Отрытый урок на тему:

«Сумма первых n членов арифметической прогрессии»

Автор: Айдушева О.В.
учитель математики
МБОУ «СОШ №5»
г.Колпашево

Эпиграф урока

Математика есть единая симфония бесконечного.

Д. Гильберт

Устный счёт

Найти 5-ый член числовой последовательности заданной формулой $\frac{30n}{n+1}$

Ответ: 25

2) Найти 4-ый член числовой последовательности заданной формулой $\frac{n}{2n+1}$

Ответ: $\frac{4}{9}$

3) Чему равна разность арифметической прогрессии: 1; 4; 7; …

Ответ: 3

4) Чему равна разность арифметической прогрессии: 3; 0; -3; -6; …

Ответ: -3

5) Найдите пятый член арифметической прогрессии:

3; 7; 11; …

Ответ: 19

6) Найдите шестой член арифметической прогрессии; если $a_1 = 5; \quad d = 3$

Ответ: 20

7) Найти 10-ый член арифметической прогрессии если $a_9 = 34; \quad a_{11} = 58$

Ответ: 46

8) Найти 5-ый член арифметической прогрессии если $a_4 = 18; \quad a_6 = 24$

Ответ: 21

7) Найти 10-ый член арифметической прогрессии если

$$a_9 = 34; \quad a_{11} = 58$$

Ответ: 46

8) Найти 5-ый член арифметической прогрессии если

$$a_4 = 18; \quad a_6 = 24$$

Ответ: 21

Задача 42 из задачника Алкуина

Лестница имеет 100 ступеней. На первой сидит один голубь, на второй – два, на третьей – три, и так на всех ступеней до сотой. Сколько всего голубей?

Алкуин (ок735-19мая 804)- английский (ирландский) монах-ученый.

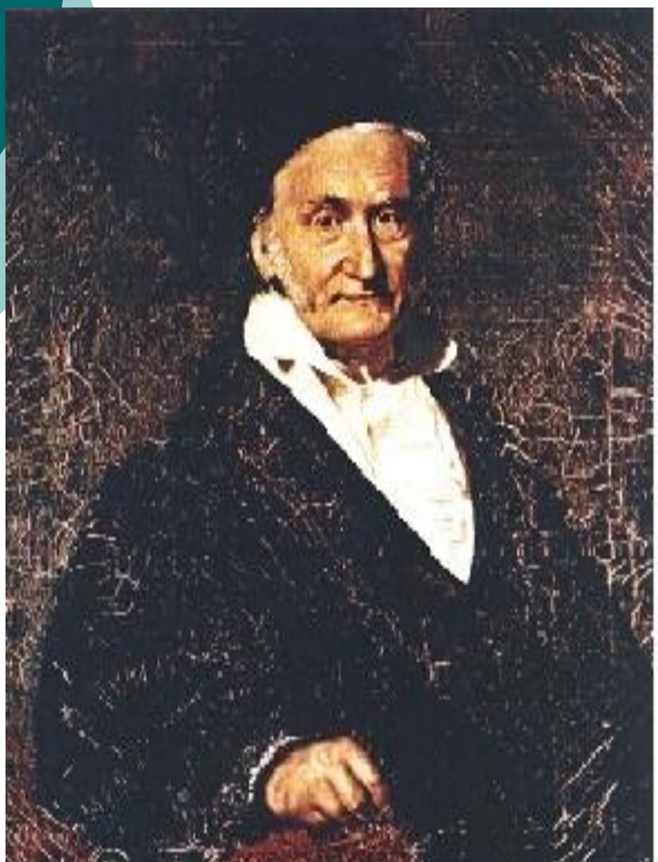
Он был организатором и руководителем монастырской школы в Туре (Франция), ставшей одним из центров средневековой науки. Алкуин был учителем в школе при дворе Карла Великого(«Палатинская школа»), где преподавал «семь свободных искусств», и для которой составил несколько учебников. Материал в этих учебниках излагался в форме вопросов и ответов (катехизический метод).

Задача. Найти сумму ста членов арифметической прогрессии.

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 97 + 98 + 99 + 100$$

- Впервые формула суммы первых членов арифметической прогрессии была доказана древнегреческим ученым Диофантом(IIIвек н.э.). А правило отыскания суммы n первых членов арифметической прогрессии встречается в «книге Абаки» Л. Фибоначчи в 1202году

В области прогрессий много работал знаменитый немецкий ученый К. Гаусс (1777-1855).



К. Гаусс (1777-1855)

С формулой суммы n первых членов арифметической прогрессии связан эпизод из его жизни. Когда Карлу было 9 лет, учитель, занятый проверкой работ учеников других классов, задал на уроке следующую задачу: «Сосчитать сумму натуральных чисел от 1 до 100 включительно».

Решение Алкуина

Алкуин так находит сумму этой прогрессии. На 1-й и на 99-й ступенях сидят всего 100 голубей, на 2-й и 98-й тоже 100 и т.д. Только 50-я и 100-я остаются без пары. Таким образом, на лестнице 49х100+50+100=5050 голубей.

Задача эта не проста,
Как сделать, чтобы быстро
От единицы и до ста
Сложить в уме все числа.
Пять первых связок рассмотри,
Найдёшь к решению ключи.

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 97 + 98 + 99 + 100$$

$$1 + 100 = 101$$

$$2 + 99 = 101$$

$$3 + 98 = 101$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 97 + 98 + 99 + 100 =$$

$$= 101 \cdot 50 = 5050$$

Давным-давно сказал один мудрец

Что прежде надо
Связать начало и конец
У численного ряда.

5050

Пусть сумма первых n членов арифметической прогрессии равна S_n тогда:

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

или

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1$$

Складывая эти равенства почленно, получим:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \dots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1).$$

$$2 \cdot S_n = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \dots + (a_1 + a_n)}_{n} = n \cdot (a_1 + a_n).$$

Отсюда имеем формулу

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

Теорема

Сумма первых n членов арифметической прогрессии равна полусумме крайних членов, умноженной на число членов.

$$\boxed{S_n = \frac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2}}$$

Если учесть, что $\boxed{a_n = a_1 + (n-1)d}$, то получим:

$$\boxed{S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2}\cdot n}$$

Пример 1

Найдите сумму первых 20 членов арифметической прогрессии: 1; 3,5; … .

Дано:

$\boxed{\{a_n\}}$ - арифметическая прогрессия

$\boxed{a_1 = 1}$

$\boxed{a_2 = 3{,}5}$

$\boxed{S_{20} = ?}$

Решение:

$\boxed{d = 3{,}5 - 1 = 2{,}5}$

$\boxed{a_{20} = 1 + 2{,}5(20 - 1) =}$

$\boxed{= 1 + 2{,}5 \cdot 19 =}$ $\boxed{48{,}5}$

$$\boxed{S_{20} = \frac{1 + 48{,}5}{2} \cdot 20 =}$$

$\boxed{= 49{,}5 \cdot 10 =}$ $\boxed{495}$

Ответ: 495

Пример 2

Найдите сумму первых 35 членов арифметической прогрессии, если её шестой член равен 31, десятый 55.

Дано:

$\boxed{\{a_n\}}$ - арифметическая прогрессия

$\boxed{a_6 = 31}$

$\boxed{a_{10} = 55}$

$\boxed{S_{35} = ?}$

Решение:

$$\boxed{\begin{cases} a_1 + 5d = 31 \\ a_1 + 9d = 55 \end{cases}} \quad -$$

$$\boxed{a_1 = 1; \ d = 6}$$

$$\boxed{S_{35} = \frac{2 \cdot 1 + (35-1) \cdot 6}{2} \cdot 35 =} \quad 3605$$

Ответ: 3605

Пример 3

Если в арифметической прогрессии $a_1 = 20$ и $d = -0{,}5$, $S_n = 371$ то найдём $a_n; \quad n$

Решение:

Дано:

$\{a_n\}$ - арифметическая прогрессия

$a_1 = 20$

$d = -0{,}5$

$S_n = 371$

$a_n = ?$

$n = ?$

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$$

$$\frac{2 \cdot 20 + (n-1) \cdot (-0{,}5)}{2} \cdot n = 371$$

$$(40 - 0{,}5(n-1)) \cdot n = 742$$

$$(40 - 0{,}5n + 0{,}5) \cdot n = 742$$

$$40{,}5n - 0{,}5n^2 = 742$$

$$0{,}5n^2 - 40{,}5n + 742 = 0$$

$$n^2 - 81n + 1484 = 0$$

$$n_1 = 28; \quad n_2 = 53$$

$$a_{28} = 6{,}5; \quad a_{53} = -6$$

Ответ: $n = 28; \quad a_{28} = 6{,}5 \quad u$

$n = 53; \quad a_{53} = -6$

Работа по учебнику

- 1 вариант - № 371(а), №372 (а).
- 2 вариант - № 371(б), №372 (б).

Это интересно

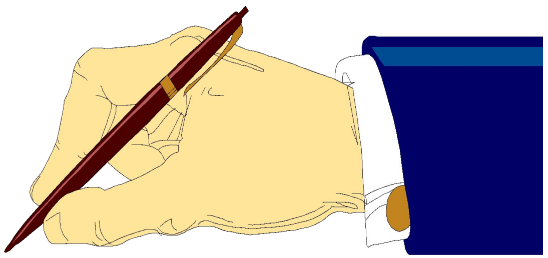
- Несмотря на тысячелетнюю древность различных задач на прогрессию, в нашем школьном обиходе прогрессии появились сравнительно недавно. В первом российском учебнике « Арифметика» (1703) Леонтия Филипповича Магницкого, изданного более трехсот лет назад, прогрессии хотя и имеются, но общих формул, связывающих входящие в них величины, в нём не дано. Поэтому составитель учебника не без труда справлялся с такими задачами.

Итог урока

Итак, сегодня мы изучили формулы суммы первых членов арифметической прогрессии , рассмотрели способы решения задач разных типов на применение формул суммы n первых членов арифметической прогрессии , учились мыслить нестандартно при выполнении заданий.

Домашнее задание

- Найти сумму первых шестнадцати членов арифметической прогрессии, в которой $a1=6$, $d = 4$.
- Найти сумму первых n членов арифметической прогрессии, если $n=6$ и (an): 1,6; 1,4;…
- Найти сумму первых восьми членов арифметической прогрессии (an): в которой $a1=6$ и $a7=26$.
- Найти сумму натуральных чисел начиная с 20 по 40 включительно.
- §



Спасибо за урок!