Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Оренбургский государственный университет»
Кафедра прикладной математики

И.Г. Руцкова

Векторная алгебра

Электронный курс лекций «Линейная алгебра»,
часть 10

Оренбург 2016

Скалярная проекция вектора на ось

Пусть задан ненулевой вектор $\vec{a}$ и некоторая ось l.

Определение 1. *Скалярной проекцией* вектора $\vec{a}$ на ось l называется число, определяемое по правилу (1):

$$\left|\vec{a}\right|\cos\left(\vec{a}\,\widehat{,}\,l\right). \qquad (1)$$

Обозначение: $$np_l\vec{a}=\left|\vec{a}\right|\cos\left(\vec{a}\,\widehat{,}\,l\right). \qquad (2)$$

<u>Замечание.</u> Если вектор $\vec{a}$ - нулевой, то скалярная проекция вектора на ось l по определению полагается равной нулю. Формула (2) в этом случае остается верной, так как $\left|\vec{a}\right|=0$.

Теорема 1.

1) Если $\vec{a}=\vec{b}$, то $np_l\vec{a}=np_l\vec{b}$, для любой оси l.

2) $np_l\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=np_l\vec{a}+np_l\vec{b}$, для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и оси l.

3) $np_l\left(\lambda\vec{a}\right)=\lambda np_l\vec{a}$ для любых векторов $\vec{a}$ и оси l, и любого $\lambda\in R$.

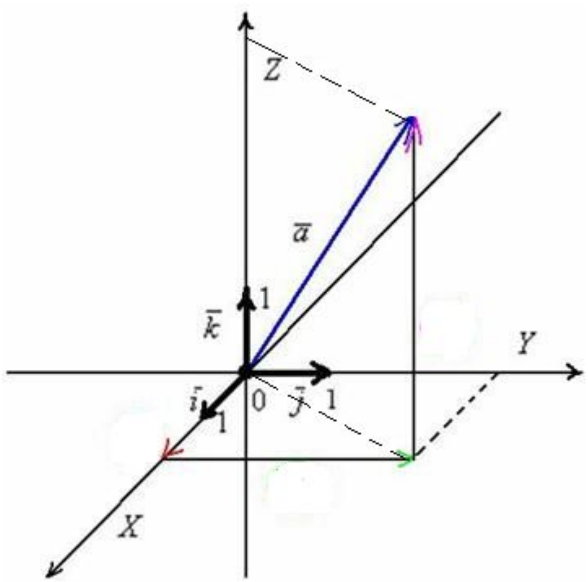
Следствие 1. Для любой оси l, любых действительных $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k$ и любых векторов $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_k$

$$np_l\left(\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+\ldots+\lambda_k\vec{a}_k\right)=np_l\vec{a}_1+np_l\vec{a}_2+\ldots+np_l\vec{a}_k. \qquad (3)$$

Геометрический смысл координат вектора

$$\vec{a} = \{x, y, z\}, \qquad \vec{a} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k},$$

$\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ - единичные векторы, сонаправленные координатным осям OX, OY и OZ, α, β и γ - углы, образуемые вектором $\vec{a}$ с координатными осями OX, OY и OZ соответственно



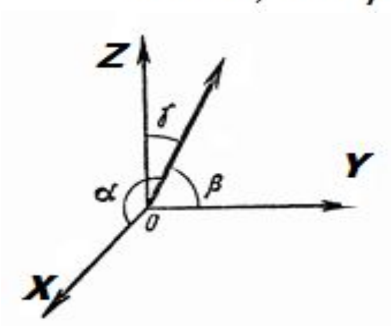
$$x = |\vec{a}| \cos\alpha, \quad y = |\vec{a}| \cos\beta, \quad z = |\vec{a}| \cos\gamma, \qquad (4)$$

$$x = np_{OX}\vec{a} = |\vec{a}| \cos\alpha,$$

$$y = np_{OY}\vec{a} = |\vec{a}| \cos\beta, \qquad (5)$$

$$z = np_{OZ}\vec{a} = |\vec{a}| \cos\gamma.$$

$\cos\alpha$, $\cos\beta$ и $\cos\gamma$ называются *направляющими косинусами* вектора $\vec{a}$.



Теорема 2.

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \qquad (6)$$

Скалярное произведение векторов

Пусть заданы два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Определение 3. *Скалярным произведением* векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, определяемое по правилу (7):

$$|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot cos\left(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}\right). \qquad (7)$$

Обозначения: $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot cos\left(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}\right),$ (8) $\quad \left(\vec{a},\vec{b}\right)=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot cos\left(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}\right)$ (9)

Замечание. В тех случаях, когда хотя бы один из векторов $\vec{a}$ или $\vec{b}$ является нулевым, скалярное произведение *по определению* полагают равным нулю. Формула (7) в этом случае остается верной, так как длина соответствующего вектора будет равна нулю и тот факт, что угол между векторами не определяется, не имеет уже принципиального значения.

Пример 1. $|\vec{a}|=6, |\vec{b}|=7, \left(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}\right)=\dfrac{\pi}{3};\quad \left(\vec{a},\vec{b}\right)=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot cos\left(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}\right)=6\cdot 7\cdot\dfrac{1}{2}=21.$

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot cos\left(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}\right)=|\vec{a}|\cdot np_{\vec{a}}\vec{b}, \qquad (10)$$

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot cos\left(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}\right)=|\vec{b}|\cdot np_{\vec{b}}\vec{a} \qquad (11)$$

Свойства скалярного произведения

Теорема 3. Если $\vec{a}=\vec{c},\ \vec{b}=\vec{d}$, то $(\vec{a},\vec{b})=(\vec{c},\vec{d})$.

Теорема 4. Для любого вектора $\vec{a}$ $(\vec{a},\vec{a})=|\vec{a}|^2 \geq 0$.

Следствие 2. $(\vec{a},\vec{a})=0 \Leftrightarrow \vec{a}=0$.

Теорема 5. Для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ $(\vec{a},\vec{b})=(\vec{b},\vec{a})$, т.е. данная операция является коммутативной.

Теорема 6. Для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, и любого действительного числа λ имеют место равенства (12) и (13):

$$(\lambda\vec{a},\vec{b})=\lambda(\vec{a},\vec{b}), \qquad (12) \qquad\qquad (\vec{a},\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a},\vec{b}) \qquad (13)$$

Доказательство. $$(\lambda\vec{a},\vec{b})=|\vec{b}|\cdot np_{\vec{b}}(\lambda\vec{a})=|\vec{b}|\cdot\lambda\cdot np_{\vec{b}}\vec{a}=\lambda\cdot|\vec{b}|\cdot np_{\vec{b}}\vec{a}=\lambda(\vec{a},\vec{b})$$

$$(\vec{a},\lambda\vec{b})=(\lambda\vec{b},\vec{a})=\lambda(\vec{b},\vec{a})=\lambda(\vec{a},\vec{b})$$

Теорема 7. Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ имеют места равенства:

$$(\vec{a}+\vec{b},\vec{c})=(\vec{a},\vec{c})+(\vec{b},\vec{c}), \qquad (14) \qquad\qquad (\vec{a},\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a},\vec{b})+(\vec{a},\vec{c}) \qquad (15)$$

Пример 2. Известно, что $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=5$, $|\vec{c}|=8$, $\vec{a} \perp \vec{b}$, $(\widehat{\vec{a},\vec{c}})=(\widehat{\vec{b},\vec{c}})=\frac{2\pi}{3}$. Найдите $(5\vec{a}-2\vec{b}, 6\vec{b}+3\vec{c})$.

Решение.

$$(5\vec{a}-2\vec{b},6\vec{b}+3\vec{c})=(5\vec{a},6\vec{b}+3\vec{c})+(-2\vec{b},6\vec{b}+3\vec{c})=$$

$$=(5\vec{a},6\vec{b})+(5\vec{a},3\vec{c})+(-2\vec{b},6\vec{b})+(-2\vec{b},3\vec{c})=$$

$$=5\cdot 6\cdot(\vec{a},\vec{b})+5\cdot 3\cdot(\vec{a},\vec{c})+(-2)\cdot 6\cdot(\vec{b},\vec{b})+(-2)\cdot 3\cdot(\vec{b},\vec{c})=$$

$$=30\cdot(\vec{a},\vec{b})+15\cdot(\vec{a},\vec{c})-12\cdot(\vec{b},\vec{b})-6(\vec{b},\vec{c})=$$

$$=30\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)+15\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{c}|\cdot\cos(\widehat{\vec{a},\vec{c}})-12\cdot|\vec{b}|^2-6\cdot|\vec{b}|\cdot|\vec{c}|\cdot\cos(\widehat{\vec{b},\vec{c}})=$$

$$=30\cdot 4\cdot 5\cdot 0+15\cdot 4\cdot 8\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-12\cdot 25-6\cdot 5\cdot 8\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=0-240-300+120=-420$$

Формула для определения скалярного произведения векторов, заданных своими координатами

Теорема 8.

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими координатами в некоторой прямоугольной системе координат: $\vec{a}=\{x_1,y_1,z_1\}$, $\vec{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$, то

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2. \qquad (16)$$

Доказательство.

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\left(x_1\cdot\vec{i}+y_1\cdot\vec{j}+z_1\vec{k},x_2\cdot\vec{i}+y_2\cdot\vec{j}+z_2\vec{k}\right)=$$

$$=\left(x_1\cdot\vec{i},x_2\cdot\vec{i}+y_2\cdot\vec{j}+z_2\cdot\vec{k}\right)+\left(y_1\cdot\vec{j},x_2\cdot\vec{i}+y_2\cdot\vec{j}+z_2\cdot\vec{k}\right)+\left(z_1\vec{k},x_2\cdot\vec{i}+y_2\cdot\vec{j}+z_2\cdot\vec{k}\right)=$$

$$=\left(x_1\cdot\vec{i},x_2\cdot\vec{i}\right)+\left(x_1\cdot\vec{i},y_2\cdot\vec{j}\right)+\left(x_1\cdot\vec{i},z_2\cdot\vec{k}\right)+\left(y_1\cdot\vec{j},x_2\cdot\vec{i}\right)+\left(y_1\cdot\vec{j},y_2\cdot\vec{j}\right)+\left(y_1\cdot\vec{j},z_2\cdot\vec{k}\right)+$$

$$+\left(z_1\cdot\vec{k},x_2\cdot\vec{i}\right)+\left(z_1\cdot\vec{k},y_2\cdot\vec{j}\right)+\left(z_1\cdot\vec{k},z_2\cdot\vec{k}\right)=x_1\cdot x_2\cdot\left(\vec{i},\vec{i}\right)+x_1\cdot y_2\cdot\left(\vec{i},\vec{j}\right)+x_1\cdot z_2\cdot\left(\vec{i},\vec{k}\right)+$$

$$+y_1\cdot x_2\cdot\left(\vec{j},\vec{i}\right)+y_1\cdot y_2\cdot\left(\vec{j},\vec{j}\right)+y_1\cdot z_2\cdot\left(\vec{j},\vec{k}\right)+z_1\cdot x_2\cdot\left(\vec{k},\vec{i}\right)+z_1\cdot y_2\cdot\left(\vec{k},\vec{j}\right)+z_1\cdot z_2\cdot\left(\vec{k},\vec{k}\right)=$$

$$\boxed{\left(\vec{i},\vec{i}\right)=\left|\vec{i}\right|^2=1,\quad \left(\vec{j},\vec{j}\right)=\left|\vec{j}\right|^2=1,\quad \left(\vec{k},\vec{k}\right)=\left|\vec{k}\right|^2=1}$$

$$=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2$$

$$\boxed{\left(\vec{i},\vec{j}\right)=\left(\vec{j},\vec{i}\right)=0,\quad \left(\vec{i},\vec{k}\right)=\left(\vec{k},\vec{i}\right)=0,\quad \left(\vec{j},\vec{k}\right)=\left(\vec{k},\vec{j}\right)=0,}$$

Пример 3. $\vec{a}=\{-3;1;4\}$, $\vec{b}=\{2;3;-5\}$;

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=(-3)\cdot 2+1\cdot 3+4\cdot(-5)=-6+3-20=-26+3=-23$$

Приложения скалярного произведения

Теорема 9 (Приложения скалярного произведения)

1) $|\vec{a}| = \sqrt{\left(\vec{a}, \vec{a}\right)}$. (17)

2) $cos\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) = \dfrac{\left(\vec{a}, \vec{b}\right)}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$, $\vec{a} \neq \vec{0}$ и $\vec{b} \neq \vec{0}$. (18)

3) Ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ взаимно перпендикулярны (ортогональны) тогда и только тогда, когда $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 0$.

4) $пр_{\vec{b}}\, \vec{a} = \dfrac{\left(\vec{a}, \vec{b}\right)}{|\vec{b}|}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$. (19)

Следствие 3. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими координатами в некоторой прямоугольной системе координат: $\vec{a}=\{x_1,y_1,z_1\}$, $\vec{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$, то

1) $$|\vec{a}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}, \tag{20}$$

2) $$\cos\left(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}\right)=\frac{x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}},\ \vec{a}\neq\vec{0}\text{ и }\vec{b}\neq\vec{0}; \tag{21}$$

3) ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ взаимно перпендикулярны (ортогональны) тогда и только тогда, когда

$$x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2=0; \tag{22}$$

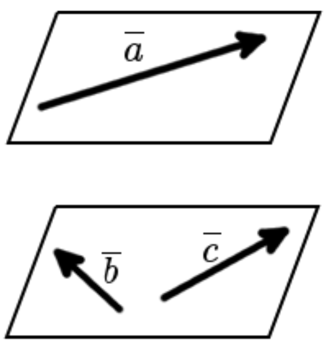
4) $$np_{\vec{b}}\,\vec{a}=\frac{x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}},\ \vec{b}\neq\vec{0}. \tag{23}$$

Компланарные и некомпланарные векторы

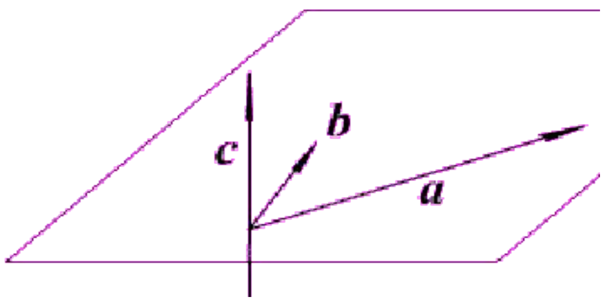
Определение 1. Три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называются *компланарными*, если найдется плоскость, которой они параллельны.

В противном случае, т.е. если такой плоскости не существует, то векторы называются *некомпланарными*.

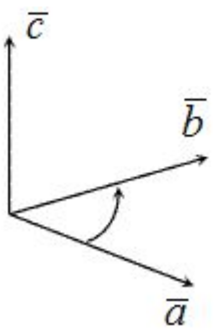
Нетрудно заметить, что компланарные векторы, располагаются либо в параллельных плоскостях, либо на одной плоскости, а если их привести к одному началу, будут располагаться в одной плоскости, а некомпланарные – нет.



Компланарные векторы



Некомпланарные векторы



Правая тройка векторов

Определение 2. Некомпланарные векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют *правую тройку*, если при приведении их к одному началу, для наблюдателя, стоящего на конце вектора $\vec{c}$, кратчайший поворот от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ виден против хода часовой стрелки.

Векторное произведение векторов: определение

Пусть даны два неколлинеарных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Определение 3. Вектор $\vec{c}$ называется *векторным произведением* векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если:

1) $\vec{c} \perp \vec{a}, \quad \vec{c} \perp \vec{b};$

2) векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют правую тройку;

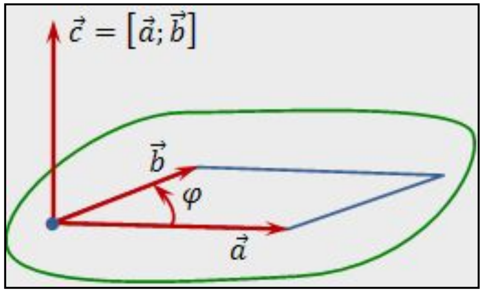
3) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right)$.

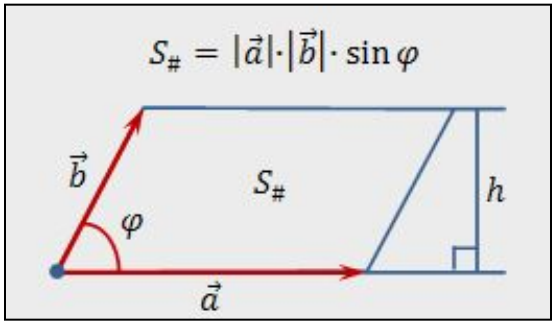
Обозначения: $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}, \qquad \vec{c} = \left[\vec{a}, \vec{b}\right]$

Замечание. Если один из векторов $\vec{a}$ или $\vec{b}$ - нулевой или векторы ненулевые, но коллинеарные, то векторное *по определению* полагается равным нулевому вектору, формула (1) в этом случае остается верной, так как если один из векторов нулевой, то его длина – нуль и величина угла между векторами не имеет принципиального значения; а если векторы – ненулевые, но – коллинеарные, то синус угла между ними принимает значение равное нулю.

Пример 1. $|\vec{a}| = 8, \; |\vec{b}| = 4, \; \left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right) = \frac{5\pi}{6};$ $\quad \left|\left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right) = 8 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 16$

Свойства векторного произведения

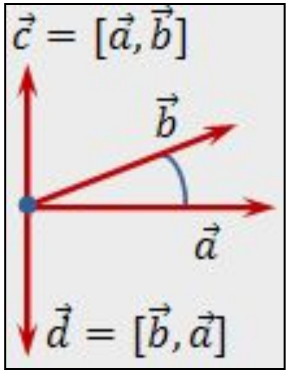




Теорема 1. Если $\vec{a} = \vec{d}$, $\vec{b} = \vec{f}$, $\vec{c} = \left[\vec{a}, \vec{b}\right]$, $\vec{p} = \left[\vec{d}, \vec{f}\right]$, то $\vec{c} = \vec{p}$.

Теорема 2. $\left[\vec{a}, \vec{a}\right] = \vec{0}$.

Теорема 3 $\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = -\left[\vec{b}, \vec{a}\right]$.



Теорема 4.

$$\left[\lambda \cdot \vec{a}, \vec{b}\right] = \lambda \cdot \left[\vec{a}, \vec{b}\right];$$

$$\left[\vec{a}, \lambda \cdot \vec{b}\right] = \lambda \cdot \left[\vec{a}, \vec{b}\right]$$

Теорема 5.

$$\left[\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}\right] = \left[\vec{a}, \vec{c}\right] + \left[\vec{b}, \vec{c}\right];$$

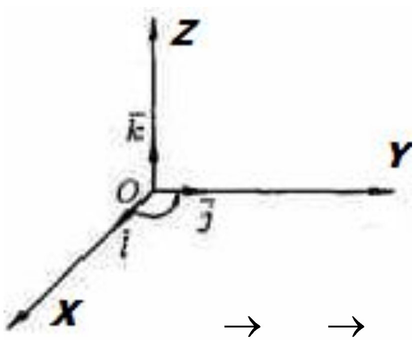
$$\left[\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}\right] = \left[\vec{a}, \vec{b}\right] + \left[\vec{a}, \vec{c}\right]$$

Пример 2. $|\vec{a}|=3,\ |\vec{b}|=4,\ \left(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}\right)=\frac{\pi}{6}.$ Найдите $\left\|\left[5\vec{a}+2\vec{b},\vec{b}\right]\right\|$

Решение.

$$\left\|\left[5\vec{a}+2\vec{b},\vec{b}\right]\right\|=\left\|\left[5\vec{a},\vec{b}\right]+\left[2\vec{b},\vec{b}\right]\right\|=\left|5\cdot\left[\vec{a},\vec{b}\right]+2\cdot\left[\vec{b},\vec{b}\right]\right|=\left|5\cdot\left[\vec{a},\vec{b}\right]+2\cdot\vec{0}\right|$$

$$=5\cdot\left\|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right\|=5\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\left(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}\right)=5\cdot3\cdot4\cdot\frac{1}{2}=30$$



$$\boxed{\left[\vec{i},\vec{i}\right]=\vec{0},}\qquad\boxed{\left[\vec{j},\vec{j}\right]=\vec{0},}\qquad\boxed{\left[\vec{k},\vec{k}\right]=\vec{0}.}$$

$\vec{k}\perp\vec{i},\quad \vec{k}\perp\vec{j},\quad \vec{i},\vec{j},\vec{k}$ образуют правую тройку;

$$|\vec{i}|\cdot|\vec{j}|\cdot\sin\left(\vec{i}\,\hat{,}\,\vec{j}\right)=1\cdot1\cdot\sin\frac{\pi}{2}=1;\qquad |\vec{k}|=|\vec{i}|\cdot|\vec{j}|\cdot\sin\left(\vec{i}\,\hat{,}\,\vec{j}\right);$$

$$\boxed{\left[\vec{i},\vec{j}\right]=\vec{k};}\qquad\boxed{\left[\vec{j},\vec{i}\right]=-\left[\vec{i},\vec{j}\right]=-\vec{k}}\qquad\boxed{\left[\vec{j},\vec{k}\right]=\vec{i}}\qquad\boxed{\left[\vec{k},\vec{i}\right]=\vec{j}}$$

$$\boxed{\left[\vec{k},\vec{j}\right]=-\vec{i}}\qquad\boxed{\left[\vec{i},\vec{k}\right]=-\vec{j}}$$

Определение векторного произведения векторов, заданных координатами

Теорема 6 Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими координатами в некоторой прямоугольной системе координат: $\vec{a}=\{x_1,y_1,z_1\}$, $\vec{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$, то

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\{y_1z_2-y_2z_1;-(x_1z_2-x_2z_1);x_1y_2-x_2y_1\}$$

Доказательство.

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\left[x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k},x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}\right]=$$

$$=\left[x_1\vec{i},x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}\right]+\left[y_1\vec{j},x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}\right]+\left[z_1\vec{k},x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}\right]=$$

$$=\left[x_1\vec{i},x_2\vec{i}\right]+\left[x_1\vec{i},y_2\vec{j}\right]+\left[x_1\vec{i},z_2\vec{k}\right]+\left[y_1\vec{j},x_2\vec{i}\right]+\left[y_1\vec{j},y_2\vec{j}\right]+\left[y_1\vec{j},z_2\vec{k}\right]+$$

$$+\left[z_1\vec{k},x_2\vec{i}\right]+\left[z_1\vec{k},y_2\vec{j}\right]+\left[z_1\vec{k},z_2\vec{k}\right]=x_1x_2\cdot\left[\vec{i},\vec{i}\right]+x_1y_2\cdot\left[\vec{i},\vec{j}\right]+x_1z_2\cdot\left[\vec{i},\vec{k}\right]+$$

$$+y_1x_2\cdot\left[\vec{j},\vec{i}\right]+y_1y_2\cdot\left[\vec{j},\vec{j}\right]+y_1z_2\left[\vec{j},\vec{k}\right]+z_1x_2\cdot\left[\vec{k},\vec{i}\right]+z_1y_2\cdot\left[\vec{k},\vec{j}\right]+z_1z_2\cdot\left[\vec{k},\vec{k}\right]=$$

$$=\vec{0}+x_1y_2\vec{k}-x_1z_2\vec{j}-y_1x_2\vec{k}+\vec{0}+y_1z_2\vec{i}+z_1x_2\vec{j}-z_1y_2\vec{i}+\vec{0}=$$

$$=(y_1z_2-z_1y_2)\cdot\vec{i}+(z_1x_2-x_1z_2)\cdot\vec{j}+(x_1y_2-y_1x_2)\cdot\vec{k}$$

Практический алгоритм

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\left\{y_1z_2-y_2z_1;-\left(x_1z_2-x_2z_1\right);x_1y_2-x_2y_1\right\}$$

$$\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}=y_1z_2-y_2z_1,\qquad \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}=x_1z_2-x_2z_1,\qquad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}=x_1y_2-x_2y_1$$

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\cdot\vec{i}-\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}\cdot\vec{j}+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\cdot\vec{k}$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}=(-1)^{1+1}\vec{i}\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}+(-1)^{1+2}\vec{j}\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}+(-1)^{1+3}\vec{k}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}=\vec{i}\cdot\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}-\vec{j}\cdot\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}+\vec{k}\cdot\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Пример 3.

$$\vec{a}=\{0,1,4\},\quad \vec{b}=\{-2,3,7\}$$

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 4 \\ -2 & 3 & 7 \end{vmatrix}=\vec{i}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}-\vec{j}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 7 \end{vmatrix}+\vec{k}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}=-5\vec{i}-8\vec{j}+2\vec{k}$$

Приложения векторного произведения

Теорема 7.

Если $\vec{a} \neq \vec{0}$ и $\vec{b} \neq \vec{0}$, $\quad \sin\left(\vec{a} \,\hat{,}\, \vec{b}\right) = \dfrac{\left\| \left[\vec{a}, \vec{b}\right] \right\|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

Следствие 1. $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \vec{0}$.

Пример 4. Какому условию должны удовлетворять векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, чтобы векторы $2\vec{a} - 5\vec{b}$ и $3\vec{a} + 4\vec{b}$ были коллинеарны?

Решение. $2\vec{a} - 5\vec{b} \parallel 3\vec{a} + 4\vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \left[2\vec{a} - 5\vec{b}, 3\vec{a} + 4\vec{b}\right] = \vec{0}$.

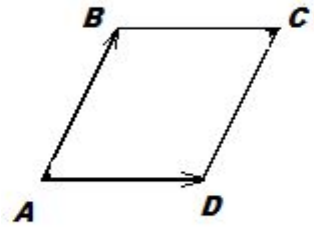
$$\left[2\vec{a} - 5\vec{b}, 3\vec{a} + 4\vec{b}\right] = \left[2\vec{a}, 3\vec{a} + 4\vec{b}\right] + \left[-5\vec{b}, 3\vec{a} + 4\vec{b}\right] = \left[2\vec{a}, 3\vec{a}\right] + \left[2\vec{a}, 4\vec{b}\right] + \left[-5\vec{b}, 3\vec{a}\right] + \left[-5\vec{b}, 4\vec{b}\right] =$$

$$= 6 \cdot \left[\vec{a}, \vec{a}\right] + 8 \cdot \left[\vec{a}, \vec{b}\right] + (-15) \cdot \left[\vec{b}, \vec{a}\right] + (-20) \cdot \left[\vec{b}, \vec{b}\right] = 6 \cdot \vec{0} + 8 \cdot \left[\vec{a}, \vec{b}\right] + 15 \cdot \left[\vec{a}, \vec{b}\right] - 20 \cdot \vec{0} = 23 \cdot \left[\vec{a}, \vec{b}\right]$$

$$\left[2\vec{a} - 5\vec{b}, 3\vec{a} + 4\vec{b}\right] = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad 23 \cdot \left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}.$$

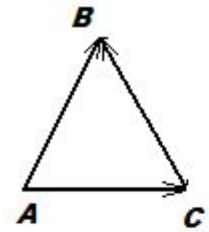
Приложения векторного произведения

Следствие 2.



$$S_{ABCD} = \left\| \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD} \right] \right\|$$

Следствие 3.



$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \left\| \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \right] \right\|.$$

Пример 5. Даны три точки: $A(1,-2,3)$, $B(4,0,7)$, $C(0,5,8)$. Определите площадь треугольника ABC.

Решение. $\overrightarrow{AB} = \{3,2,4\}$; $\overrightarrow{AC} = \{-1,7,5\}$

$$\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & 4 \\ -1 & 7 & 5 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} = -18\,\vec{i} - 19\,\vec{j} + 23\,\vec{k};$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \left\| \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \right] \right\| = \frac{1}{2} \sqrt{(-18)^2 + (-19)^2 + (23)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{1214}.$$

Смешанное произведение векторов

Пусть заданы три вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Определение 1. *Смешанным произведением* векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется число, равное $\left(\left[\vec{a}, \vec{b}\right], \vec{c}\right)$.

Обозначение: $$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \left(\left[\vec{a}, \vec{b}\right], \vec{c}\right)$$

Замечание. Если один из векторов нулевой, то, согласно замечаниям к определениям скалярного и векторного произведений (смотрите соответствующие параграфы), смешанное произведение векторов будет равно нулю.

Свойства смешанного произведения

Теорема 1.

1) $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = -\vec{b}\,\vec{a}\,\vec{c} = \vec{b}\,\vec{c}\,\vec{a} = -\vec{c}\,\vec{b}\,\vec{a} = \vec{c}\,\vec{a}\,\vec{b} = -\vec{a}\,\vec{c}\,\vec{b}, \quad \forall\, \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}.$

2) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}; \quad \forall \lambda \in R$

$$\left(\lambda \vec{a}\right)\vec{b}\,\vec{c} = \lambda\left(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right); \qquad \vec{a}\left(\lambda \vec{b}\right)\vec{c} = \lambda\left(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right); \qquad \vec{a}\,\vec{b}\left(\lambda \vec{c}\right) = \lambda\left(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right).$$

3) $\left(\vec{a}_1 + \vec{a}_2\right)\vec{b}\,\vec{c} = \vec{a}_1\,\vec{b}\,\vec{c} + \vec{a}_2\,\vec{b}\,\vec{c}, \qquad \forall\, \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c};$

$\vec{a}\left(\vec{b}_1 + \vec{b}_2\right)\vec{c} = \vec{a}\,\vec{b}_1\,\vec{c} + \vec{a}\,\vec{b}_2\,\vec{c}, \qquad \forall\, \vec{a}, \vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{c};$

$\vec{a}\,\vec{b}\left(\vec{c}_1 + \vec{c}_2\right) = \vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}_1 + \vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}_2. \qquad \forall\, \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}_1, \vec{c}_2.$

Замечание.

$$\boxed{\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \left(\left[\vec{a}, \vec{b}\right], \vec{c}\right) = \left(\vec{a}, \left[\vec{b}, \vec{c}\right]\right)}$$

Свойства смешанного произведения

Следствие 1. Если среди векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ есть равные или коллинеарные, то смешанное произведение $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ равно нулю.

Следствие 2. Если один из векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ является линейной комбинацией двух других, то смешанное произведение $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ равно нулю.

Пример 1. Докажите тождество $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\left(\vec{b}+\vec{c}\right)\left(\vec{c}+\vec{a}\right)=2\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$.

Доказательство.

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\left(\vec{b}+\vec{c}\right)\left(\vec{c}+\vec{a}\right)=\vec{a}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)\left(\vec{c}+\vec{a}\right)+\vec{b}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)\left(\vec{c}+\vec{a}\right)=$$

$$=\vec{a}\,\vec{b}\left(\vec{c}+\vec{a}\right)+\vec{a}\,\vec{c}\left(\vec{c}+\vec{a}\right)+\vec{b}\,\vec{b}\left(\vec{c}+\vec{a}\right)+\vec{b}\,\vec{c}\left(\vec{c}+\vec{a}\right)=$$

$$=\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}+\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{a}+\vec{a}\,\vec{c}\,\vec{c}+\vec{a}\,\vec{c}\,\vec{a}+0+\vec{b}\,\vec{c}\,\vec{c}+\vec{b}\,\vec{c}\,\vec{a}=\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}+0+0+0+0+\vec{b}\,\vec{c}\,\vec{a}=$$

$$=\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}-\vec{b}\,\vec{a}\,\vec{c}=\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}+\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=2\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$$

Определение смешанного произведения векторов, заданных координатами

Теорема 2.

Если векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ заданы своими координатами в прямоугольной системе координат

$$\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}, \quad \vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}, \quad \vec{c} = \{x_3, y_3, z_3\}, \qquad \vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Доказательство. $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \left(\left[\vec{a}, \vec{b}\right], \vec{c}\right)$, $\quad \left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \{y_1 z_2 - y_2 z_1; -(x_1 z_2 - x_2 z_1); x_1 y_2 - x_2 y_1\}$,

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \left(\left[\vec{a}, \vec{b}\right], \vec{c}\right) = (y_1 z_2 - y_2 z_1) \cdot x_3 - (x_1 z_2 - x_2 z_1) \cdot y_3 + (x_1 y_2 - x_2 y_1) \cdot z_3.$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = x_3 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} + y_3 \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + z_3 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} =$$

$$= x_3 \cdot (y_1 z_2 - y_2 z_1) - y_3 \cdot (x_1 z_2 - x_2 z_1) + z_3 \cdot (x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

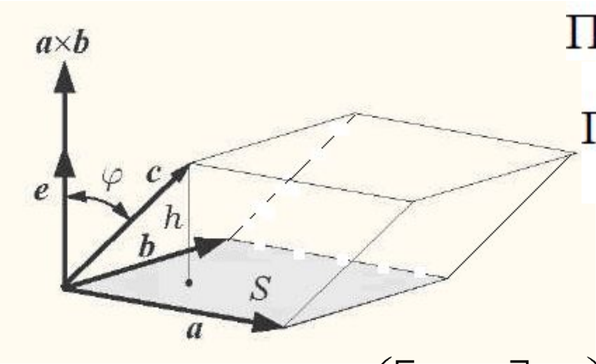
Пример 2.

$$\vec{a} = \{1; -2; 3\}, \quad \vec{b} = \{-1; 0; 6\}, \quad \vec{c} = \{3; 2; 4\}; \qquad \vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 6 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 - 6 - 36 - 0 - 12 - 8 = -62$$

Приложения смешанного произведения векторов

Теорема 3. Абсолютная величина смешанного произведения некомпланарных векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ равна объему параллелепипеда, который можно построить на данных векторах, если привести их к одному началу

Доказательство. *Случай 1* – тройка векторов – правая.



Пусть площадь параллелограмма равна S.

Пусть $\vec{e}$ - единичный вектор, сонаправленный вектору $\left[\vec{a}, \vec{b}\right]$,

$$\boxed{\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = S \cdot \vec{e}.}$$

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \left(\left[\vec{a}, \vec{b}\right], \vec{c}\right) = \left(S\,\vec{e}, \vec{c}\right) = S\left(\vec{e}, \vec{c}\right) = S \cdot |\vec{e}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos\varphi = S \cdot |\vec{c}| \cdot \cos\varphi,$$

где φ - угол между векторами $\vec{e}$ и $\vec{c}$ $\quad \boxed{|\vec{c}| \cdot \cos\varphi = np_{\vec{e}}\,\vec{c} = h} \quad \boxed{\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = S \cdot h}$

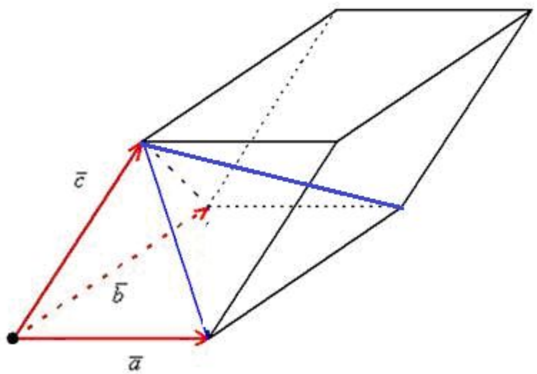
2 случай – когда векторы $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ образуют левую тройку.

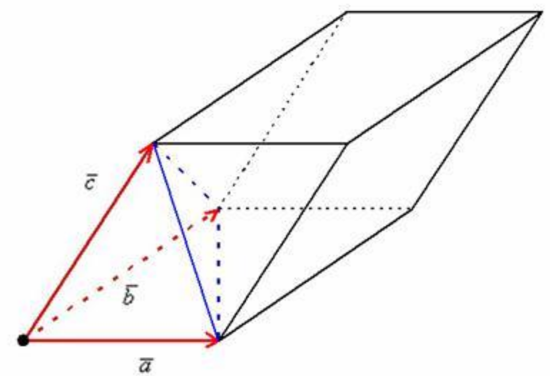
$$|\vec{c}| \cdot \cos\varphi = np_{\vec{e}}\,\vec{c} = -h, \qquad \cos\varphi < 0, \qquad \boxed{\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = -S \cdot h}$$

Приложения смешанного произведения

Следствие 3. Объем четырехугольной пирамиды, которую можно построить на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, если привести их к одному началу, равен $\frac{1}{3}\left|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right|$.

Следствие 4. Объем треугольной пирамиды, которую можно построить на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, если привести их к одному началу, равен $\frac{1}{6}\left|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right|$.





Пример 3. Вычислите объем треугольной пирамиды, вершины которой находятся в точках: $A(2;1;-1), B(5;-5;3), C(3;0;-1), D(0;7;6)$.

$\vec{AB} = \{3;-6;4\}$,

$\vec{AC} = \{1;-1;0\}$,

$\vec{AD} = \{-2;6;7\}$;

$$\vec{AB}\,\vec{AC}\,\vec{AD} = \begin{vmatrix} 3 & -6 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 6 & 7 \end{vmatrix} = -21+24+0-8-0-(-42) = 37, \quad V_{ABCD} = \frac{1}{6}|37| = \frac{37}{6}.$$

Приложения смешанного произведения

Теорема 4. Векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = 0$.

Доказательство.

Векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - компланарны, тогда и только тогда, когда найдется плоскость, которой они параллельны, а это возможно тогда и только тогда, когда один из них является линейной комбинацией двух других, т.е. тогда и только тогда, когда они линейно зависимы.

Согласно следствию из критерия линейной независимости векторов в конечномерном пространстве для векторов, заданных своими координатами, три вектора в трех мерном пространстве линейно зависимы тогда и только тогда, когда определитель, составленный из координат векторов равен нулю.

В прямоугольной системе координат величина этого определителя совпадает с величиной смешанного произведения.

Следствие 5. Четыре точки A, B, C, D принадлежат одной плоскости тогда и только тогда, когда $\vec{AB}\,\vec{AC}\,\vec{AD} = 0$.

Доказательство.

$A,\ B,\ C,\ D \in \alpha \ \Leftrightarrow\ \vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD} \in \alpha \ \Leftrightarrow\ \vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$ - компланарны $\Leftrightarrow$

$$\vec{AB}\,\vec{AC}\,\vec{AD} = 0$$