \leq |b_j| \leq 1,$$

$$-3 \leq \lambda \leq 3$$

$$\Longrightarrow \qquad \varepsilon_0 < \left|\mathcal{P}_j^{(+)[c]}\right| < \varepsilon_\infty, \quad \varepsilon_0 < \left|\mathcal{P}_j^{(-)[c]}\right| < \varepsilon_\infty.$$

Тригонометрические последовательности

Пусть $p_j^{(+)}$ число "$-$"среди $\mathcal{P}_1^{(+)}, \mathcal{P}_2^{(+)}, \ldots, \mathcal{P}_j^{(+)}$
$\Longrightarrow \varphi_j^{(+)} = p_j^{(+)}\pi + \arctan \mathcal{P}_j^{(+)}$ левосторонняя триг. посл. Штурма

Пусть q_j число "$-$"среди $\mathcal{P}_{j+1}^{(-)}, \mathcal{P}_{j+2}^{(-)}, \ldots, \mathcal{P}_{M-1}^{(-)}$, причем $p_j^{(-)} = n - 1 - q_j$
$\Longrightarrow \varphi_j^{(-)} = p_j^{(-)}\pi + \arctan \mathcal{P}_j^{(-)}$ правосторонняя триг. посл. Штурма

Если $\mathcal{P}_j$ - двуст. рац. посл. $\Longrightarrow \varphi_j = p_j\pi + \arctan \mathcal{P}_j$ двусторонняя триг. посл. Штурма

Графики: $(0,\varphi_0)$, $(1,\varphi_1)$, $(2,\varphi_2)$,..., $(M-1,\varphi_{M-1})$, (M,φ_M)

Лемма. Пусть $\lambda_n^{(-)} \le \lambda_n \le \lambda_n^{(+)}$. Тогда

$$\varphi_0^{(-)}(\lambda_n^{(-)}) \ge \varphi_0^{(+)}(\lambda_n^{(+)}), \qquad \varphi_M^{(+)}(\lambda_n^{(+)}) \ge \varphi_M^{(-)}(\lambda_n^{(-)})$$

Следствие. $\exists\, J$

$$\varphi_{J-1}^{(+)}(\lambda_n^{(+)}) \le \varphi_{J-1}^{(-)}(\lambda_n^{(-)}), \qquad \varphi_J^{(+)}(\lambda_n^{(+)}) \ge \varphi_J^{(-)}(\lambda_n^{(-)})$$

Дано: S, n

1. Определить $\lambda_n^{(-)}, \lambda_n^{(+)}$

2. Вычислить $\mathcal{P}_j^{(+)[c]}$, $\mathcal{P}_j^{(-)[c]}$ в точках $\lambda_n^{(-)}, \lambda_n^{(+)}$

3. "Склейка": Вычислить триг.посл. $\varphi_j^{(+)[c]}, \quad \varphi_j^{(-)[c]}$

Определить J $\varphi_{J-1}^{(+)[c]} \leq \varphi_{J-1}^{(-)[c]}$

Составить последовательность

$$\mathcal{P}_1^{(+)[c]}, \ldots, \mathcal{P}_{J-1}^{(+)[c]}, \mathcal{P}_J^{(-)[c]}, \ldots, \mathcal{P}_{M-1}^{(-)[c]}$$

$$\widetilde{S} = \begin{pmatrix} \widetilde{d}_1^{(+)} & c_2^{(+)} & & & & & & & & 0 \\ b_2^{(+)} & \widetilde{d}_2^{(+)} & c_3^{(+)} & & & & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & & \\ & & b_{J-1}^{(+)} & \widetilde{d}_{J-1}^{(+)} & c_J^{(+)} & & & & & \\ & & & \widetilde{b}_J(\tau) & \widetilde{d}_J(\tau) & \widetilde{c}_{J+1}(\tau) & & & & \\ & & & & b_{J+1}^{(-)} & \widetilde{d}_{J+1}^{(-)} & c_{J+2}^{(-)} & & & \\ & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & & & b_{M-1}^{(-)} & \widetilde{d}_{M-1}^{(-)} & c_M^{(-)} \\ 0 & & & & & & & b_M^{(-)} & \widetilde{d}_M^{(-)} \end{pmatrix}$$

$$\tau \in [0,1] : \qquad \begin{aligned} \widetilde{b}_J(\tau) &= (1-\tau) b_J^{(+)} + \tau b_J^{(-)}, \\ \widetilde{d}_J(\tau) &= (1-\tau) \widetilde{d}_J^{(+)} + \tau \widetilde{d}_J^{(-)}, \\ \widetilde{c}_{J+1}(\tau) &= (1-\tau) c_{J+1}^{(+)} + \tau c_{J+1}^{(-)}. \end{aligned}$$

Лемма. $\|\triangle S\| = \|S - \widetilde{S}\| \le 16\varepsilon_1(2+\gamma)$

Вычисление собственного вектора

$$u_1 = 1, \qquad u_{j+1} = -\mathrm{sign}(b_{j+1})\frac{u_j}{\mathcal{P}_j}$$

$\mathrm{Fr}(u_j)$, $\mathrm{Fr}(\mathcal{P}_j)$ - мантиссы
$\mathrm{Ex}(u_j)$, $\mathrm{Ex}(\mathcal{P}_j)$ - порядки

$$\mathrm{Fr}(u_1) = \frac{1}{\gamma}, \quad \mathrm{Ex}(u_1) = 1,$$

$$\mathrm{Fr}(u_{j+1}) = \mathrm{Fr}\left(\frac{\mathrm{Fr}(u_j)}{\mathrm{Fr}(\mathcal{P}_j)}\right), \qquad \mathrm{Ex}(u_{j+1}) = \mathrm{Ex}\left(\frac{\mathrm{Fr}(u_j)}{\mathrm{Fr}(\mathcal{P}_j)}\right) + \mathrm{Ex}(u_j) - \mathrm{Ex}(\mathcal{P}_j)$$

$$\widetilde{v}(S) = v(\rho S + \triangle S) + \eta$$

$$|\widetilde{\lambda}_n - \lambda_n| \le \varepsilon, \quad \|(A - \widetilde{\lambda}_n I)\widetilde{v}_n\| \le \varepsilon$$

Пусть $e^{(j)}$ - исходный базис,
$f^{(1)} = Pe^{(1)}$, $f^{(2)} = Pe^{(2)}, \dots,$ $f^{(M)} = Pe^{(M)}$ – переход в другой базис

$$Af^{(i)} = \sum_{j=1}^{M} s_{ji} f^{(j)}.$$

$s_{ji} = (Af^{(i)}, f^{(j)}) = (APe^{(i)}, Pe^{(j)}) =$ – элементы матрицы в новом базисе

$$(PAP^{*}e^{(i)}, e^{(j)}) = (Se^{(i)}, e^{(j)})$$

Алгоритм Ланцоша $\quad A = A^{*}$, $M \times M$

Требуется найти ортонормированные векторы $h^{(1)}, h^{(2)}, \dots, h^{(M)}$:

$$(Ah^{(i)}, h^{(j)}) = 0 \quad \text{при} \quad |i - j| > 1,$$

т.е. в новом базисе матрица трехдиагональна.

1. $u \in \mathbf{R}_M$ - произвольный

$$\begin{aligned} &h^{(1)} = u/\|u\|, \\ &d_1 = (Ah^{(1)}, h^{(1)}), \\ &v^{(2)} = Ah^{(1)} - d_1 h^{(1)}, \\ &b_2 = \|v^{(2)}\|, \\ &h^{(2)} = v^{(2)}/b_2, \quad \text{если} \quad b_2 \neq 0. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|h^{(1)}\| = \|h^{(2)}\| = 1, \quad h^{(1)} \perp h^{(2)} :$$

$$(h^{(1)}, h^{(2)}) = b_2(h^{(1)}, v^{(2)}) = b_2(h^{(1)}, Ah^{(1)} - d_1 h^{(1)}) = b_2\Big[(Ah^{(1)}, h^{(1)}) - d_1(h^{(1)}, h^{(1)})\Big] = 0.$$

2.

$$\begin{aligned} &d_2 = (Ah^{(2)}, h^{(2)}), \\ &v^{(3)} = Ah^{(1)} - d_2 h^{(2)} - b_2 h^{(1)}, \\ &b_3 = \|v^{(3)}\|, \\ &h^{(3)} = v^{(3)}/b_3, \quad \text{если} \quad b_3 \neq 0. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|h^{(3)}\| = 1, \quad h^{(3)} \perp h^{(1)}, \quad h^{(3)} \perp h^{(2)}.$$

Шаг $i\,(2 \le i \le M-1)$

$$\begin{aligned} &d_i = (Ah^{(i)}, h^{(i)}),\\ &v^{(i+1)} = Ah^{(i)} - d_i h^{(i)} - b_i h^{(i-1)},\\ &b_{i+1} = \|v^{(i+1)}\|,\\ &h^{(i+1)} = v^{(i+1)}/b_{i+1}, \quad \text{если} \quad b_{i+1} \neq 0. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|h^{(i+1)}\| = 1,$$

$$h^{(i+1)} \perp h^{(1)}, \ldots, h^{(i+1)} \perp h^{(i)}$$

Шаг M $\quad d_M = (Ah^{(M)}, h^{(M)})$

Замечание. Если на шаге M вычислить

$$\begin{aligned} &d_M = (Ah^{(M)}, h^{(M)}),\\ &v^{(M+1)} = Ah^{(M)} - d_M h^{(M)} - b_M h^{(M-1)},\\ &b_{M+1} = \|v^{(M+1)}\|, \end{aligned}$$

то $b_{M+1} = 0!$ иначе в R_M $(M+1)$ ортогональный вектор

Пусть L – дискретная модель оператора Лапласа

$$u_{mn} = u\left(\frac{m}{M}, \frac{n}{N}\right) = x^2(1-x)y(1-y^2),$$

где $x = \dfrac{m}{M}, \quad y = \dfrac{n}{N}$

$$1 \le m \le M-1,\ 1 \le n \le N-1, \quad M = N = 7$$

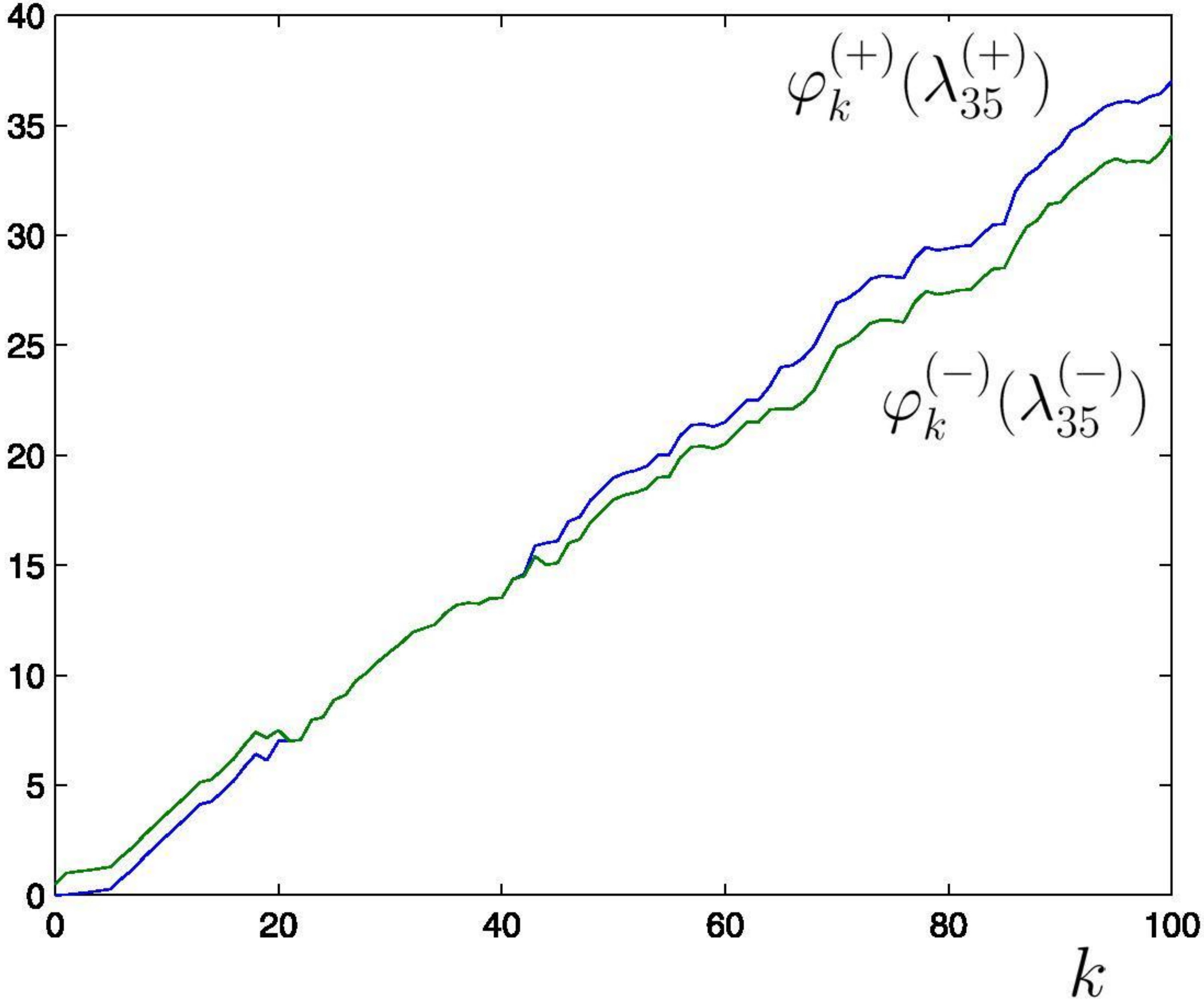
j	d_j	b_j	j	d_j	b_j
1	-23.552		51	-186.637	37.960
2	-66.775	11.251	52	-182.940	38.058
3	-117.027	41.155	53	-177.415	43.780
4	-125.815	45.162	54	-88.185	80.587
5	-125.404	70.378	55	-189.554	64.125
6	-231.417	77.149	56	-357.927	2.575
7	-184.780	84.609	57	-238.840	43.220
8	-241.779	89.594	58	-144.679	36.304
9	-233.926	70.514	59	-74.052	49.928
10	-236.845	70.344	60	-235.196	3.200
11	-203.267	80.781	61	-255.585	8.921
12	-214.559	87.826	62	-242.241	95.860
13	-229.170	56.088	63	-73.831	1.527
14	-168.062	62.439	64	-184.103	0.559
15	-234.675	44.736	65	-219.983	114.766
16	-224.583	53.063	66	-39.319	0.145
17	-245.480	55.270	67	-204.400	51.433
18	-251.095	24.465	68	-181.363	91.385
19	-160.612	8.983	69	-293.575	21.643
20	-228.718	23.391	70	-363.328	9.826
21	-19.848	$6.540\ \mathbf{10}^{-7}$	71	-210.582	35.702
22	-48.915	3.438	72	-231.190	17.674
23	-368.936	29.466	73	-99.648	49.210
24	-86.202	15.258	74	-181.413	70.516
25	-330.068	40.360	75	-162.721	33.056

j	d_j	b_j	j	d_j	b_j
26	-102.753	42.134	76	-149.955	22.459
27	-281.951	47.467	77	-343.136	12.252
28	-160.025	53.119	78	-239.608	12.477
29	-237.493	57.418	79	-158.245	10.825
30	-197.959	50.263	80	-215.123	3.412
31	-224.476	32.581	81	-93.802	53.285
32	-227.040	55.214	82	-43.036	2.768
33	-196.498	60.676	83	-218.511	61.454
34	-210.601	22.953	84	-226.331	88.378
35	-240.639	24.752	85	-88.226	15.277
36	-189.674	19.577	86	-372.476	5.618
37	-208.568	41.002	87	-286.518	0.325
38	-190.688	4.649	88	-133.341	54.0988
39	-201.533	40.467	89	-264.016	26.465
40	-19.531	4.567	90	-60.881	54.409
41	-351.889	3.359	91	-310.665	3.359
42	-67.303	62.936	92	-231.031	62.936
43	-339.143	0.171	93	-234.697	4.240
44	-80.880	40.666	94	-202.333	24.641
45	-95.807	3.169	95	-177.568	56.826
46	-307.416	48.843	96	-50.854	7.837
47	-143.836	2.595	97	-137.653	60.527
48	-248.321	64.396	98	-178.222	3.024
49	-231.792	4.851	99	-135.094	78.951
50	-248.922	56.576	100	-254.870	14.074

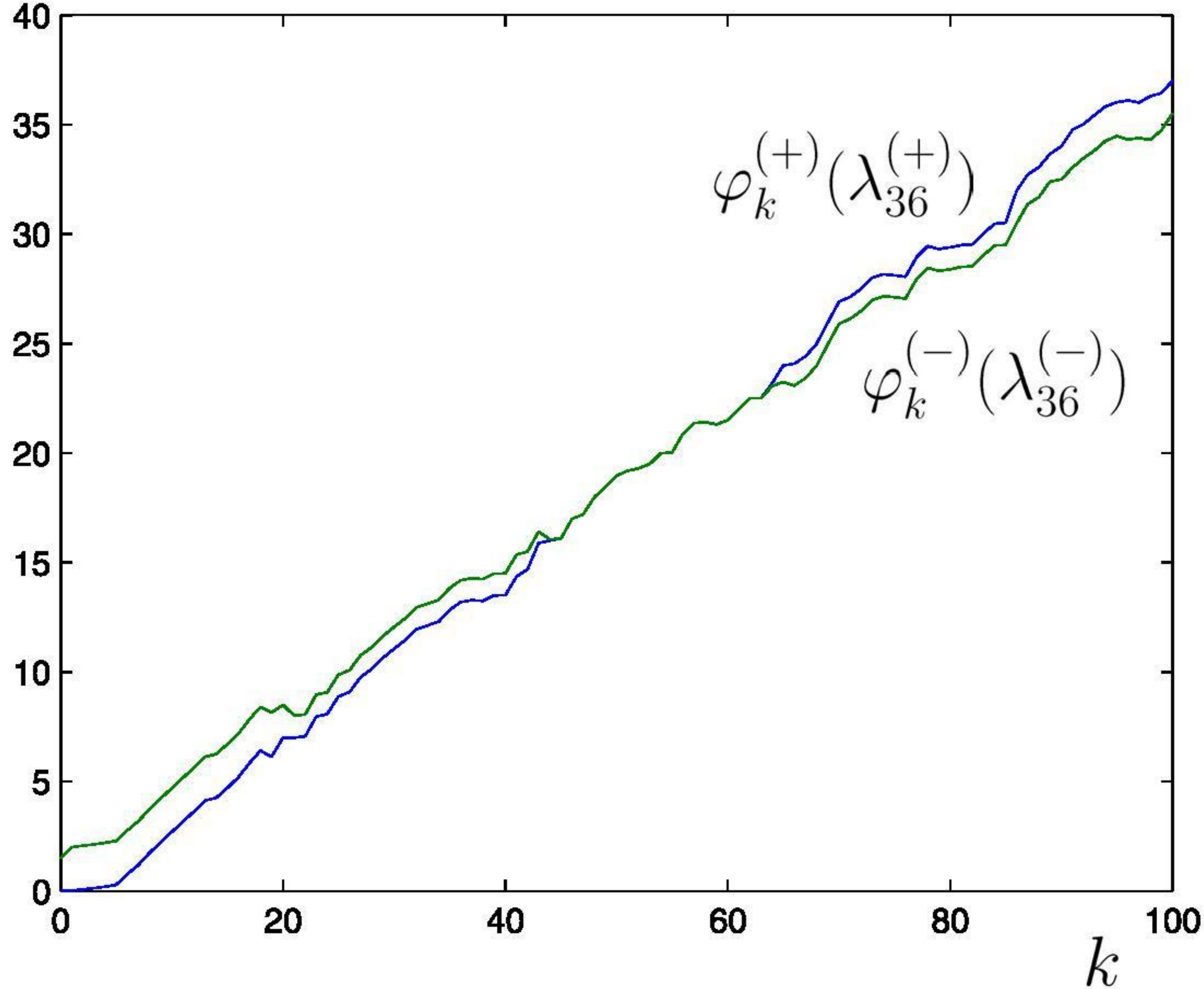
j	$\widetilde{\lambda}_j(S)$	j	$\widetilde{\lambda}_j(S)$	j	$\widetilde{\lambda}_j(S)$	j	$\widetilde{\lambda}_j(S)$
1	-372.589	26	-278.909	51	-195.999	76	-86.044
2	-372.589	27	-278.909	52	-195.999	77	-85.897
3	-372.589	28	-262.487	53	-168.818	78	-85.897
4	-372.589	29	-262.487	54	-168.807	79	-85.897
5	-372.589	30	-262.487	55	-168.807	80	-85.897
6	-372.589	31	-262.487	56	-168.807	81	-74.105
7	-345.396	32	-262.487	57	-168.796	82	-73.892
8	-345.396	33	-259.098	58	-156.712	83	-73.795
9	-345.396	34	-239.614	59	-156.705	84	-73.795
10	-345.396	35	-239.614	60	-156.705	85	-73.795
11	-345.396	36	-239.614	61	-156.705	86	-73.795
12	-345.396	37	-239.614	62	-152.386	87	-49.329
13	-318.204	38	-235.294	63	-152.385	88	-46.603
14	-318.204	39	-235.294	64	-152.385	89	-46.603
15	-318.204	40	-235.294	65	-152.385	90	-46.603
16	-318.204	41	-235.294	66	-129.712	91	-46.603
17	-318.204	42	-235.040	67	-129.512	92	-46.603
18	-306.102	43	-223.193	68	-129.512	93	-23.552
19	-306.102	44	-223.192	69	-129.512	94	-19.410
20	-306.102	45	-223.192	70	-129.512	95	-19.410
21	-306.102	46	-223.192	71	-113.106	96	-19.410
22	-306.102	47	-223.192	72	-113.090	97	-19.410
23	-278.909	48	-196.012	73	-113.090	98	-19.410
24	-278.909	49	-196.000	74	-113.090	99	-19.410
25	-278.909	50	-195.999	75	-113.090	100	-16.192

$$\lambda = \lambda_{35}(S) = \lambda_{36}(S) = \lambda_{37}(S) =$$

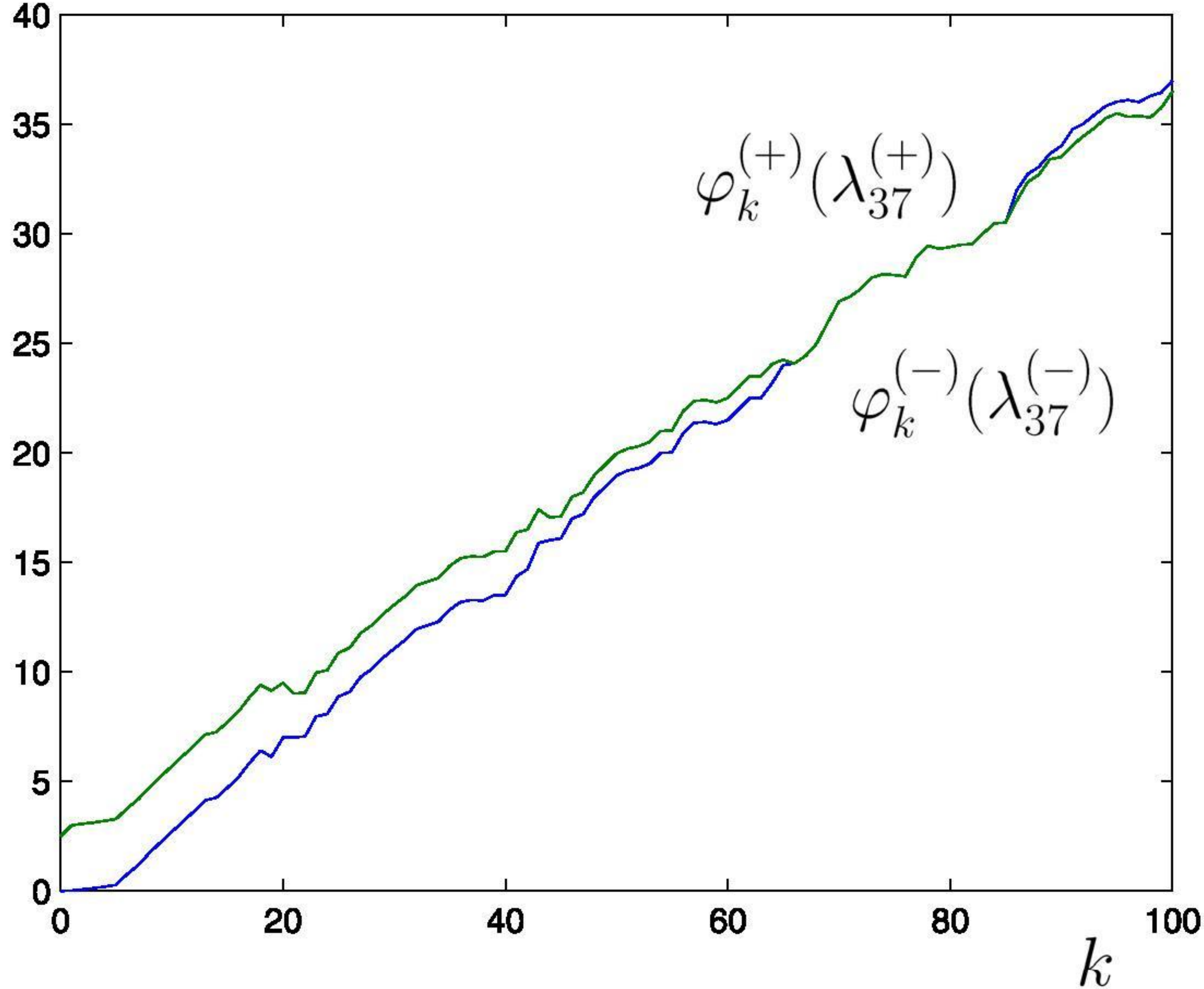
$$= -239.614103055438$$



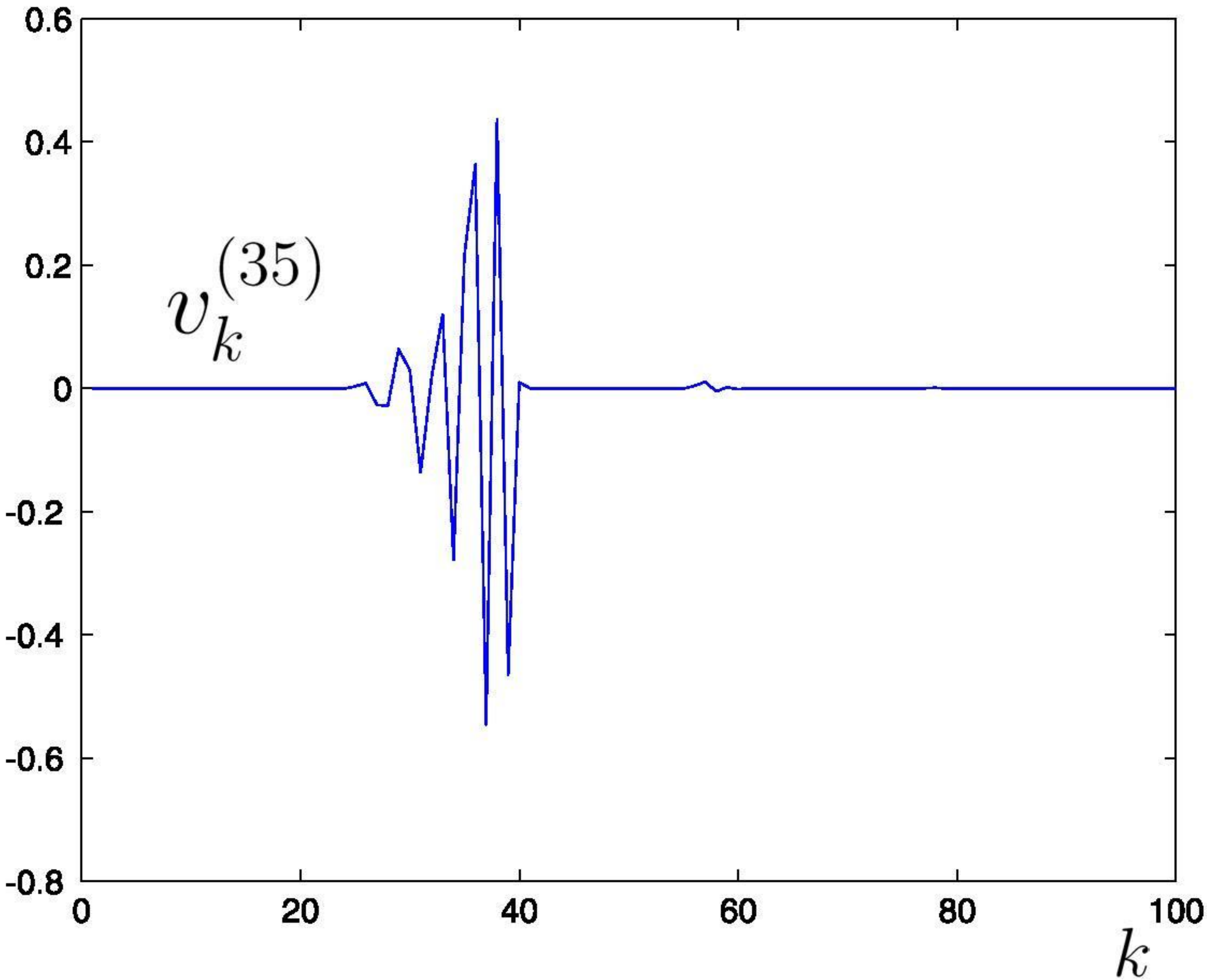
$\varphi_k^{(+)}(\lambda_{35}^{(+)})$
$\varphi_k^{(-)}(\lambda_{35}^{(-)})$
40
35
30
25
20
15
10
5
0
0
20
40
60
80
100
k



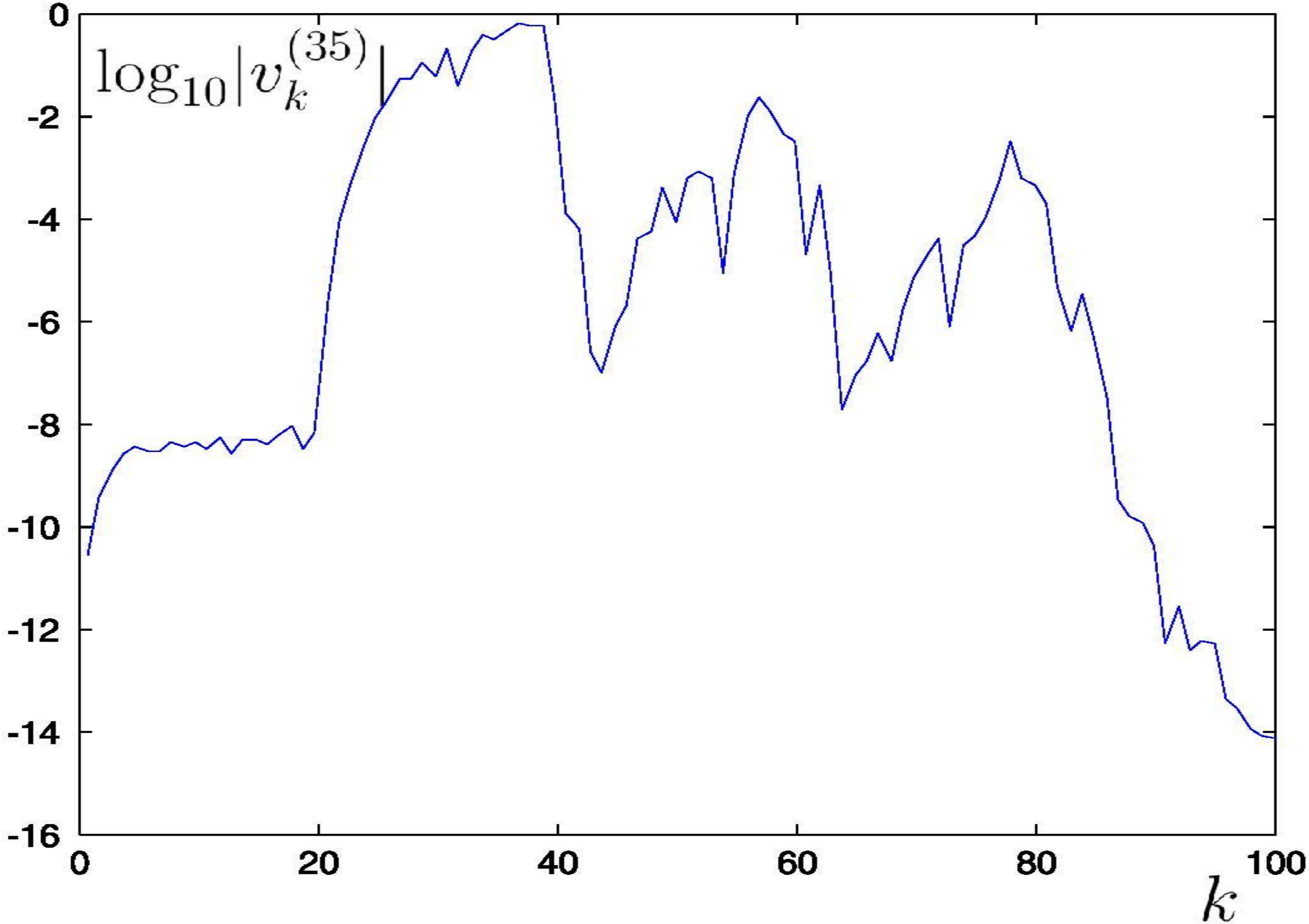
40
35
30
25
20
15
10
5
0
0
20
40
60
80
100
k
$\varphi_k^{(+)}(\lambda_{36}^{(+)})$
$\varphi_k^{(-)}(\lambda_{36}^{(-)})$

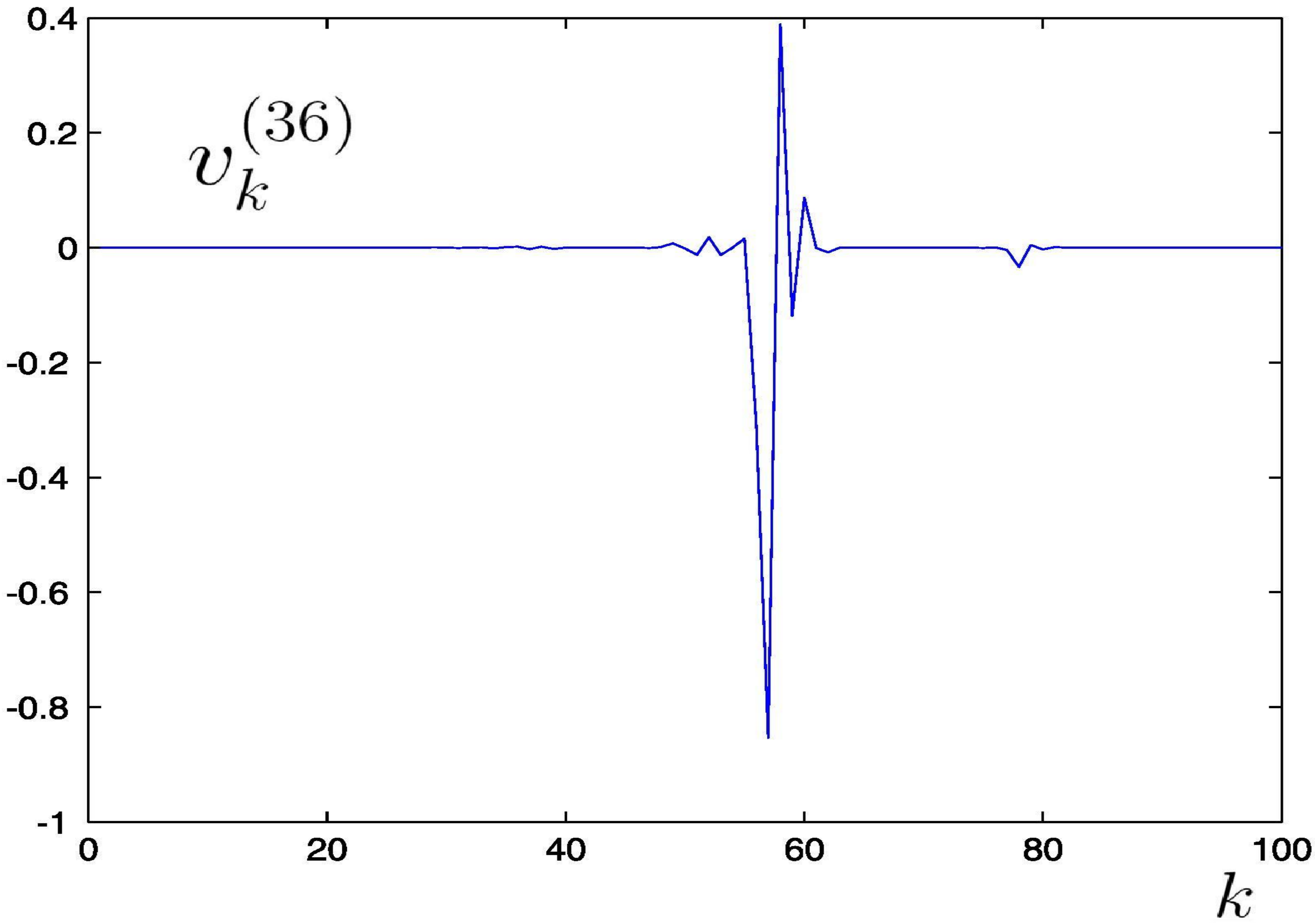


40
35
30
25
20
15
10
5
0
0
20
40
60
80
100
k
$\varphi_k^{(+)}(\lambda_{37}^{(+)})$
$\varphi_k^{(-)}(\lambda_{37}^{(-)})$

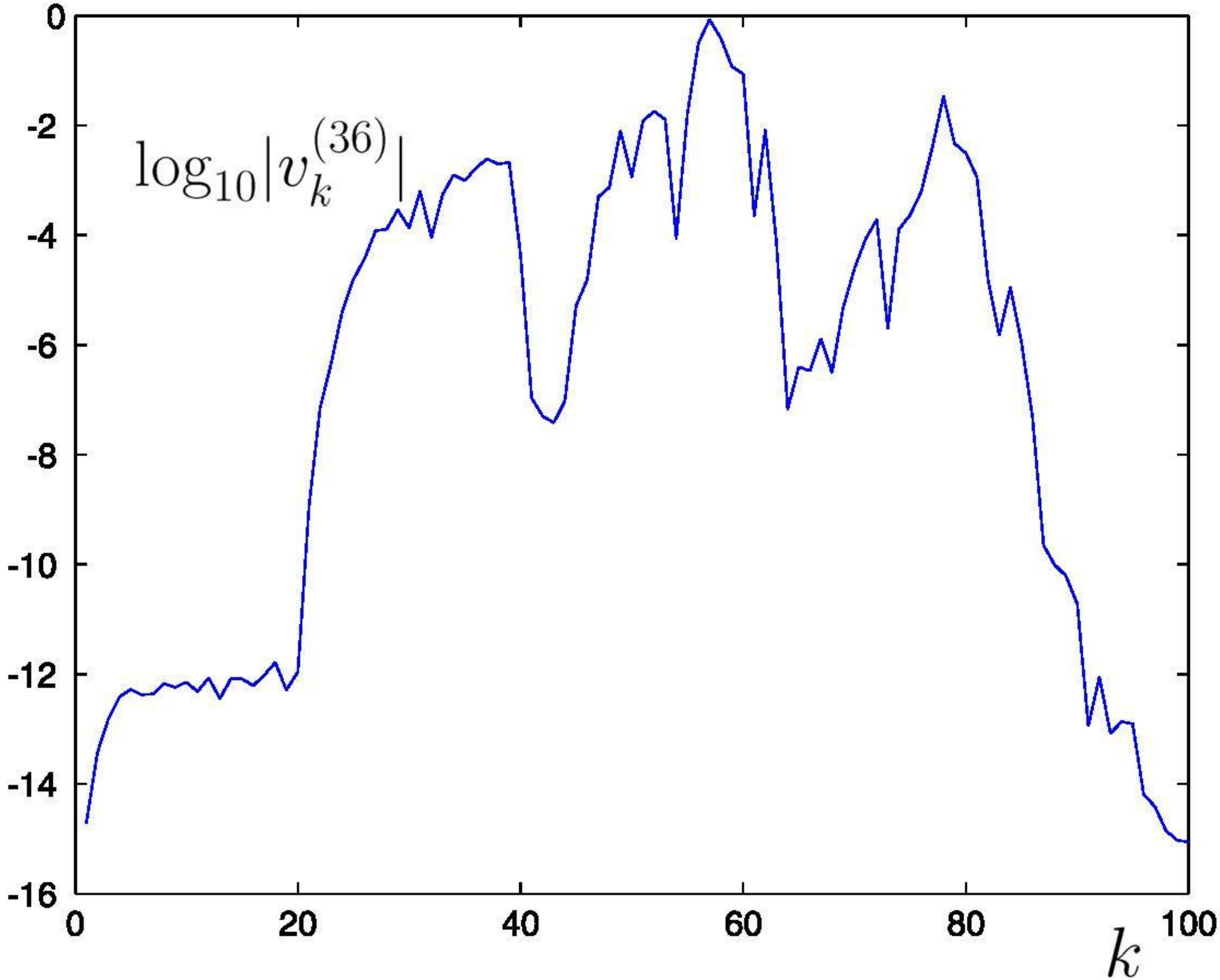


0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
0
20
40
60
80
100
$v_k^{(35)}$
k

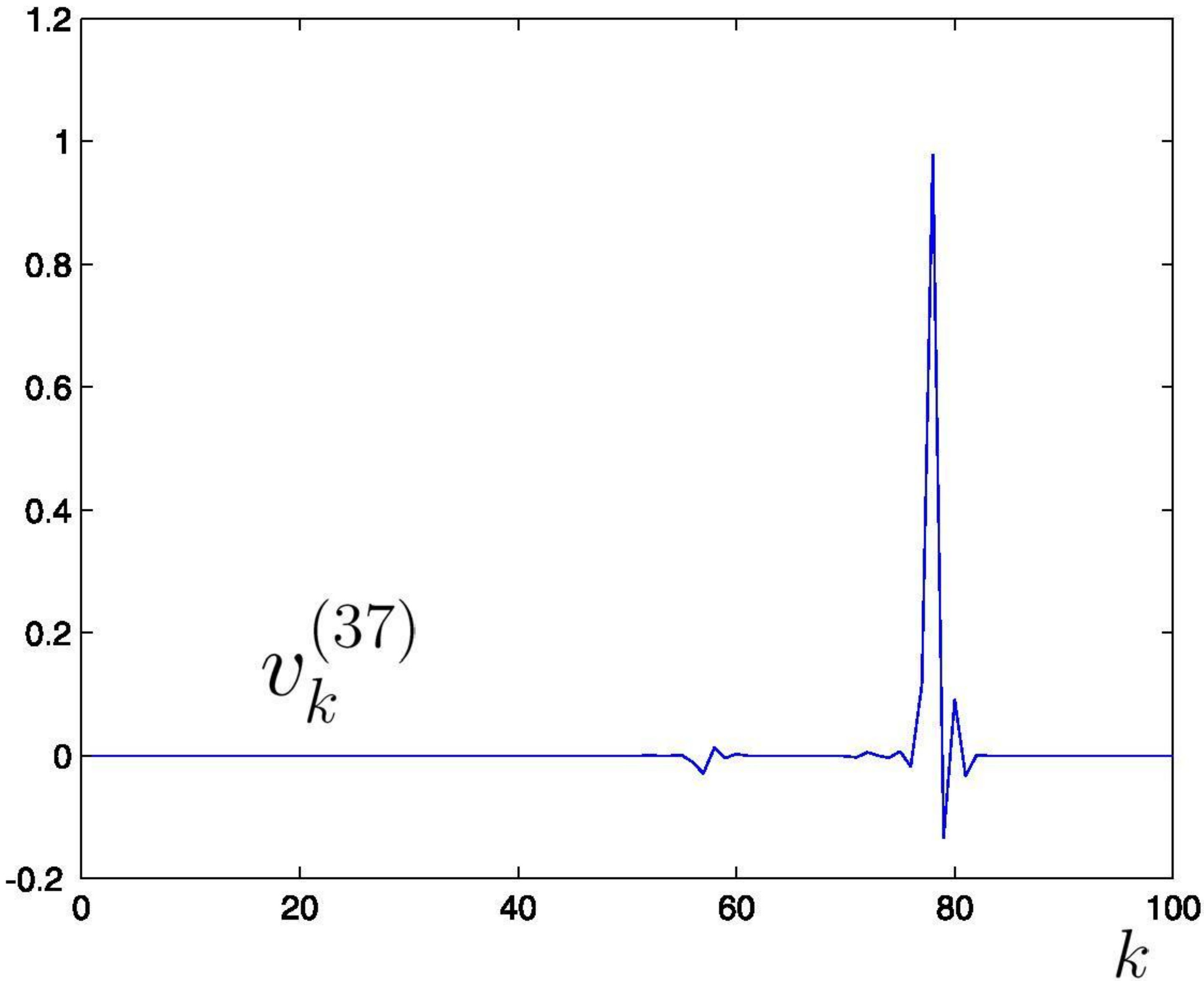

$\log_{10}|v_k^{(35)}|$
0
-2
-4
-6
-8
-10
-12
-14
-16
0
20
40
60
80
100
k



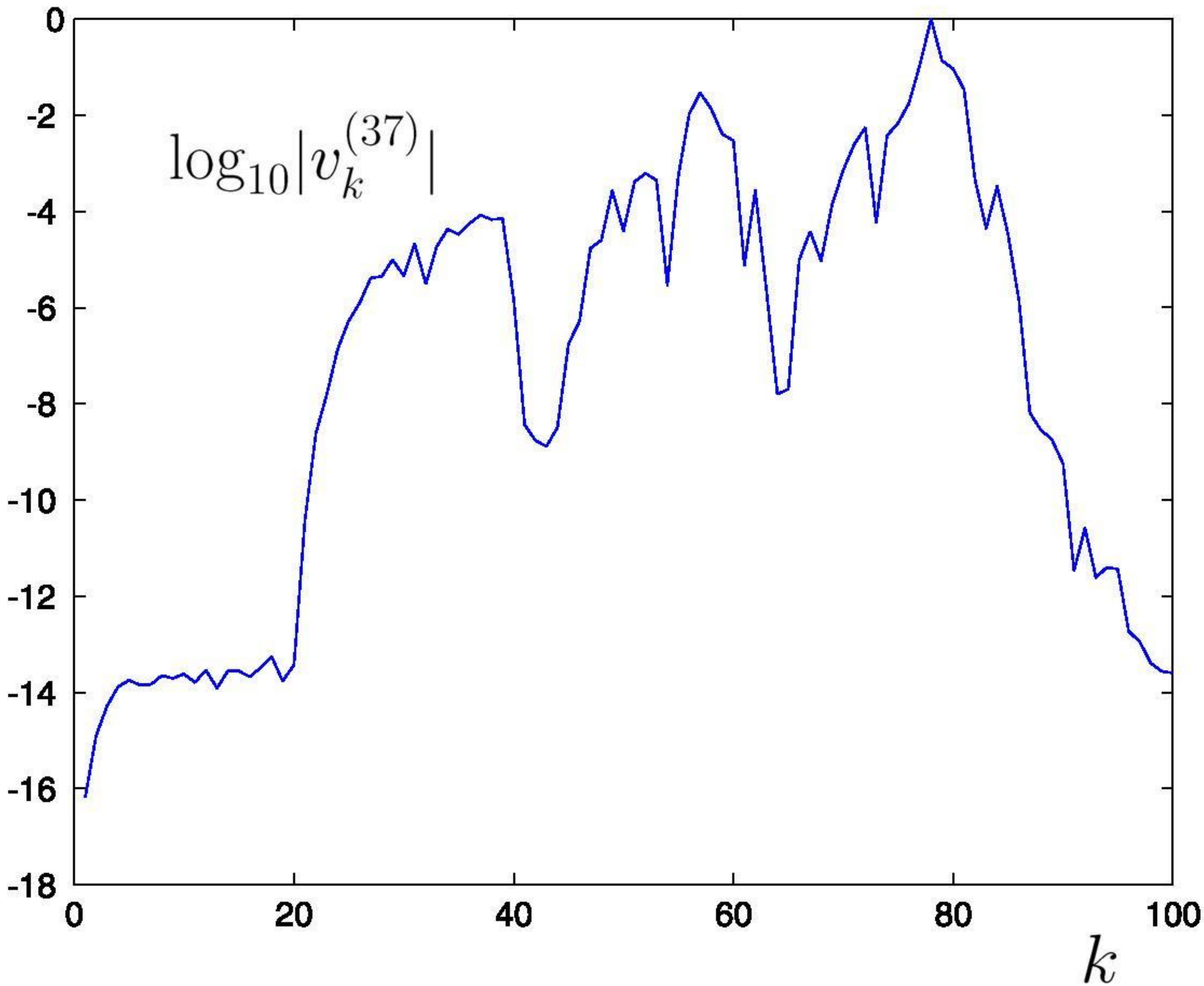
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
0
20
40
60
80
100
$v_k^{(36)}$
k



0
-2
-4
-6
-8
-10
-12
-14
-16
0
20
40
60
80
100
$\log_{10}|v_k^{(36)}|$
k



1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
0
20
40
60
80
100
k
$v_k^{(37)}$


0
-2
-4
-6
-8
-10
-12
-14
-16
-18
0
20
40
60
80
100
k
$\log_{10}|v_k^{(37)}|$

Инвариантные подпространства дифференциального оператора

$$A\frac{\partial u}{\partial t} + \sum B_k \frac{\partial u}{\partial x_k} = 0$$

$$A = A^* > 0, \qquad B_k = B_k^*$$

Дифференциальный оператор $D = -\sum A^{-1} B_k \frac{\partial}{\partial x_k}$

Спектральная задача: $Du = \lambda u, \quad x \in \Omega, \quad \Phi u|_{\partial\Omega} = 0$

Консервативные гр. усл.

$$\int_{\partial\Omega} \left(\sum \xi_i B_i u, u \right) dS = 0$$

Задача: вычислить с.зн. такие, что $0 < |\lambda| \leq r$

Энергетическое скал.произведение

$$[u,v]_A = \int_\Omega (Au,v)d\Omega, \qquad \|u\|_A^2 = [u,u]_A$$

$\Longrightarrow D^* = -D$ кососимметрический оператор

Уравнения акустики u, v, p, $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$

Характер. корни $\pm c_0, 0$

Положим $c_0 = \rho_0 = 1$

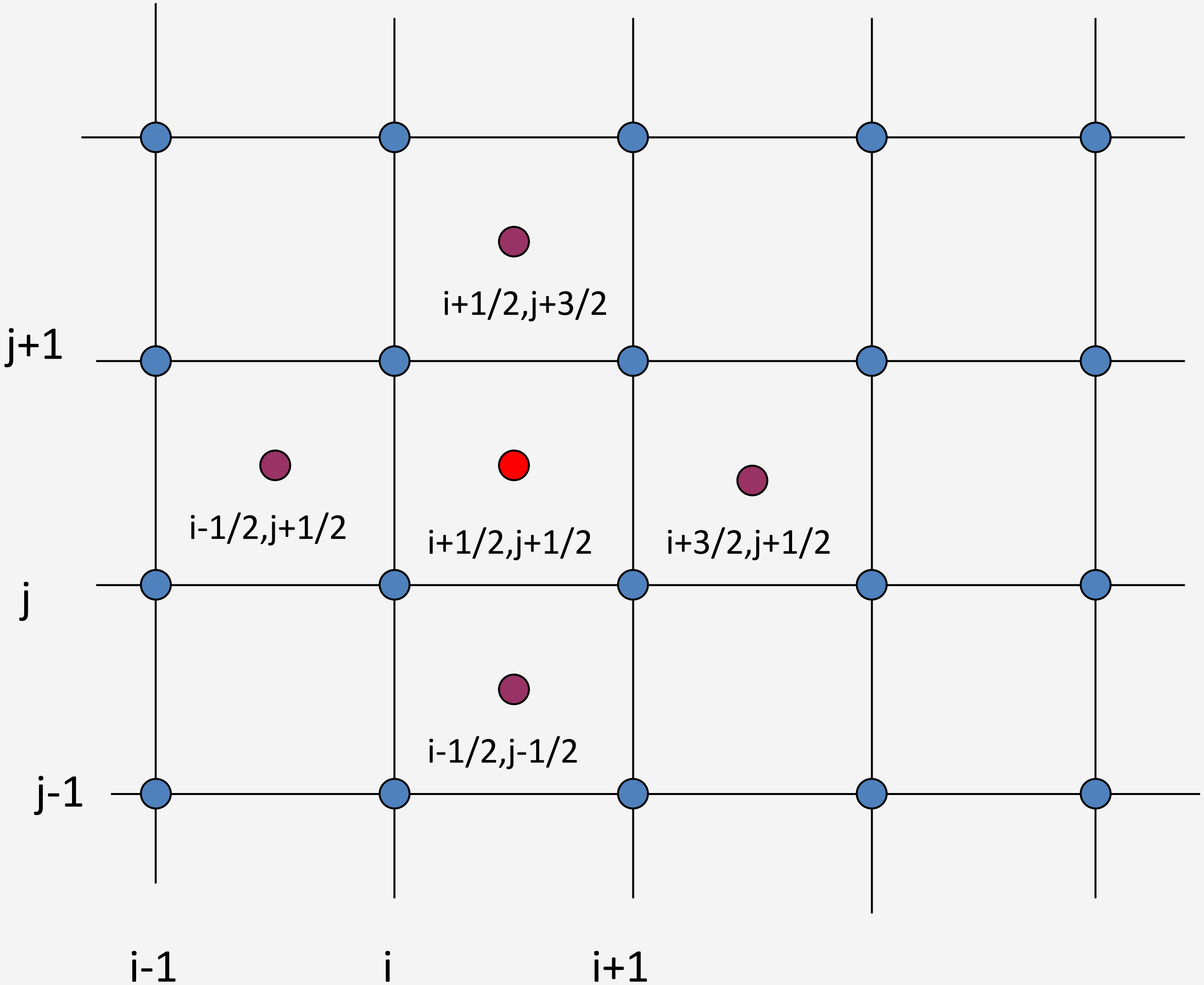
Область $\Omega = \{0 \leq x, y \leq \pi\}$

Гр. усл $p|_{\partial\Omega} = 0$

$$\rho_0 \frac{\partial U}{\partial t} + \mathrm{grad} p = 0$$

$$\frac{1}{\rho_0 c_0^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \mathrm{div} U = 0$$

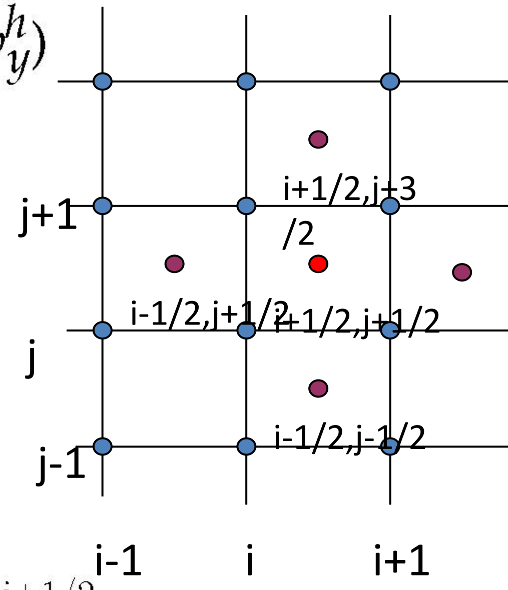
$$D(u,v,p) = -(\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y})$$


i+1/2,j+3/2
j+1
i-1/2,j+1/2
i+1/2,j+1/2
i+3/2,j+1/2
j
i-1/2,j-1/2
j-1
i-1
i
i+1

Сеточный оператор

$$< D_2 w >_{\mathrm{i+1/2,\ j+1/2}} = -(p_x^h, p_y^h, u_x^h + v_y^h)$$

наследует кососимметричность, аппроксимация $O(h^2)$



$$p_x^h = \frac{p_{\mathrm{i+3/2,j+1/2}} - p_{\mathrm{i\text{-}1/2,j+1/2}}}{2h}$$

$$p_y^h = \frac{p_{\mathrm{i+1/2,j+3/2}} - p_{\mathrm{i+1/2,j\text{-}1/2}}}{2h}$$

$$p_{xx}^h = \frac{p_{\mathrm{i+3/2,j+1/2}} - 2p_{\mathrm{i+1/2,j+1/2}} + p_{\mathrm{i\text{-}1/2,j+1/2}}}{h^2}$$

$$p_{yy}^h = \frac{p_{\mathrm{i+1/2,j+3/2}} - 2p_{\mathrm{i+1/2,j+1/2}} + p_{\mathrm{i+1/2,j\text{-}1/2}}}{h^2}$$

$$< D_1 w >_{\mathrm{i+1/2,\ j+1/2}} = -(p_x^h - 0.5hu_{xx}^h, \quad p_y^h - 0.5hv_{yy}^h, \quad u_x^h + v_y^h - 0.5h(p_{xx}^h + p_{yy}^h)$$

Аппроксимация по схеме Годунова, $O(h^2)$

$r_0 = 0.5 \leq |\lambda| \leq r_1 = 4$

$$\lambda = \pm i\sqrt{2},\ \pm i\sqrt{5},\ \pm i\sqrt{5},\ \pm i\sqrt{8},$$

$$\pm i\sqrt{10},\ \pm i\sqrt{10},\ \pm i\sqrt{13},\ \pm i\sqrt{13},$$

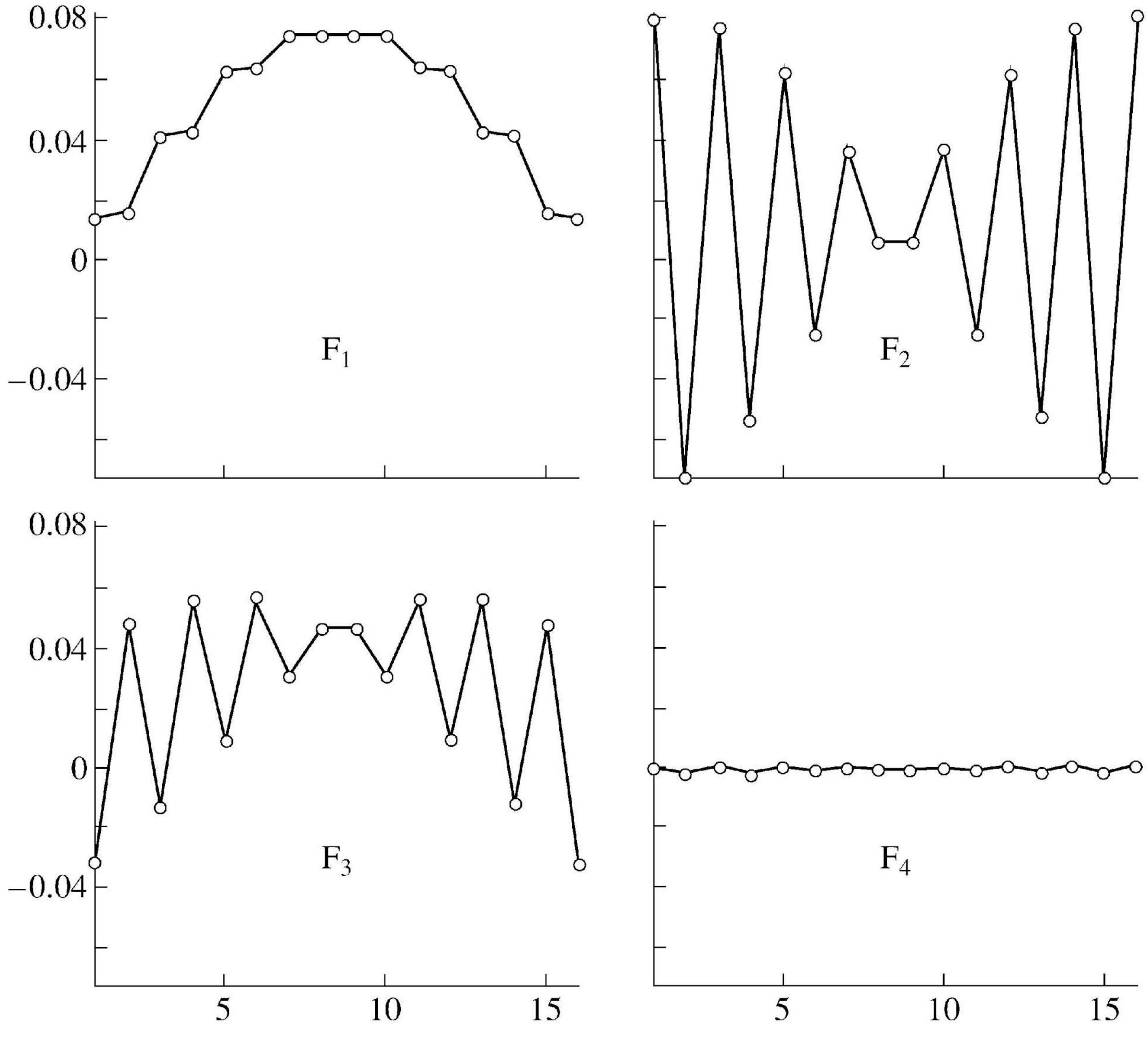
$$\lambda^2 = m^2 + n^2$$

Базис

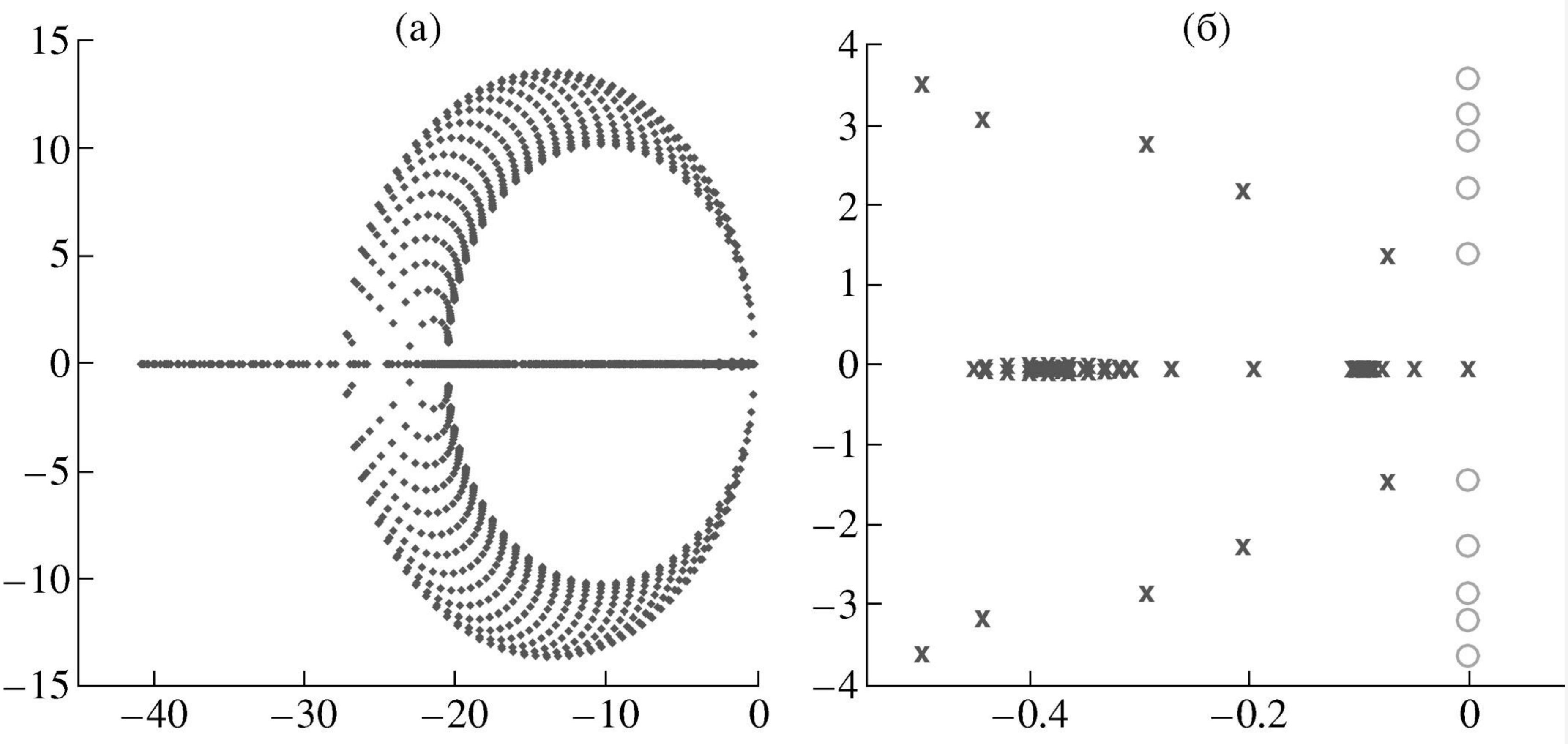
$$f_{mn} = [u, v, p] = [0, 0, \sin(mx) \times \sin(ny)]$$

$$\bar{f}_{mn} = [u, v, p] = [m\cos(mx)\sin(ny), n\cos(ny)\sin(mx), 0]$$

Спектр D	Спектр D_2	Кратность (число пар)	Число истинных пар
	$\pm 0.9984i$	4	0
$\pm 1.4142i$	$\pm 1.4119i$	4	1
	$\pm 1.9872i$	4	0
$\pm 2.2361i$	$\pm 2.2239i$	8	2
$\pm 2.8284i$	$\pm 2.8103i$	4	1
	$\pm 2.9568i$	4	0
$\pm 3.1623i$	$\pm 3.1208i$	8	2
$\pm 3.6056i$	$\pm 3.5625i$	8	2
	$\pm 3.8980i$	4	0



Фиг. 1.


(а)
15
10
5
0
−5
−10
−15
−40
−30
−20
−10
0
(б)
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−0.4
−0.2
0