

* Обратный анализ погрешности вычисления собственных значений симметрических матриц.

* Вычисление собственных векторов симметрических матриц

Определение последовательности Штурма

$$D_k(\lambda) = (d_k - \lambda)D_{k-1}(\lambda) - b_k c_k D_{k-2}(\lambda)$$

$$\frac{|c_{k+1}|D_{k-1}(\lambda)}{D_k(\lambda)} = \frac{|c_{k+1}|}{d_k - \lambda - |b_k||c_k|D_{k-2}(\lambda)/D_{k-1}(\lambda)}$$

$$\mathcal{P}_k(\lambda) = \frac{|c_{k+1}|D_{k-1}(\lambda)}{D_k(\lambda)} \quad (1 \leq k \leq M)$$

Последовательность Штурма

$$\mathcal{P}_1(\lambda) = \frac{|c_2|}{d_1 - \lambda}$$

$$\mathcal{P}_k(\lambda) = \frac{|c_{k+1}|}{d_k - \lambda - |b_k|\mathcal{P}_{k-1}(\lambda)}$$

Вычисление последовательности Штурма

$$S = \begin{pmatrix} d_1 & b_2 & \cdots & 0 \\ b_2 & d_2 & \cdots & \\ & \cdots & \cdots & b_M \\ 0 & & b_M & d_M \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{P}_1^{[c]}(\lambda) = |b_2| \ominus (d_1 \ominus_0 \lambda),$$

$$\mathcal{P}_j^{[c]}(\lambda) = |b_{j+1}| \ominus (d_j \ominus_0 \lambda \ominus_0 |b_j| \otimes \mathcal{P}_{j-1}^{[c]}(\lambda)),$$

$$\mathcal{P}_M^{[c]}(\lambda) = 1 \ominus (d_M \ominus_0 \lambda \ominus_0 |b_M| \otimes \mathcal{P}_{M-1}^{[c]}(\lambda)).$$

[c] – "computation"

$$a \ominus_0 b = \begin{cases} a \ominus b & \text{при } a \ominus b \neq 0, \\ \frac{\varepsilon_1}{\gamma} \max\{|a|, |b|\} & \text{при } a \ominus b = 0, \end{cases}$$

Лемма. Пусть

$$\varepsilon_1 \geq 2\gamma \max \left\{ \sqrt[4]{\varepsilon_0}, \sqrt[4]{\frac{2}{\varepsilon_\infty}} \right\},$$

$$\frac{\varepsilon_1}{\gamma} \leq |d_i| \leq 1, \quad \frac{\varepsilon_1}{\gamma} \leq |b_j| \leq 1,$$

$$-3 \leq \lambda \leq 3$$

⇒ нет ПЕРЕПОЛНЕНИЙ:

$$\varepsilon_0 < \frac{\varepsilon_1^4}{2\gamma^4} \leq \left| \varphi_j^{[c]} \right| \leq \frac{\gamma^3}{\varepsilon_1^3} < \varepsilon_\infty.$$

Замечание. If S удовл. усл. леммы

$$\frac{\varepsilon_1}{\gamma} \leq |d_i| \leq 1, \quad \frac{\varepsilon_1}{\gamma} \leq |b_j| \leq 1,$$

⇒ $\|S\| \leq \mathcal{M}(S) \leq 3 \Rightarrow -3 \leq \lambda \leq 3$

Моделирование погрешностей

$$a \otimes b = ab(1 + \psi) + \xi.$$

$$a \oslash b = \frac{a}{b}(1 + \varphi), \quad |\varphi| \leq \varepsilon_1,$$

$$a \ominus_0 b = (1 + \alpha)a - (1 + \bar{\alpha})b,$$

где $|\alpha| \leq \varepsilon_1$, $|\bar{\alpha}| \leq \varepsilon_1$, $|(1 + \alpha)/(1 + \bar{\alpha}) - 1| \leq \varepsilon_1/\gamma$.

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1^{[c]} &= \frac{|\bar{c}_2|}{\bar{d}_1 - \lambda}, \\ \mathcal{P}_j^{[c]} &= \frac{|\bar{c}_{j+1}|}{\bar{d}_j - \lambda - |\bar{b}_j| \mathcal{P}_{j-1}^{[c]}}, \\ \mathcal{P}_M^{[c]} &= \frac{|\bar{c}_{M+1}|}{\bar{d}_M - \lambda - |\bar{b}_M| \mathcal{P}_{M-1}^{[c]}}. \end{aligned} \quad \bar{S} = \begin{pmatrix} \bar{d}_1 & \bar{c}_2 & & 0 \\ \bar{b}_2 & \bar{d}_2 & \cdots & \\ & \cdots & \cdots & \bar{c}_M \\ 0 & & \bar{b}_M & \bar{d}_M \end{pmatrix}$$

$$\bar{S} = \begin{pmatrix} \bar{d}_1 & \bar{c}_2 & & 0 \\ \bar{b}_2 & \bar{d}_2 & \cdots & \\ & \cdots & \cdots & \bar{c}_M \\ 0 & & \bar{b}_M & \bar{d}_M \end{pmatrix}, \quad \tilde{S} = \begin{pmatrix} \tilde{d}_1 & \tilde{b}_2 & & 0 \\ \tilde{b}_2 & \tilde{d}_2 & \cdots & \\ & \cdots & \cdots & \tilde{b}_M \\ 0 & & \tilde{b}_M & \tilde{d}_M \end{pmatrix}$$

$$\tilde{d}_i = \bar{d}_i \quad \tilde{b}_j = \text{sign}(b_j) \sqrt{|\bar{b}_j \bar{c}_j|}$$

$$\bar{D}_M(\lambda) = \tilde{D}_M(\lambda)$$

$$\Delta S = S - \tilde{S} = \begin{pmatrix} \beta_1 & \eta_2 & & 0 \\ \eta_2 & \beta_2 & \cdots & \\ & \cdots & \cdots & \eta_M \\ 0 & & \eta_M & \beta_M \end{pmatrix}$$

$$|\eta_j| \leq \varepsilon_1 \frac{3 - \varepsilon_1}{1 - 2\varepsilon_1}, \quad |\beta_i| \leq \frac{\varepsilon_1}{\gamma} + \frac{\varepsilon_0}{1 - 2\varepsilon_1} \Rightarrow \|\Delta S\| \leq \mathcal{M}(\Delta S) \leq 7\varepsilon_1$$

1) нормировать S :

$$\rho = \gamma^k, \quad \frac{1}{\gamma} \leq \max_{i,j} \{|\rho d_i|, |\rho b_j|\} < 1 \quad \Rightarrow \quad S_1 = \rho S, \quad \|S_1\| \leq 3$$

2) "возмутить" матрицу $S_1 \rightarrow S_2$,

т. е. if $|\rho d_i|, |\rho b_j| < \varepsilon_1/\gamma$ $\rho d_i, \rho b_j \rightarrow \pm \varepsilon_1/\gamma$

3) метод бисекций для S_2

Теорема. Пусть в $\{\mathcal{P}_j^{[c]}(\lambda)\}$ ($j = 1, \dots, M$) p неположительных \Rightarrow

$$\lambda_p(S_2) < \lambda + 7\varepsilon_1, \quad \lambda - 7\varepsilon_1 \leq \lambda_{p+1}(S_2).$$

Критерий остановки итераций

$$\lambda_n \in [X^-, X^+], X^+ - X^- \leq \varepsilon$$

$$|\tilde{\lambda}_n - \lambda_n| \leq \|\tilde{S}_2 - S_2\| \implies \varepsilon \approx \|\tilde{S}_2 - S_2\| \implies \varepsilon = 3 \cdot 7\varepsilon_1 = 21\varepsilon_1$$

$$\lambda_n^{[c]}(S_2) = (X^+ - X^-)/2 \implies \lambda_n(S_2) \in [\lambda_n^{[c]}(S_2) - \delta, \lambda_n^{[c]}(S_2) + \delta] \quad \delta = 10.5\varepsilon_1$$

Двусторонние последовательности Штурма

$$T = \begin{pmatrix} d_1 & c_2 & & 0 \\ b_2 & d_2 & \cdots & \\ & \cdots & \cdots & c_M \\ 0 & & b_M & d_M \end{pmatrix}, \quad b_j c_j > 0$$

$$\mathcal{P}_j = \mathcal{P}_j(\lambda)$$

$$\mathcal{P}_0 - (d_1 - \lambda) + \frac{|c_2|}{\mathcal{P}_1} = 0,$$

$$|b_2| \mathcal{P}_1 - (d_2 - \lambda) + \frac{|c_3|}{\mathcal{P}_2} = 0,$$

...

$$|b_{M-1}| \mathcal{P}_{M-2} - (d_{M-1} - \lambda) + \frac{|c_M|}{\mathcal{P}_{M-1}} = 0,$$

$$|b_M| \mathcal{P}_{M-1} - (d_M - \lambda) + \frac{1}{\mathcal{P}_M} = 0.$$

Левосторонняя последовательность

$$\mathcal{P}_0^{(+)}(\lambda) = 0,$$

$$\mathcal{P}_j^{(+)}(\lambda) = \frac{|c_{j+1}|}{d_j - \lambda - |b_j| \mathcal{P}_{j-1}^{(+)}(\lambda)},$$

$$\mathcal{P}_M^{(+)}(\lambda) = \frac{1}{d_M - \lambda - |b_M| \mathcal{P}_{M-1}^{(+)}(\lambda)}.$$

Правосторонняя последовательность

$$\mathcal{P}_M^{(-)}(\lambda) = +\infty,$$

$$\mathcal{P}_j^{(-)}(\lambda) = \frac{d_{j+1} - \lambda - |c_{j+2}| / \mathcal{P}_{j+1}^{(-)}(\lambda)}{|b_{j+1}|},$$

$$\mathcal{P}_0^{(-)}(\lambda) = d_1 - \lambda - |c_2| / \mathcal{P}_1^{(-)}(\lambda).$$

$$\mathcal{P}_M^{(+)}(\lambda_n) = \frac{D_{M-1}(\lambda_n)}{D_M(\lambda_n)} = +\infty$$

$$Tv = \lambda v$$

$$-(d_1 - \lambda) + \frac{|c_2|}{\mathcal{P}_1} = 0,$$

$$-(d_1 - \lambda) - c_2 \frac{v_2}{v_1} = 0,$$

$$|b_j| \mathcal{P}_{j-1}(\lambda) - (d_j - \lambda) + \frac{|c_{j+1}|}{\mathcal{P}_j} = 0,$$

$$-b_j \frac{v_{j-1}}{v_j} - (d_j - \lambda) - c_{j+1} \frac{v_{j+1}}{v_j} = 0,$$

$$|b_M| \mathcal{P}_{M-1}(\lambda) - (d_M - \lambda) = 0.$$

$$-b_M \frac{v_{M-1}}{v_M} - (d_M - \lambda) = 0$$

$$\mathcal{P}_j(\lambda_n) = \frac{-\text{sign}(c_{j+1})v_j}{v_{j+1}}$$

Вычисление двусторонней последовательности

$$S = \begin{pmatrix} d_1 & b_2 & & & & 0 \\ b_2 & d_2 & b_3 & & & \\ & b_3 & d_3 & b_4 & & \\ & & \dots & \dots & \dots & \\ & & & b_{M-1} & d_{M-1} & b_M \\ 0 & & & & b_M & d_M \end{pmatrix}, \quad \lambda_n^{(-)} \leq \lambda_n(S) \leq \lambda_n^{(+)}$$

$$\mathcal{P}_j^{(+)[c]} = |b_{j+1}| \bar{\otimes} (d_j \underline{\otimes} \lambda_n^{(+)} \underline{\otimes} |b_j| \bar{\otimes} \mathcal{P}_{j-1}^{(+)[c]})$$

$$\mathcal{P}_j^{(-)[c]} = (d_{j+1} \bar{\otimes} \lambda_n^{(-)} \bar{\otimes} |b_{j+2}| \underline{\otimes} \mathcal{P}_{j+1}^{(-)[c]} \underline{\otimes} |b_{j+1}|)$$

Лемма.

$$\varepsilon_1 \geq 2\gamma \max \left\{ \sqrt[4]{\varepsilon_0}, \sqrt[4]{\frac{2}{\varepsilon_\infty}} \right\},$$

$$\frac{\varepsilon_1}{\gamma} \leq |d_i| \leq 1, \quad \frac{\varepsilon_1}{\gamma} \leq |b_j| \leq 1,$$

$$-3 \leq \lambda \leq 3$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_0 < \left| \mathcal{P}_j^{(+)[c]} \right| < \varepsilon_\infty, \quad \varepsilon_0 < \left| \mathcal{P}_j^{(-)[c]} \right| < \varepsilon_\infty.$$

Тригонометрические последовательности

Пусть $p_j^{(+)}$ число "-" среди $\mathcal{P}_1^{(+)}, \mathcal{P}_2^{(+)}, \dots, \mathcal{P}_j^{(+)}$

$\implies \varphi_j^{(+)} = p_j^{(+)} \pi + \arctan \mathcal{P}_j^{(+)}$ левосторонняя триг. посл. Штурма

Пусть q_j число "-" среди $\mathcal{P}_{j+1}^{(-)}, \mathcal{P}_{j+2}^{(-)}, \dots, \mathcal{P}_{M-1}^{(-)}$, причем $p_j^{(-)} = n - 1 - q_j$

$\implies \varphi_j^{(-)} = p_j^{(-)} \pi + \arctan \mathcal{P}_j^{(-)}$ правосторонняя триг. посл. Штурма

Если \mathcal{P}_j - двуст. рац. посл. $\implies \varphi_j = p_j \pi + \arctan \mathcal{P}_j$ ДВУСТОРОННЯЯ триг. посл. Штурма

Графики: $(0, \varphi_0), (1, \varphi_1), (2, \varphi_2), \dots, (M-1, \varphi_{M-1}), (M, \varphi_M)$

Лемма. Пусть $\lambda_n^{(-)} \leq \lambda_n \leq \lambda_n^{(+)}$. Тогда

$$\varphi_0^{(-)}(\lambda_n^{(-)}) \geq \varphi_0^{(+)}(\lambda_n^{(+)}), \quad \varphi_M^{(+)}(\lambda_n^{(+)}) \geq \varphi_M^{(-)}(\lambda_n^{(-)})$$

Следствие. $\exists J$

$$\varphi_{J-1}^{(+)}(\lambda_n^{(+)}) \leq \varphi_{J-1}^{(-)}(\lambda_n^{(-)}), \quad \varphi_J^{(+)}(\lambda_n^{(+)}) \geq \varphi_J^{(-)}(\lambda_n^{(-)})$$

Дано: S, n

1. Определить $\lambda_n^{(-)}, \lambda_n^{(+)}$

2. Вычислить $\mathcal{P}_j^{(+)[c]}, \mathcal{P}_j^{(-)[c]}$ в точках $\lambda_n^{(-)}, \lambda_n^{(+)}$

3. "Склейка": Вычислить триг.посл. $\varphi_j^{(+)[c]}, \varphi_j^{(-)[c]}$

Определить $J \varphi_{J-1}^{(+)[c]} \leq \varphi_{J-1}^{(-)[c]}$

Составить последовательность

$$\mathcal{P}_1^{(+)[c]}, \dots, \mathcal{P}_{J-1}^{(+)[c]}, \mathcal{P}_J^{(-)[c]}, \dots, \mathcal{P}_{M-1}^{(-)[c]}$$

$$\tilde{S} = \begin{pmatrix} \tilde{d}_1^{(+)} & c_2^{(+)} & & & & & & & & 0 \\ b_2^{(+)} & \tilde{d}_2^{(+)} & c_3^{(+)} & & & & & & & \\ & \dots & \dots & \dots & & & & & & \\ & & b_{J-1}^{(+)} & \tilde{d}_{J-1}^{(+)} & c_J^{(+)} & & & & & \\ & & & \tilde{b}_J(\tau) & \tilde{d}_J(\tau) & \tilde{c}_{J+1}(\tau) & & & & \\ & & & & b_{J+1}^{(-)} & \tilde{d}_{J+1}^{(-)} & c_{J+2}^{(-)} & & & \\ & & & & & \dots & \dots & \dots & & \\ & & & & & & b_{M-1}^{(-)} & \tilde{d}_{M-1}^{(-)} & c_M^{(-)} & \\ 0 & & & & & & & b_M^{(-)} & \tilde{d}_M^{(-)} & \end{pmatrix}$$

$$\tau \in [0, 1]: \quad \begin{aligned} \tilde{b}_J(\tau) &= (1 - \tau)b_J^{(+)} + \tau b_J^{(-)}, \\ \tilde{d}_J(\tau) &= (1 - \tau)\tilde{d}_J^{(+)} + \tau\tilde{d}_J^{(-)}, \\ \tilde{c}_{J+1}(\tau) &= (1 - \tau)c_{J+1}^{(+)} + \tau c_{J+1}^{(-)}. \end{aligned}$$

Лемма. $\|\Delta S\| = \|S - \tilde{S}\| \leq 16\varepsilon_1(2 + \gamma)$

Вычисление собственного вектора

$$u_1 = \mathbf{1}, \quad u_{j+1} = -\text{sign}(b_{j+1}) \frac{u_j}{\mathcal{P}_j}$$

$\text{Fr}(u_j)$, $\text{Fr}(\mathcal{P}_j)$ - мантиссы

$\text{Ex}(u_j)$, $\text{Ex}(\mathcal{P}_j)$ - порядки

$$\text{Fr}(u_1) = \frac{1}{\gamma}, \quad \text{Ex}(u_1) = 1,$$

$$\text{Fr}(u_{j+1}) = \text{Fr}\left(\frac{\text{Fr}(u_j)}{\text{Fr}(\mathcal{P}_j)}\right), \quad \text{Ex}(u_{j+1}) = \text{Ex}\left(\frac{\text{Fr}(u_j)}{\text{Fr}(\mathcal{P}_j)}\right) + \text{Ex}(u_j) - \text{Ex}(\mathcal{P}_j)$$

$$\tilde{v}(S) = v(\rho S + \Delta S) + \eta$$

$$|\tilde{\lambda}_n - \lambda_n| \leq \varepsilon, \quad \|(A - \tilde{\lambda}_n I)\tilde{v}_n\| \leq \varepsilon$$

Пусть $e^{(j)}$ - исходный базис,
 $f^{(1)} = Pe^{(1)}, f^{(2)} = Pe^{(2)}, \dots, f^{(M)} = Pe^{(M)}$ – переход в другой базис

$$Af^{(i)} = \sum_{j=1}^M s_{ji} f^{(j)}.$$

$s_{ji} = (Af^{(i)}, f^{(j)}) = (APe^{(i)}, Pe^{(j)}) =$ – элементы матрицы в новом базисе

$$(PAP^*e^{(i)}, e^{(j)}) = (Se^{(i)}, e^{(j)})$$

Алгоритм Ланцоша $A = A^*, M \times M$

Требуется найти ортонормированные векторы $h^{(1)}, h^{(2)}, \dots, h^{(M)}$:

$$(Ah^{(i)}, h^{(j)}) = 0 \quad \text{при} \quad |i - j| > 1,$$

т.е. в новом базисе матрица трехдиагональна.

1. $u \in \mathbf{R}_M$ - произвольный

$$\begin{aligned}h^{(1)} &= u/\|u\|, \\d_1 &= (Ah^{(1)}, h^{(1)}), \\v^{(2)} &= Ah^{(1)} - d_1h^{(1)}, \\b_2 &= \|v^{(2)}\|, \\h^{(2)} &= v^{(2)}/b_2, \quad \text{если } b_2 \neq 0.\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|h^{(1)}\| = \|h^{(2)}\| = 1, \quad h^{(1)} \perp h^{(2)} :$$

$$(h^{(1)}, h^{(2)}) = b_2(h^{(1)}, v^{(2)}) = b_2(h^{(1)}, Ah^{(1)} - d_1h^{(1)}) = b_2[(Ah^{(1)}, h^{(1)}) - d_1(h^{(1)}, h^{(1)})] = 0.$$

2.

$$\begin{aligned}d_2 &= (Ah^{(2)}, h^{(2)}), \\v^{(3)} &= Ah^{(1)} - d_2h^{(2)} - b_2h^{(1)}, \\b_3 &= \|v^{(3)}\|, \\h^{(3)} &= v^{(3)}/b_3, \quad \text{если } b_3 \neq 0.\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|h^{(3)}\| = 1, \quad h^{(3)} \perp h^{(1)}, \quad h^{(3)} \perp h^{(2)}.$$

Шаг i ($2 \leq i \leq M - 1$)

$$\begin{aligned}d_i &= (Ah^{(i)}, h^{(i)}), \\v^{(i+1)} &= Ah^{(i)} - d_i h^{(i)} - b_i h^{(i-1)}, \\b_{i+1} &= \|v^{(i+1)}\|, \\h^{(i+1)} &= v^{(i+1)} / b_{i+1}, \quad \text{если } b_{i+1} \neq 0.\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|h^{(i+1)}\| = 1,$$

$$h^{(i+1)} \perp h^{(1)}, \dots, h^{(i+1)} \perp h^{(i)}$$

Шаг M $d_M = (Ah^{(M)}, h^{(M)})$

Замечание. Если на шаге M вычислить

$$\begin{aligned}d_M &= (Ah^{(M)}, h^{(M)}), \\v^{(M+1)} &= Ah^{(M)} - d_M h^{(M)} - b_M h^{(M-1)}, \\b_{M+1} &= \|v^{(M+1)}\|,\end{aligned}$$

то $b_{M+1} = 0!$ иначе в R_M ($M + 1$) ортогональный вектор

Пусть L – дискретная модель оператора Лапласа

$$u_{mn} = u\left(\frac{m}{M}, \frac{n}{N}\right) = x^2(1-x)y(1-y^2),$$

где $x = \frac{m}{M}$, $y = \frac{n}{N}$

$$1 \leq m \leq M - 1, \quad 1 \leq n \leq N - 1, \quad M = N = 7$$

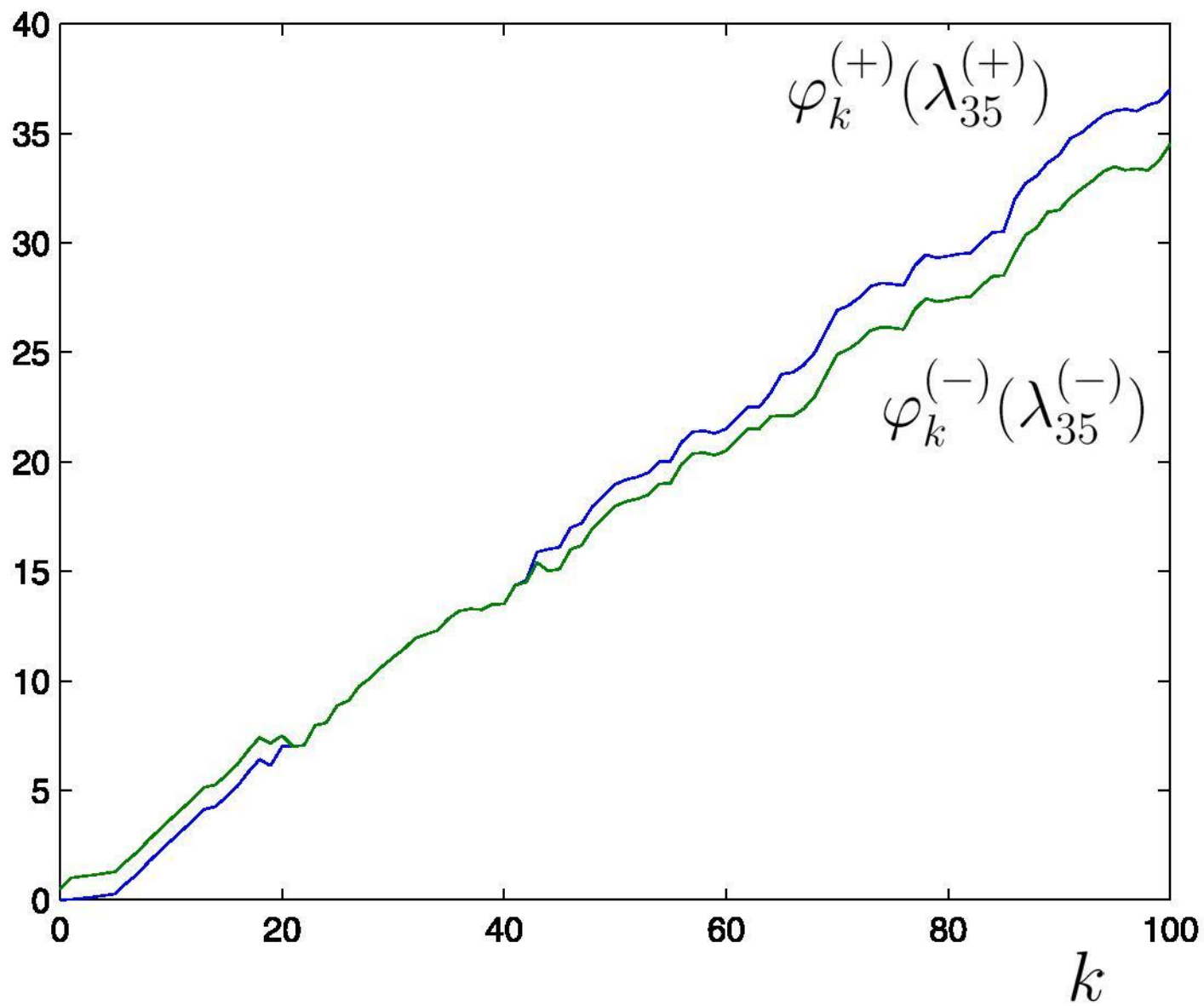
j	d_j	b_j	j	d_j	b_j
1	-23.552		51	-186.637	37.960
2	-66.775	11.251	52	-182.940	38.058
3	-117.027	41.155	53	-177.415	43.780
4	-125.815	45.162	54	-88.185	80.587
5	-125.404	70.378	55	-189.554	64.125
6	-231.417	77.149	56	-357.927	2.575
7	-184.780	84.609	57	-238.840	43.220
8	-241.779	89.594	58	-144.679	36.304
9	-233.926	70.514	59	-74.052	49.928
10	-236.845	70.344	60	-235.196	3.200
11	-203.267	80.781	61	-255.585	8.921
12	-214.559	87.826	62	-242.241	95.860
13	-229.170	56.088	63	-73.831	1.527
14	-168.062	62.439	64	-184.103	0.559
15	-234.675	44.736	65	-219.983	114.766
16	-224.583	53.063	66	-39.319	0.145
17	-245.480	55.270	67	-204.400	51.433
18	-251.095	24.465	68	-181.363	91.385
19	-160.612	8.983	69	-293.575	21.643
20	-228.718	23.391	70	-363.328	9.826
21	-19.848	$6.540 \cdot 10^{-7}$	71	-210.582	35.702
22	-48.915	3.438	72	-231.190	17.674
23	-368.936	29.466	73	-99.648	49.210
24	-86.202	15.258	74	-181.413	70.516
25	-330.068	40.360	75	-162.721	33.056

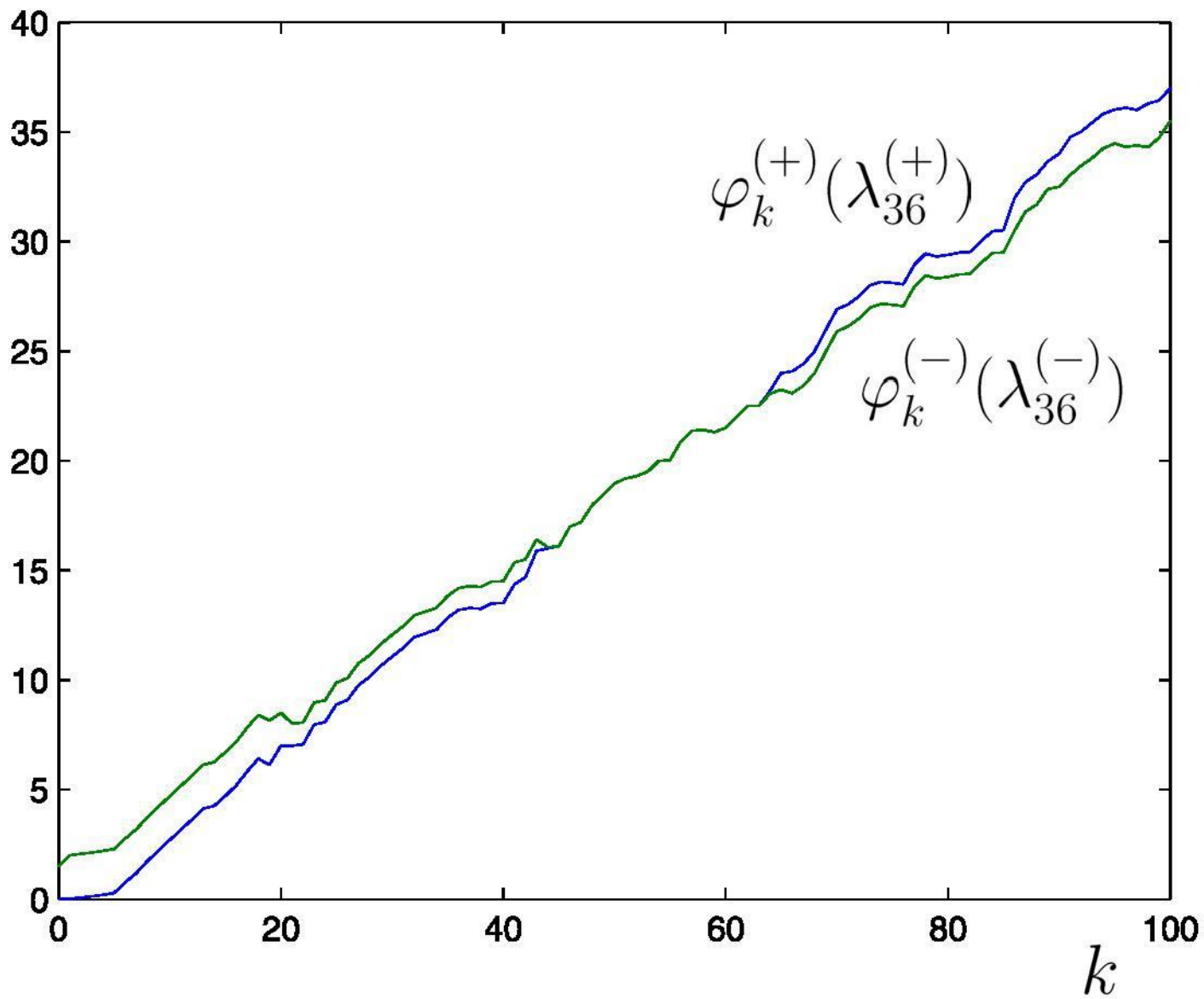
j	d_j	b_j	j	d_j	b_j
26	-102.753	42.134	76	-149.955	22.459
27	-281.951	47.467	77	-343.136	12.252
28	-160.025	53.119	78	-239.608	12.477
29	-237.493	57.418	79	-158.245	10.825
30	-197.959	50.263	80	-215.123	3.412
31	-224.476	32.581	81	-93.802	53.285
32	-227.040	55.214	82	-43.036	2.768
33	-196.498	60.676	83	-218.511	61.454
34	-210.601	22.953	84	-226.331	88.378
35	-240.639	24.752	85	-88.226	15.277
36	-189.674	19.577	86	-372.476	5.618
37	-208.568	41.002	87	-286.518	0.325
38	-190.688	4.649	88	-133.341	54.0988
39	-201.533	40.467	89	-264.016	26.465
40	-19.531	4.567	90	-60.881	54.409
41	-351.889	3.359	91	-310.665	3.359
42	-67.303	62.936	92	-231.031	62.936
43	-339.143	0.171	93	-234.697	4.240
44	-80.880	40.666	94	-202.333	24.641
45	-95.807	3.169	95	-177.568	56.826
46	-307.416	48.843	96	-50.854	7.837
47	-143.836	2.595	97	-137.653	60.527
48	-248.321	64.396	98	-178.222	3.024
49	-231.792	4.851	99	-135.094	78.951
50	-248.922	56.576	100	-254.870	14.074

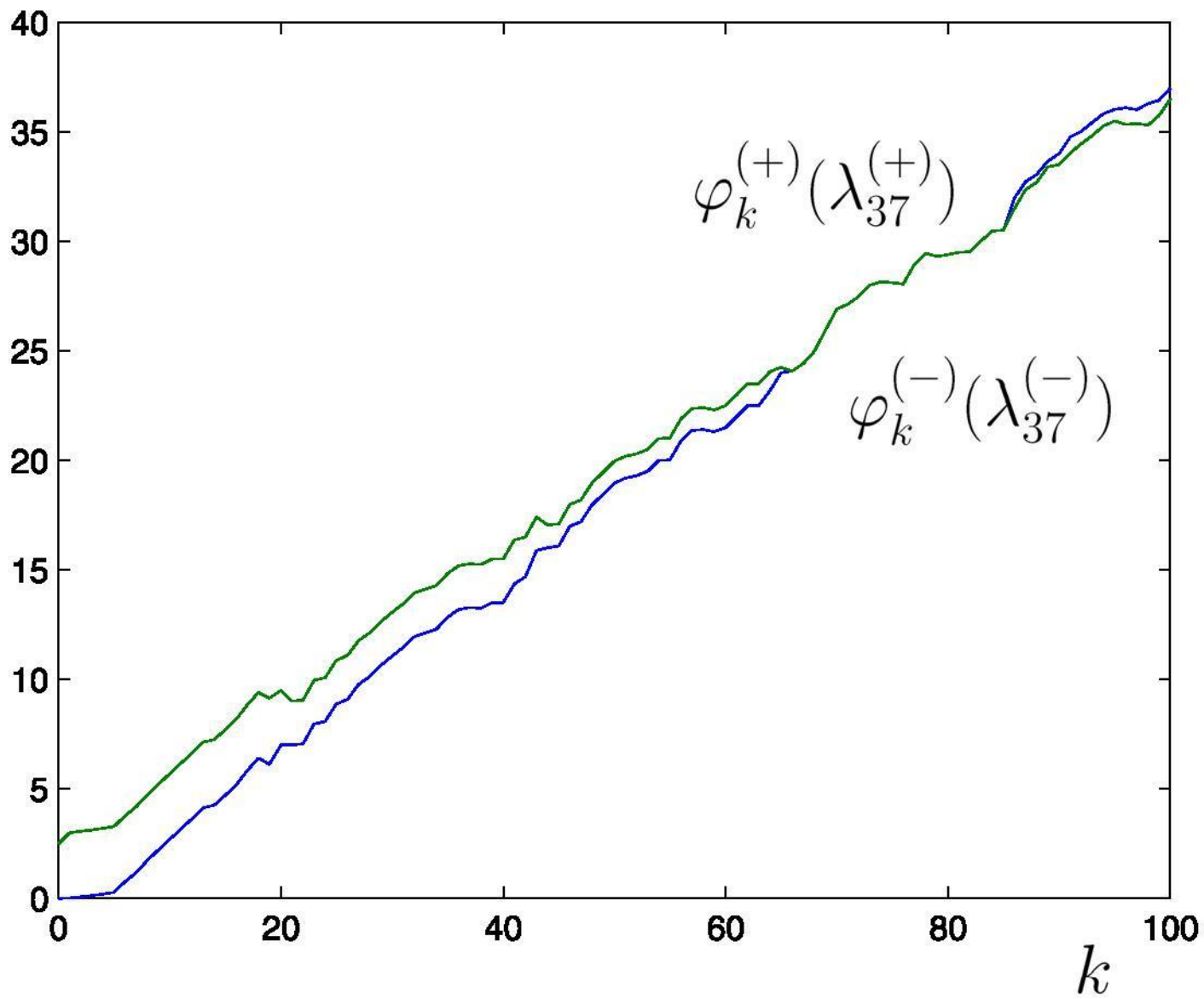
j	$\tilde{\lambda}_j(S)$	j	$\tilde{\lambda}_j(S)$	j	$\tilde{\lambda}_j(S)$	j	$\tilde{\lambda}_j(S)$
1	-372.589	26	-278.909	51	-195.999	76	-86.044
2	-372.589	27	-278.909	52	-195.999	77	-85.897
3	-372.589	28	-262.487	53	-168.818	78	-85.897
4	-372.589	29	-262.487	54	-168.807	79	-85.897
5	-372.589	30	-262.487	55	-168.807	80	-85.897
6	-372.589	31	-262.487	56	-168.807	81	-74.105
7	-345.396	32	-262.487	57	-168.796	82	-73.892
8	-345.396	33	-259.098	58	-156.712	83	-73.795
9	-345.396	34	-239.614	59	-156.705	84	-73.795
10	-345.396	35	-239.614	60	-156.705	85	-73.795
11	-345.396	36	-239.614	61	-156.705	86	-73.795
12	-345.396	37	-239.614	62	-152.386	87	-49.329
13	-318.204	38	-235.294	63	-152.385	88	-46.603
14	-318.204	39	-235.294	64	-152.385	89	-46.603
15	-318.204	40	-235.294	65	-152.385	90	-46.603
16	-318.204	41	-235.294	66	-129.712	91	-46.603
17	-318.204	42	-235.040	67	-129.512	92	-46.603
18	-306.102	43	-223.193	68	-129.512	93	-23.552
19	-306.102	44	-223.192	69	-129.512	94	-19.410
20	-306.102	45	-223.192	70	-129.512	95	-19.410
21	-306.102	46	-223.192	71	-113.106	96	-19.410
22	-306.102	47	-223.192	72	-113.090	97	-19.410
23	-278.909	48	-196.012	73	-113.090	98	-19.410
24	-278.909	49	-196.000	74	-113.090	99	-19.410
25	-278.909	50	-195.999	75	-113.090	100	-16.192

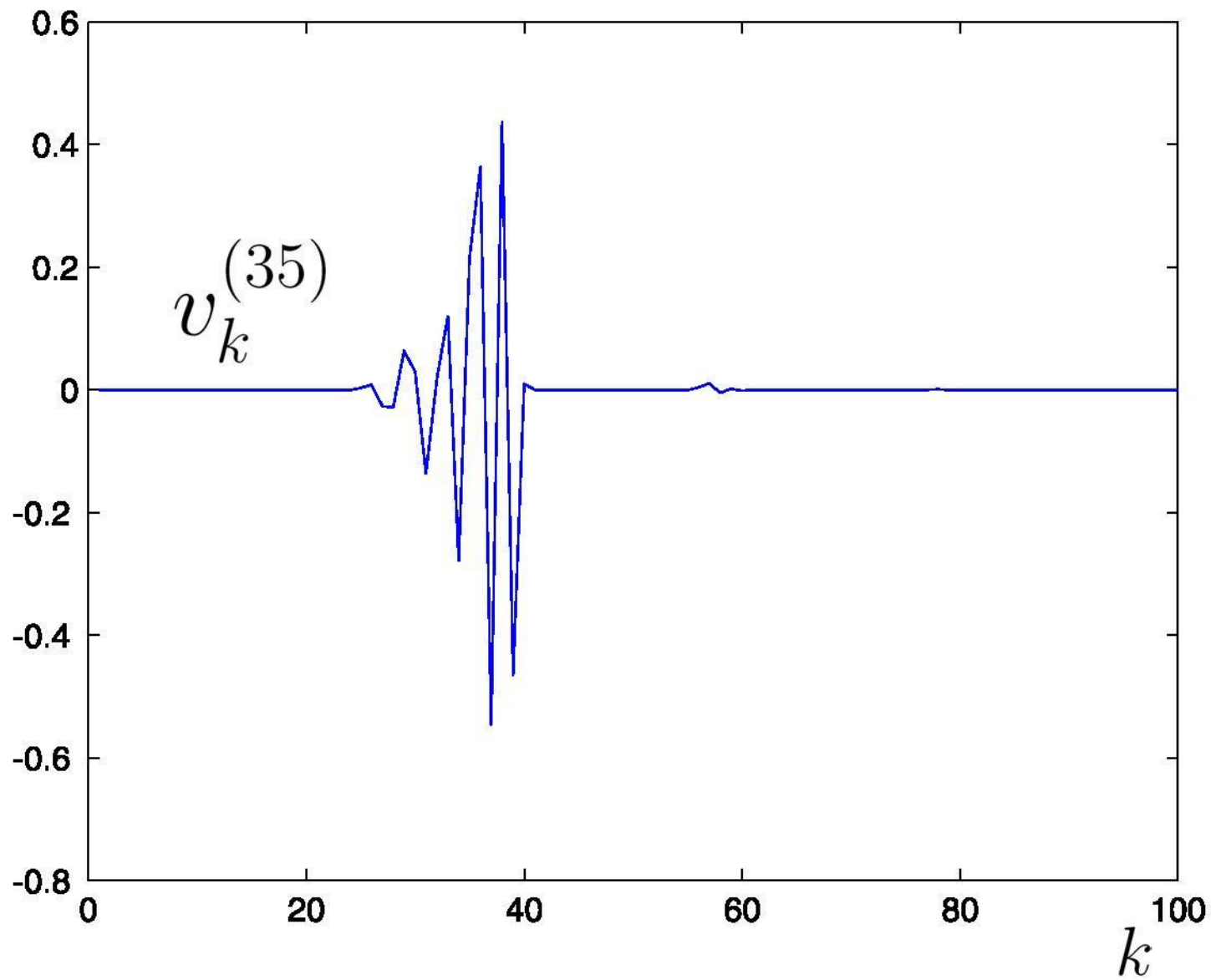
$$\lambda = \lambda_{35}(S) = \lambda_{36}(S) = \lambda_{37}(S) =$$

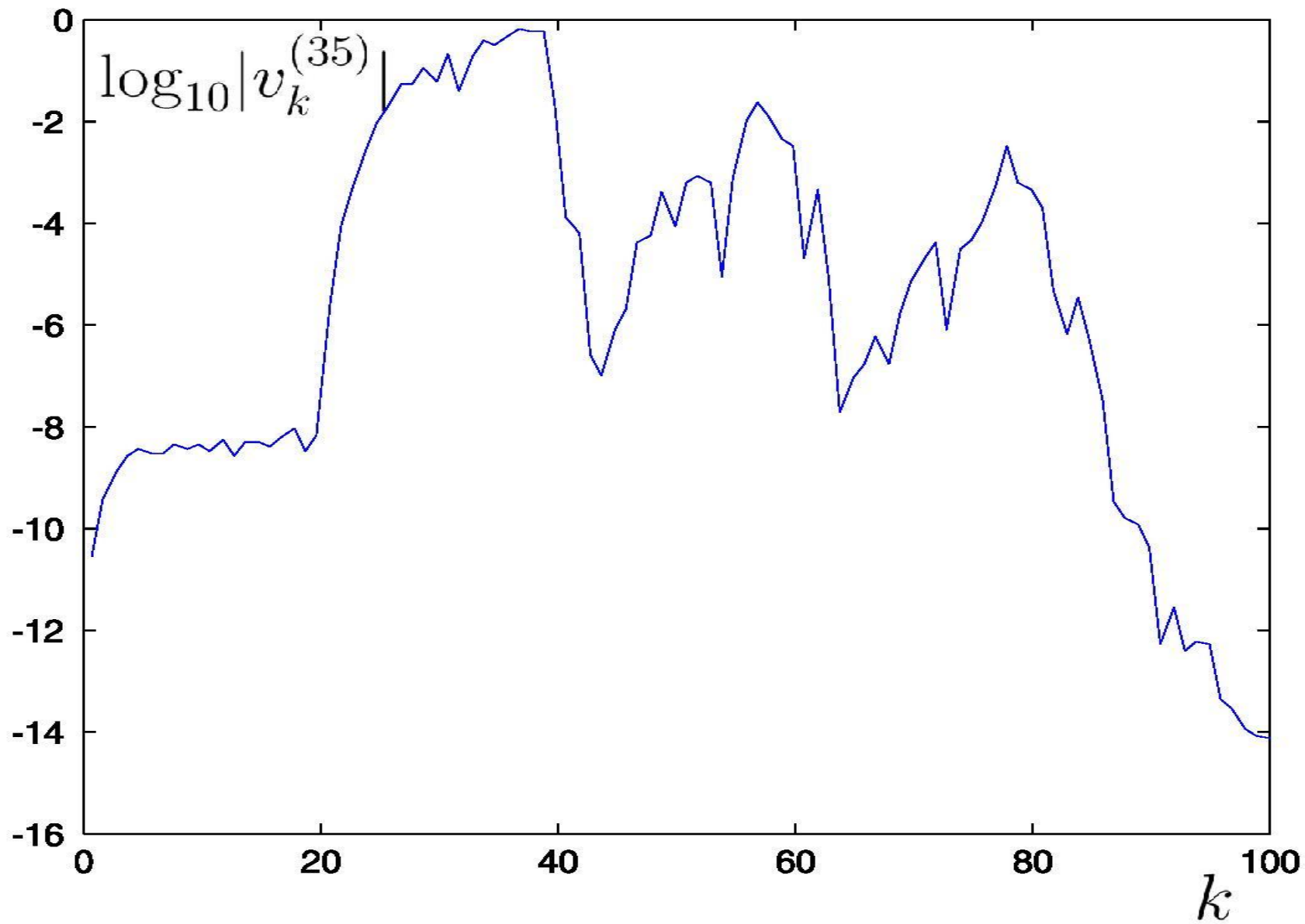
$$= -239.614103055438$$

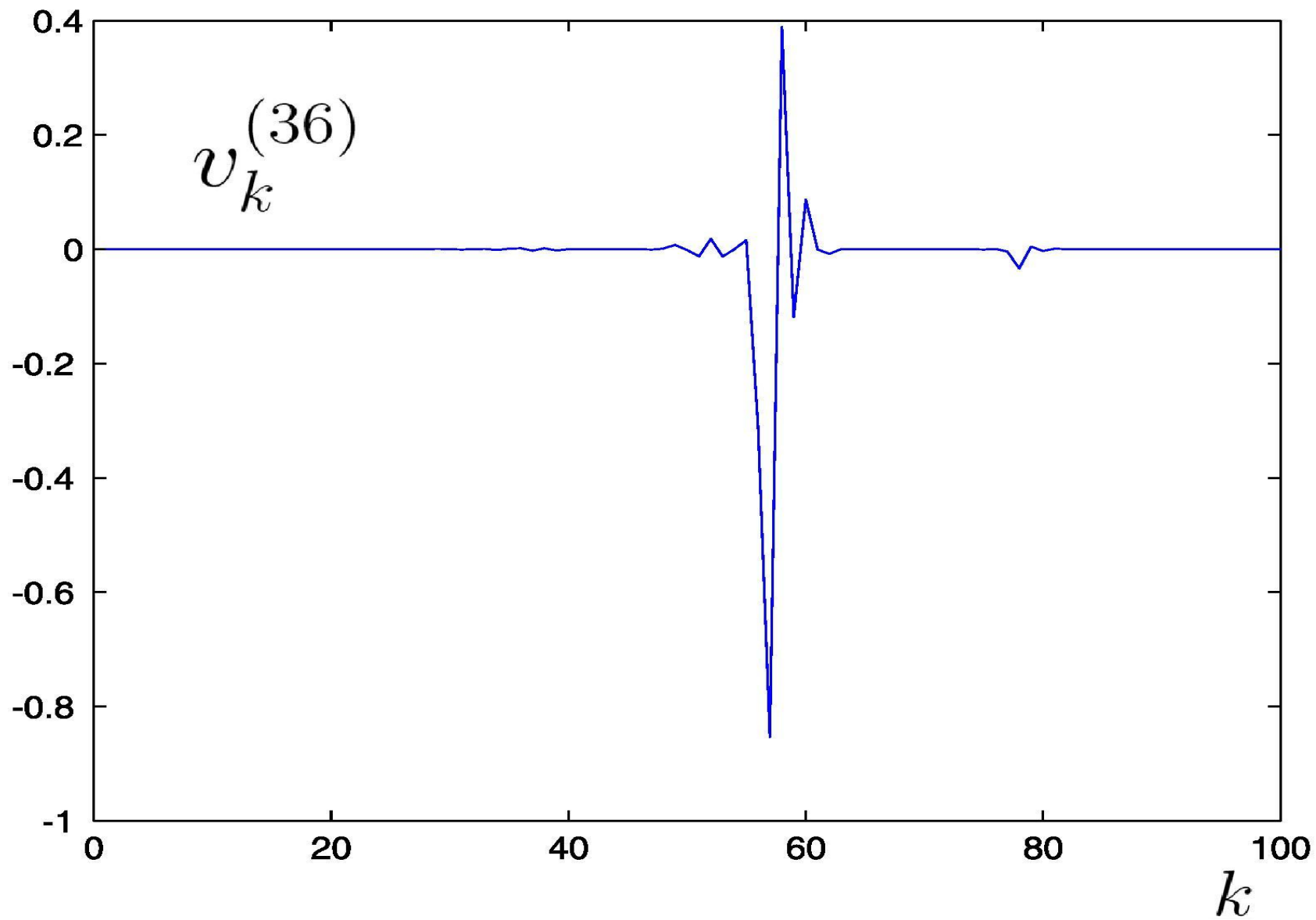


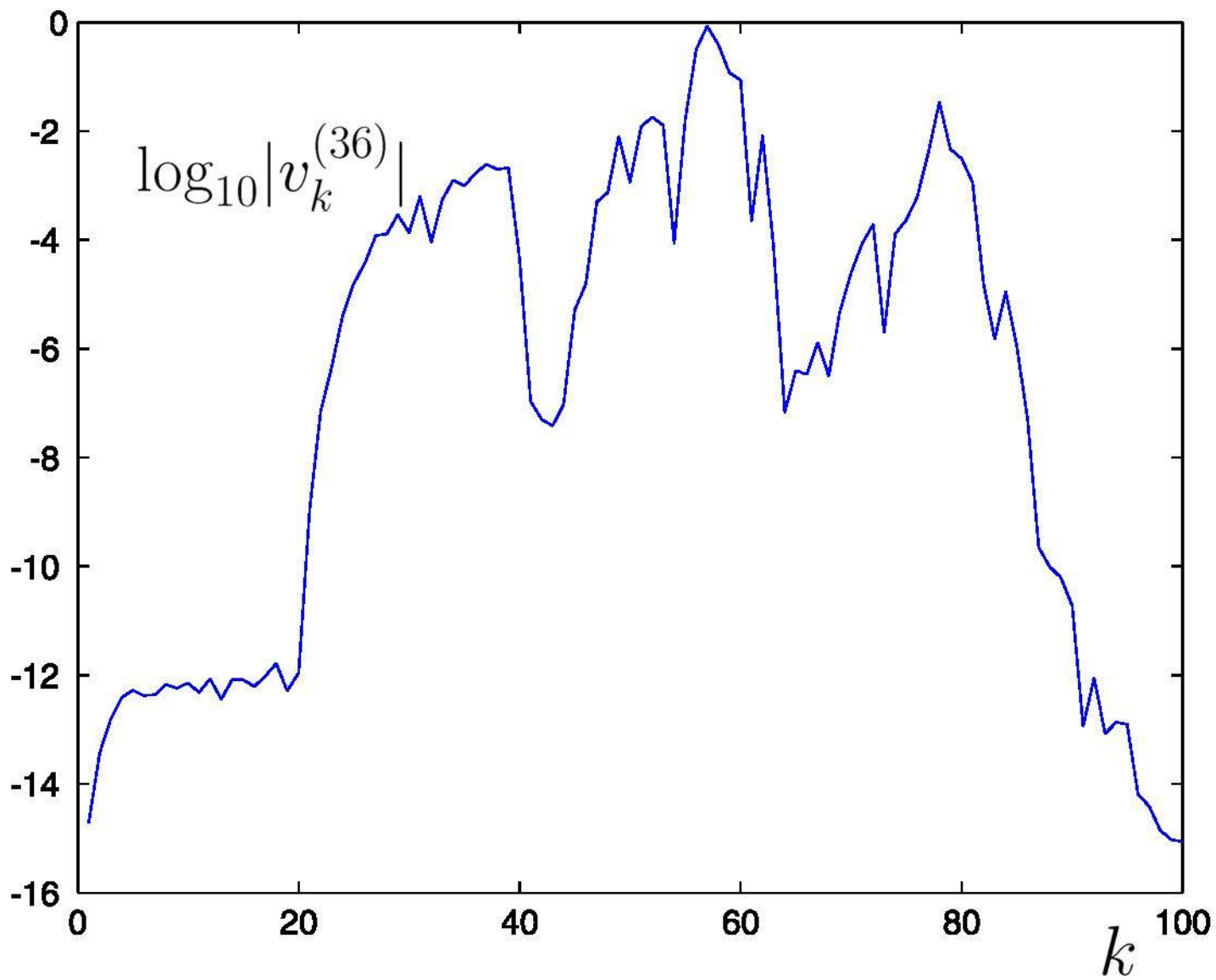


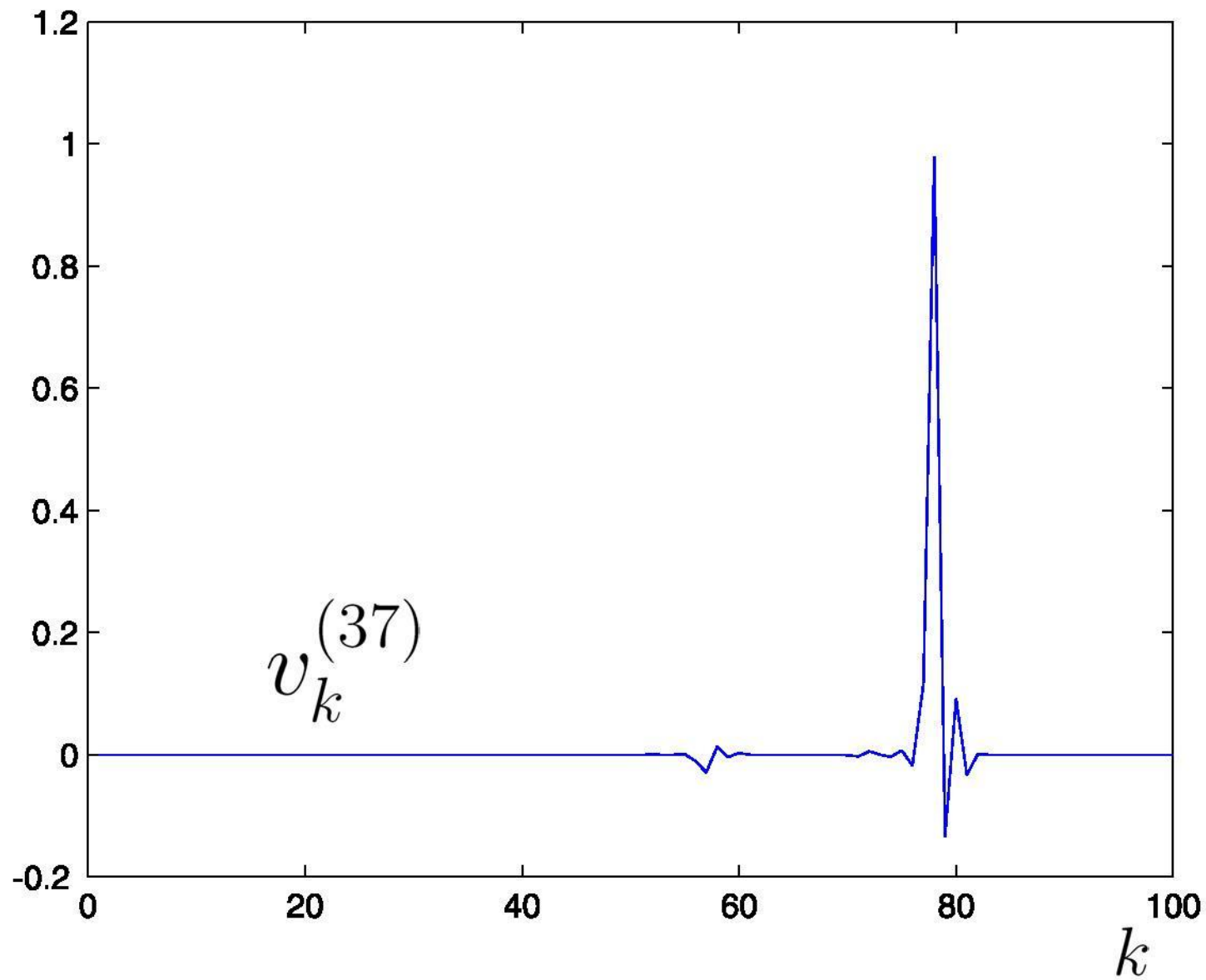


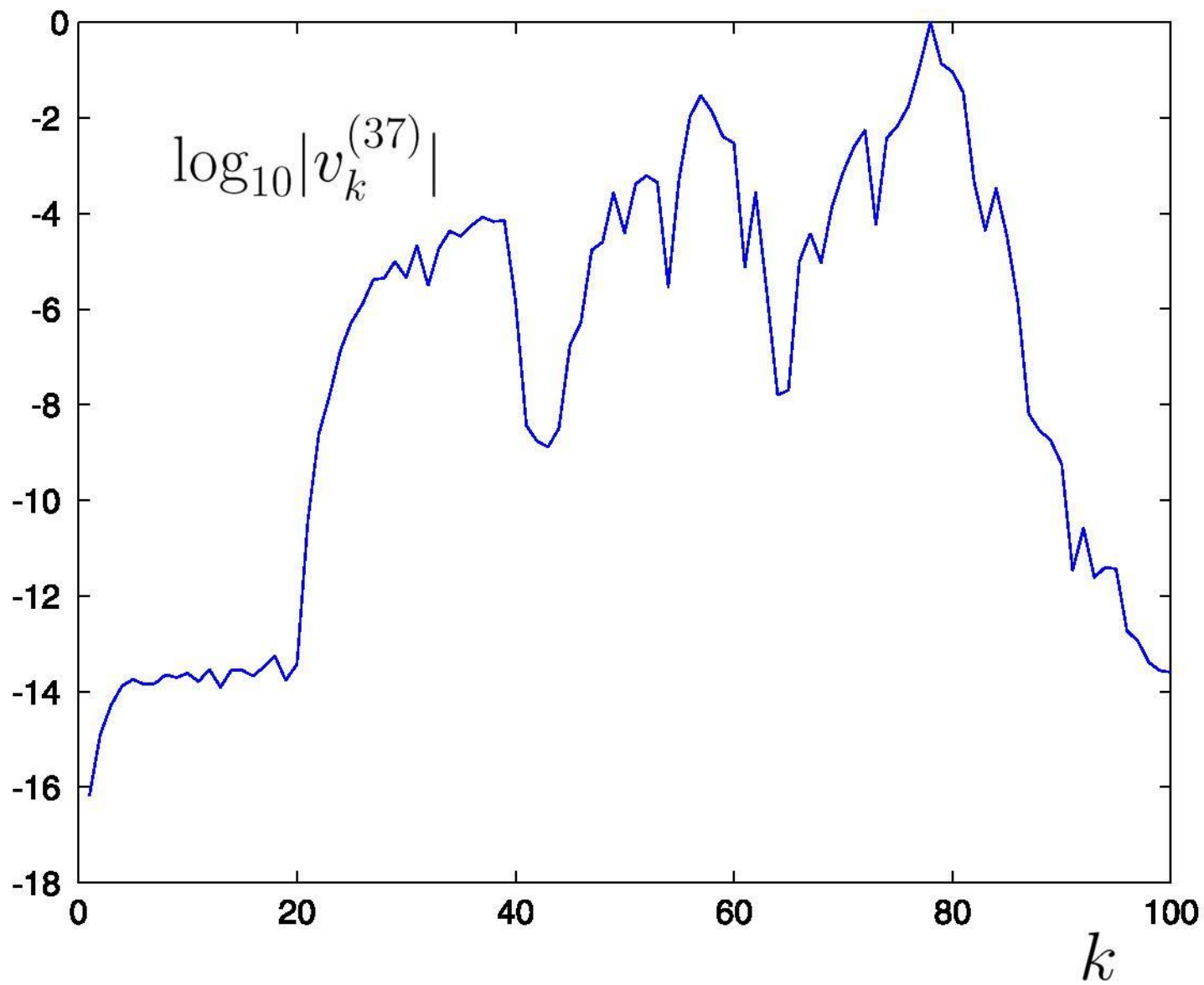












Инвариантные подпространства дифференциального оператора

$$A \frac{\partial u}{\partial t} + \sum B_k \frac{\partial u}{\partial x_k} = 0$$

$$A = A^* > 0, \quad B_k = B_k^*$$

Дифференциальный оператор $D = -\sum A^{-1} B_k \frac{\partial}{\partial x_k}$

Спектральная задача: $Du = \lambda u, \quad x \in \Omega, \quad \Phi u|_{\partial\Omega} = 0$

Консервативные гр. усл.

$$\int_{\partial\Omega} \left(\sum \xi_i B_i u, u \right) dS = 0$$

Задача: вычислить с.зн. такие, что $0 < |\lambda| \leq r$

Энергетическое скал.произведение

$$[u, v]_A = \int_{\Omega} (Au, v) d\Omega, \quad \|u\|_A^2 = [u, u]_A$$

$\implies D^* = -D$ кососимметрический оператор

Уравнения акустики u, v, p , $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$

Характер. корни $\pm c_0, 0$

Положим $c_0 = \rho_0 = 1$

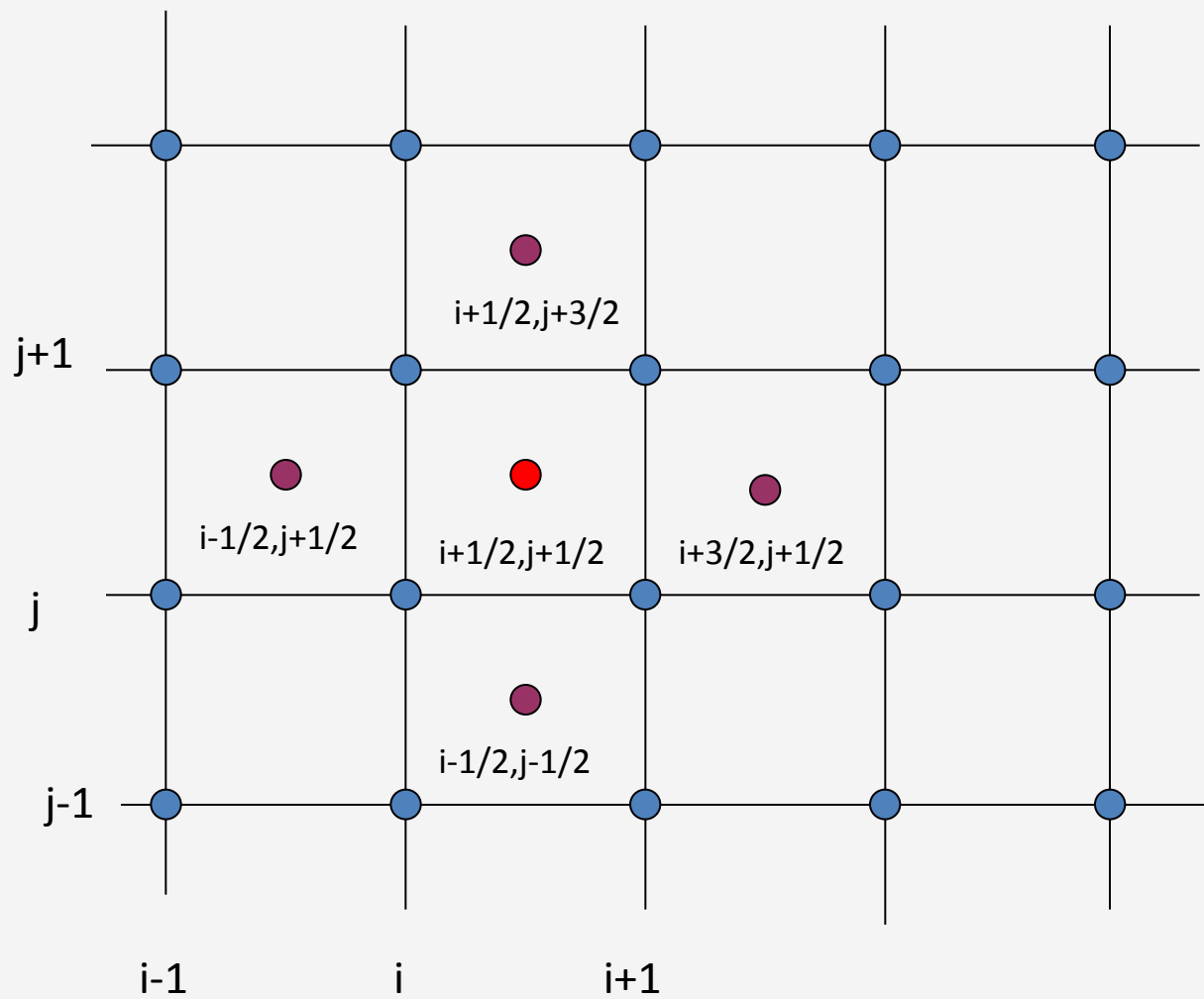
Область $\Omega = \{0 \leq x, y \leq \pi\}$

Гр. усл $p|_{\partial\Omega} = 0$

$$\rho_0 \frac{\partial U}{\partial t} + \text{grad} p = 0$$

$$\frac{1}{\rho_0 c_0^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \text{div} U = 0$$

$$D(u, v, p) = -\left(\frac{\partial p}{\partial x'} \frac{\partial p}{\partial y'} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)$$



Сеточный оператор

$$\langle D_2 w \rangle_{i+1/2, j+1/2} = -(p_x^h, p_y^h, u_x^h + v_y^h)$$

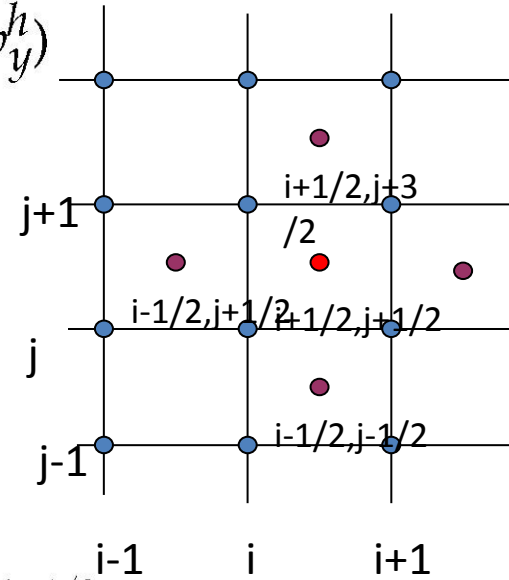
наследует кососимметричность, аппроксимация $O(h^2)$

$$p_x^h = \frac{p_{i+3/2, j+1/2} - p_{i-1/2, j+1/2}}{2h}$$

$$p_y^h = \frac{p_{i+1/2, j+3/2} - p_{i+1/2, j-1/2}}{2h}$$

$$p_{xx}^h = \frac{p_{i+3/2, j+1/2} - 2p_{i+1/2, j+1/2} + p_{i-1/2, j+1/2}}{h^2}$$

$$p_{yy}^h = \frac{p_{i+1/2, j+3/2} - 2p_{i+1/2, j+1/2} + p_{i+1/2, j-1/2}}{h^2}$$



$$\langle D_1 w \rangle_{i+1/2, j+1/2} = -(p_x^h - 0.5hu_{xx}^h, p_y^h - 0.5hv_{yy}^h, u_x^h + v_y^h - 0.5h(p_{xx}^h + p_{yy}^h))$$

Аппроксимация по схеме Годунова, $O(h^2)$

$$r_0 = 0.5 \leq |\lambda| \leq r_1 = 4$$

$$\lambda = \pm i \sqrt{2}, \pm i \sqrt{5}, \pm i \sqrt{5}, \pm i \sqrt{8},$$
$$\pm i \sqrt{10}, \pm i \sqrt{10}, \pm i \sqrt{13}, \pm i \sqrt{13},$$

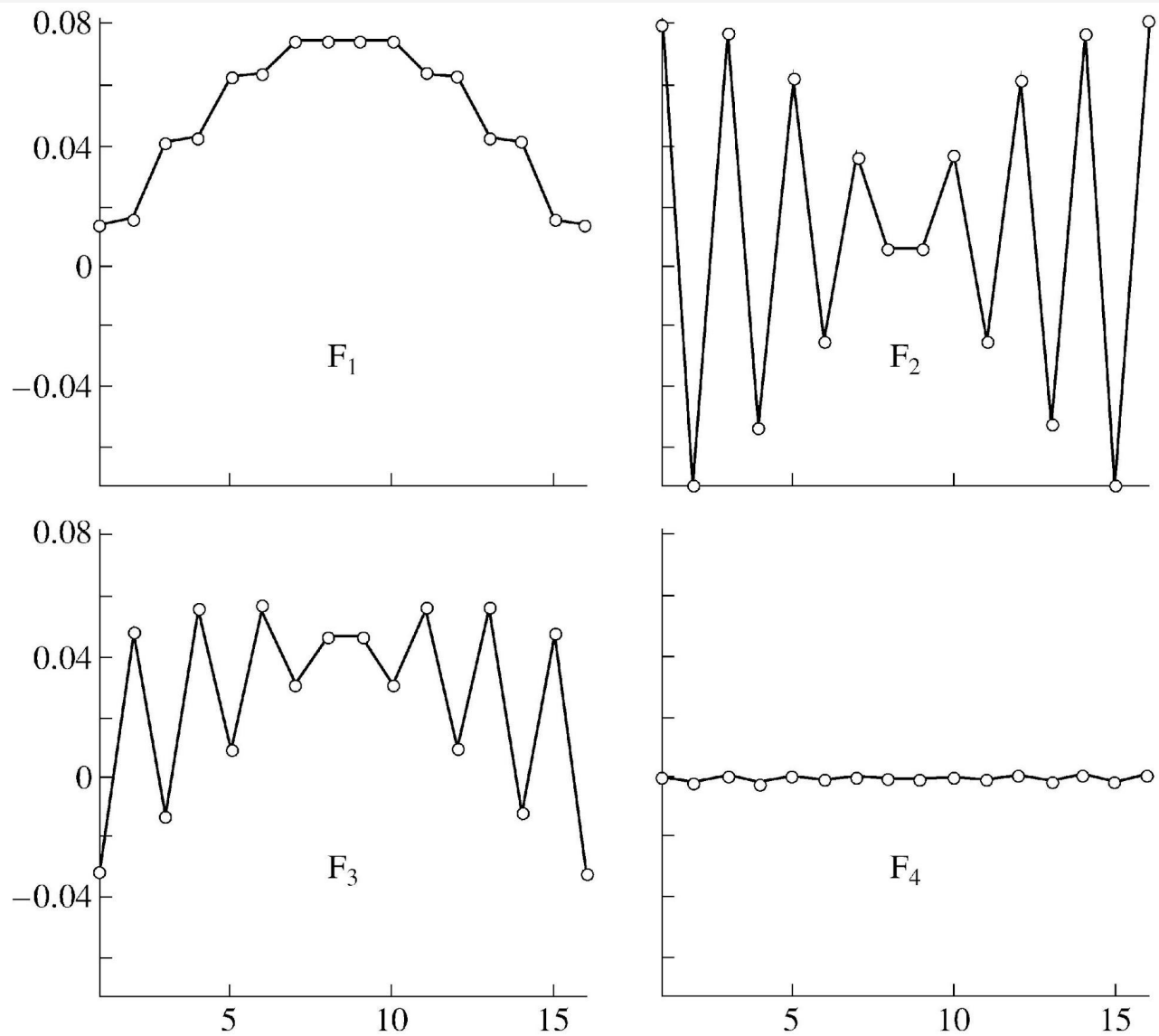
$$\lambda^2 = m^2 + n^2$$

Базис

$$f_{mn} = [u, v, p] = [0, 0, \sin(mx) \times \sin(ny)]$$

$$\bar{f}_{mn} = [u, v, p] = [m \cos(mx) \sin(ny), n \cos(ny) \sin(mx), 0]$$

Спектр D	Спектр D_2	Кратность (число пар)	Число истинных пар
	$\pm 0.9984i$	4	0
$\pm 1.4142i$	$\pm 1.4119i$	4	1
	$\pm 1.9872i$	4	0
$\pm 2.2361i$	$\pm 2.2239i$	8	2
$\pm 2.8284i$	$\pm 2.8103i$	4	1
	$\pm 2.9568i$	4	0
$\pm 3.1623i$	$\pm 3.1208i$	8	2
$\pm 3.6056i$	$\pm 3.5625i$	8	2
	$\pm 3.8980i$	4	0



Фиг. 1.

