Черкаський національний університет

Тема: "Симплексний метод розв'язування задачі лінійного програмування"

Дисципліна
"Методи оптимізації і дослідження операцій"

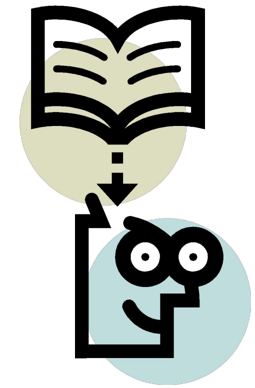
Лекція 14

Викладач: проф. Триус Ю.В.

Питання:

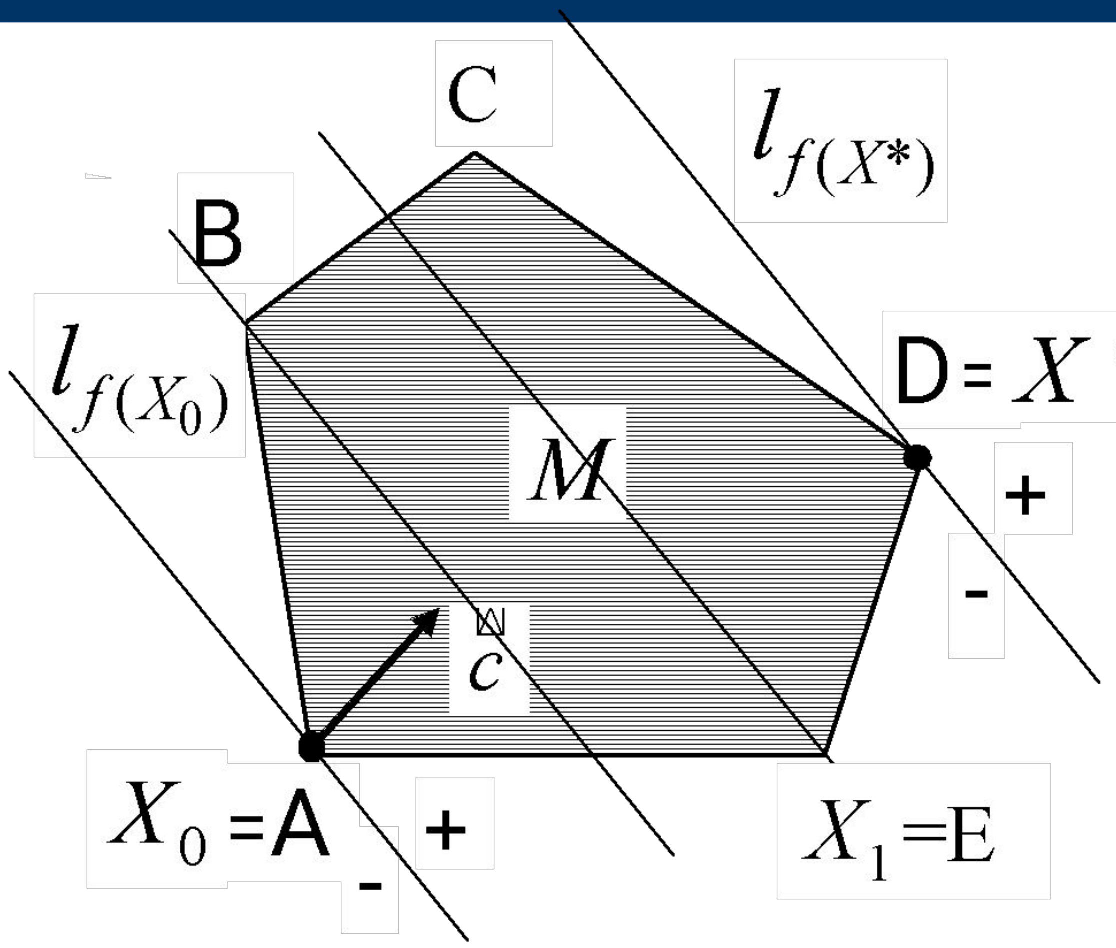
1. Теоретичні основи симплекс-методу.
2. Симплекс-таблиці та їх перетворення.
3. Алгоритм симплекс-методу.

1. Теоретичні основи симплекс-методу.

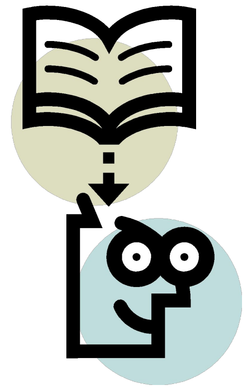


Основним методом розв'язування задач лінійного програмування є симплекс-метод, або метод послідовного покращення плану, ідея якого, з геометричної точки зору, полягає в тому, щоб спочатку знайти яку-небудь вершину (опорний невироджений план) многогранника *M*, а потім від неї перейти до іншої вершини (опорного невиродженого плану), в якій значення функції не більше (для задачі мінімізації) або не менше (для задачі максимізації), ніж у попередній, і таким чином за скінченну кількість кроків буде знайдено розв'язок задачі лінійного програмування або з'ясовано, що вона не має розв'язків.

1. Теоретичні основи симплекс-методу.



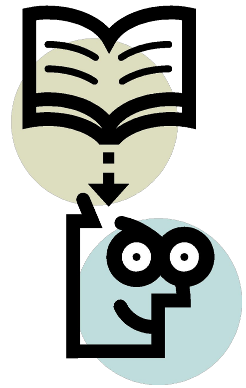
1. Теоретичні основи симплекс-методу.



Враховуючи геометричну ідею симплекс-методу, можна виділити основні умови його реалізації:

1. **Потрібно вміти знайти початковий опорний невироджений план ЗЛП (вершину многогранника *M*).**
2. **Потрібно мати критерій оптимальності поточного опорного невиродженого плану для задачі максимізації і мінімізації.**
3. **Потрібно мати умови, за допомогою яких можна з’ясувати, чи існує новий опорний невироджений план (вершина *M*), для якого значення цільової функції краще, ніж для попереднього опорного плану, чи ні.**
4. **Потрібно мати процедуру переходу до цього нового опорного невиродженого плану.**
5. **Потрібно мати умови, за допомогою яких можна з’ясувати, що ЗЛП не має розв’язків.**

1. Теоретичні основи симплекс-методу.



Нехай необхідно знайти розв'язок задачі лінійного програмування

$$f(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \to \max\ (\min), \qquad (1)$$

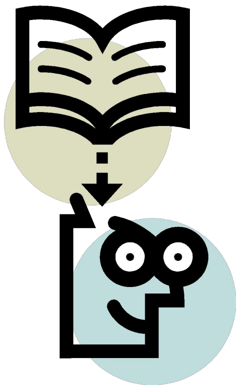
при умовах

$$\begin{cases} x_1 + \qquad a_{1m+1} x_{m+1} + \ldots \quad + a_{1n} x_n = \quad b_1, \\ \quad x_2 + \quad a_{2m+1} x_{m+1} + \ldots \quad + a_{2n} x_n = \quad b_2, \\ \quad \ldots \qquad \qquad \ldots \qquad \qquad \ldots \qquad \ldots \\ \qquad x_m + a_{mm+1} x_{m+1} + \ldots \quad + a_{mn} x_n = \quad b_m, \end{cases} \qquad (2)$$

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,n}, \qquad (3)$$

де $a_{ij}, b_i, c_j,\ j = \overline{1,n},\ i = \overline{1,m}$, – задані дійсні числа, при цьому $m < n$, $b_i > 0$, $i = \overline{1,m}$.

1. Теоретичні основи симплекс-методу.



Векторна форма даної задачі має вигляд:

$$f(x) = \langle c, X \rangle \to \max\ (\min)$$

при умовах

$$x_1 P_1 + x_2 P_2 + \ldots + x_m P_m + \ldots + x_n P_n = P_0,$$

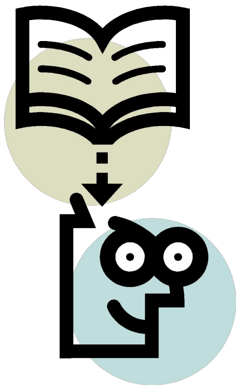
$$x_j \geq 0 \ \ (j = \overline{1, n}),$$

де

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, P_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$P_{m+1} = \begin{pmatrix} a_{1m+1} \\ a_{2m+1} \\ \ldots \\ a_{mm+1} \end{pmatrix}, \ldots, P_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \ldots \\ a_{mn} \end{pmatrix}; P_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

1. Теоретичні основи симплекс-методу.



Покладемо

$$\Delta_j = z_j - c_j,$$

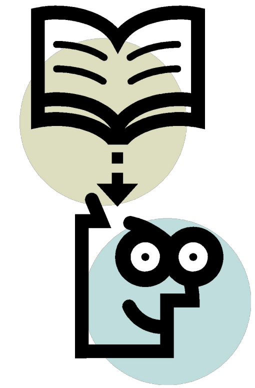
$$z_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} = \langle C_б, P_j \rangle,$$

$$\Delta_j = \langle C_б, P_j \rangle - c_j, \qquad (4)$$

$$j = \overline{1, n},$$

де вектор $C_б = (c_1, c_2, \ldots, c_m)^T$.

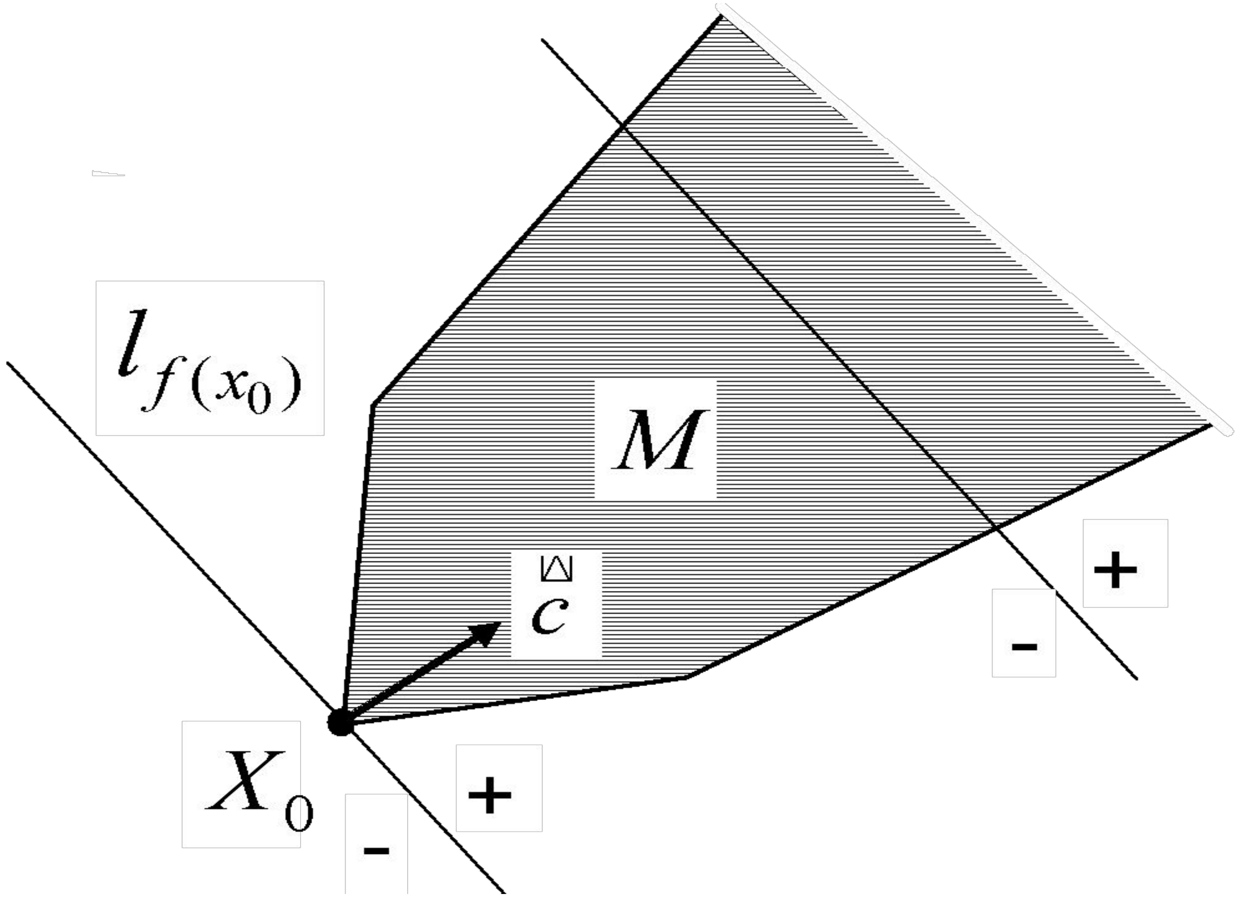
1. Теоретичні основи симплекс-методу.



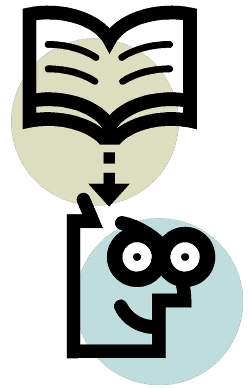
Теорема 1 (критерій оптимальності). *Опорний план* $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*, 0, \dots, 0)$ *є оптимальним планом задачі* (1)-(3) *тоді і тільки тоді, коли для будь-якого* $j = \overline{1,n}$ $\Delta_j \geq 0$ *для задачі максимізації або* $\Delta_j \leq 0$ *для задачі мінімізації.*

Теорема 2. *Якщо для опорного плану* X_0 *існує індекс* $j = k$, *для якого* $\Delta_k < 0$ $(\Delta_k > 0)$ *і серед чисел* a_{ik}, $i = \overline{1,m}$, *немає додатних (всі* $a_{ik} \leq 0$*), то цільова функція необмежена зверху (знизу) на множині планів* (2)-(3) *і задача максимізації (мінімізації)* (1)-(3) *не має розв'язків.*

1. Теоретичні основи симплекс-методу.



1. Теоретичні основи симплекс-методу.

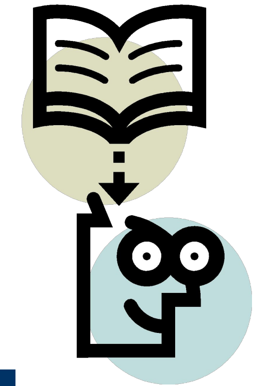


Теорема 3. *Якщо опорний план* X_0 *є невиродженим і для всіх* $\Delta_k < 0$ $(\Delta_k > 0)$ *серед чисел* a_{ik}, $i = \overline{1,m}$, *є додатні, то існує опорний план* X_1 *такий, що*

$$f(X_1) > f(X_0) \quad (f(X_1) < f(X_0)).$$

Сформульовані теореми дають можливість перевірити чи є знайдений опорний план оптимальним та виявити можливість переходу до нового опорного плану.

1. Теоретичні основи симплекс-методу.



Сформульовані теореми дозволяють перевірити, чи є знайдений опорний план оптимальним, та виявити можливість переходу до нового опорного плану.

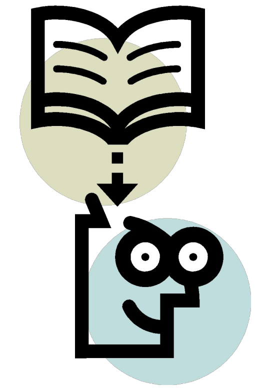
Приклад 1. Перевірити чи є початковий опорний план задачі ЛП оптимальним:

$$f(x) = 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 5x_4 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_3 - 2x_4 = 5, \\ x_2 + 4x_3 + x_4 = 9, \end{cases}$$

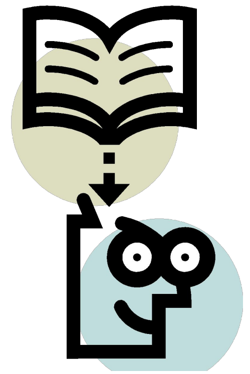
$$x_j \geq 0,\ j = 1,2,3,4.$$

2. Симплекс-таблиці та їх перетворення.



Дослідження опорного плану ЗЛП на оптимальність, а також подальший обчислювальний процес симплекс-методу зручніше вести, якщо умову задачі та початкові дані, одержані після визначення початкового опорного плану, записати у вигляді симплекс-таблиці (таблиця 1).

2. Симплекс-таблиці та їх перетворення.



Провідний стовпчик

Таблиця 1

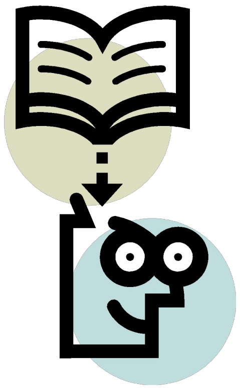
i	Базис	$C_б$	P_0	c_1	c_2	…	c_r	…	c_m	c_{m+1}	…	c_k	…	c_n	Θ_i
				P_1	P_2	…	P_r	…	P_m	P_{m+1}	…	P_k	…	P_n	
1	P_1	c_1	b_1	1	0	…	0	…	0	a_{1m+1}	…	a_{1k}	…	a_{1n}	Θ_1
2	P_2	c_2	b_2	0	1	…	0	…	0	a_{2m+1}	…	a_{2k}	…	a_{2n}	Θ_2
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
r	P_r	c_r	b_r	0	0	…	1	…	0	a_{rm+1}	…	a_{rk}	…	a_{rn}	Θ_r
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
m	P_m	c_m	b_m	0	0	…	0	…	1	a_{mm+1}	…	a_{mk}	…	a_{mn}	Θ_m
$m+1$	$\Delta_j = z_j - c_j$		f_0	$\Delta_1 = 0$	$\Delta_2 = 0$	…	$\Delta_r = 0$		$\Delta_m = 0$	Δ_{m+1}	…	Δ_k		Δ_n	

Провідний рядок

Інформаційний рядок

Розв'язковий елемент

2. Симплекс-таблиці та їх перетворення.



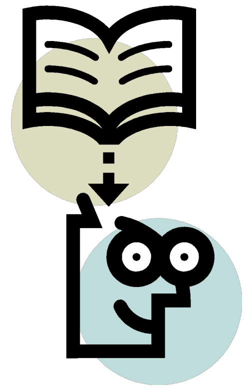
Таблиця 2

i	Базис	$C_б$	P_0	c_1	c_2	…	c_r	…	c_m	c_{m+1}	…	c_k	…	c_n
				P_1	P_2	…	P_r	…	P_m	P_{m+1}	…	P_k	…	P_n
1	P_1	c_1	b'_1	1	0	…	a'_{1r}		0	$a'_{1\,m+1}$	…	0	…	a'_{1n}
2	P_2	c_2	b'_2	0	1	…	a'_{2r}	…	0	$a'_{2\,m+1}$	…	0	…	a'_{2n}
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
r	P_k	c_k	b'_r	0	0	…	a'_{rr}	…	0	$a'_{r\,m+1}$	…	1	…	a'_{rn}
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
m	P_m	c_m	b'_m	0	0	…	a'_{mr}	…	1	$a'_{m\,m+1}$	…	0	…	a'_{mn}
$\Delta'_j = z'_j - c_j$			f'_0	0	0	…	$\Delta'_r = z'_r - c_r$	…	0	$\Delta'_{m+1} = z'_{m+1} - c_{m+1}$	…	0	…	$\Delta'_n = z'_n - c_n$

$$a'_{ij}: \quad \begin{matrix} a_{ij} & & a_{ik} \\ & \times & \\ a_{rj} & & \boxed{a_{rk}} \end{matrix} \quad (\text{при } i < r);$$

$$a'_{ij}: \quad \begin{matrix} a_{rj} & & \boxed{a_{rk}} \\ & \times & \\ a_{ij} & & a_{ik} \end{matrix} \quad (\text{при } i > r);$$

3. Алгоритм симплекс-методу.



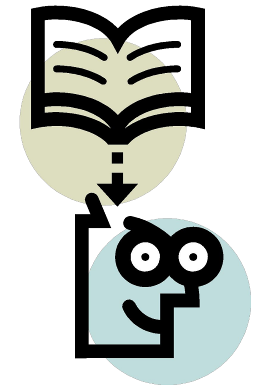
1. Знайти початковий опорний невироджений план задачі (1)-(3): $X_0 = (b_1, b_2, \ldots, b_m, 0, \ldots, 0)$.

2. Скласти початкову симплекс-таблицю, при цьому

$$\Delta_j = z_j - c_j, \quad z_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} = \langle C_б, P_j \rangle, \quad j = \overline{1, n}.$$

3. З'ясувати, чи є хоча б одне від'ємне (додатне) число Δ_j. Якщо немає, то знайдений план оптимальній. Якщо ж серед чисел Δ_j є від'ємні (додатні), то або встановити нерозв'язність задачі, або перейти до нового опорного плану.

3. Алгоритм симплекс-методу.



4. Знайти направляючі стовпчик і рядок. Направляючій стовпчик визначається найбільшим за абсолютною величиною від'ємним (додатнім) числом Δ_j, а направляючій рядок – мінімальним з відношень компонент стовпчика вектора P_0 до додатних компонент направляючого стовпчика.

5. Визначити додатні компоненти нового опорного плану, коефіцієнти розкладу векторів P_j, $j=\overline{1,n}$, за векторами нового базису і числа f_j, Δ'_j за правилами:

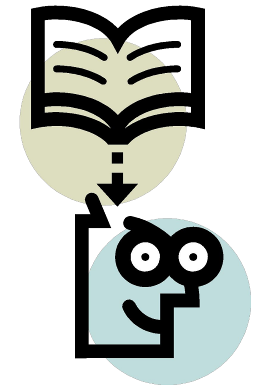
3. Алгоритм симплекс-методу.

1) додатні компоненти нового опорного плану обраховуються за формулами

$$b_i' = \begin{cases} \dfrac{b_i \cdot a_{rk} - b_r \cdot a_{ik}}{a_{rk}}, & \text{при } i \neq r, \\ b_r / a_{rk}, & \text{при } i = r, \end{cases}$$

де k – номер направляючого стовпчика, r – номер направляючого рядка,

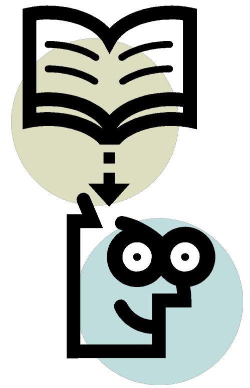
3. Алгоритм симплекс-методу.



2) коефіцієнти розкладу векторів P_j за векторами нового базису, які відповідають новому опорному плану, обраховуються за формулами

$$a'_{ij} = \begin{cases} \dfrac{a_{ij} \cdot a_{rk} - a_{rj} \cdot a_{ik}}{a_{rk}}, & \text{при } i \neq r, \\ a_{rj} / a_{rk}, & \text{при } i = r, \end{cases}$$

3. Алгоритм симплекс-методу.

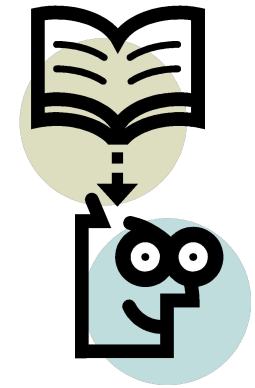


3) елементи (m+1)-го рядка таблиці можна обчислити або за формулами

$$f_0' = \frac{f_0 \cdot a_{rk} - b_r \cdot \Delta_k}{a_{rk}}, \quad \Delta_j' = \frac{\Delta_j \cdot a_{rk} - a_{rj} \cdot \Delta_k}{a_{rk}},$$

або на основі їх означення.

Всі знайдені числа записати в нову симплекс-таблицю.

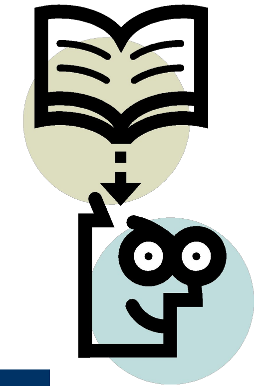


3. Алгоритм симплекс-методу.

6. Перевірити знайдений опорний план на оптимальність. Якщо план не є оптимальним і необхідно перейти до нового опорного плану, то повернутися до кроку 4, а у випадку отримання оптимального плану або встановлення нерозв'язності процес розв'язування задачі припинити.

Ця схема може бути застосована до будь-якої канонічної задачі лінійного програмування, для якої відомий початковий опорний невироджений план, якому відповідає система одиничних базисних векторів P_j **.**

3. Алгоритм симплекс-методу.

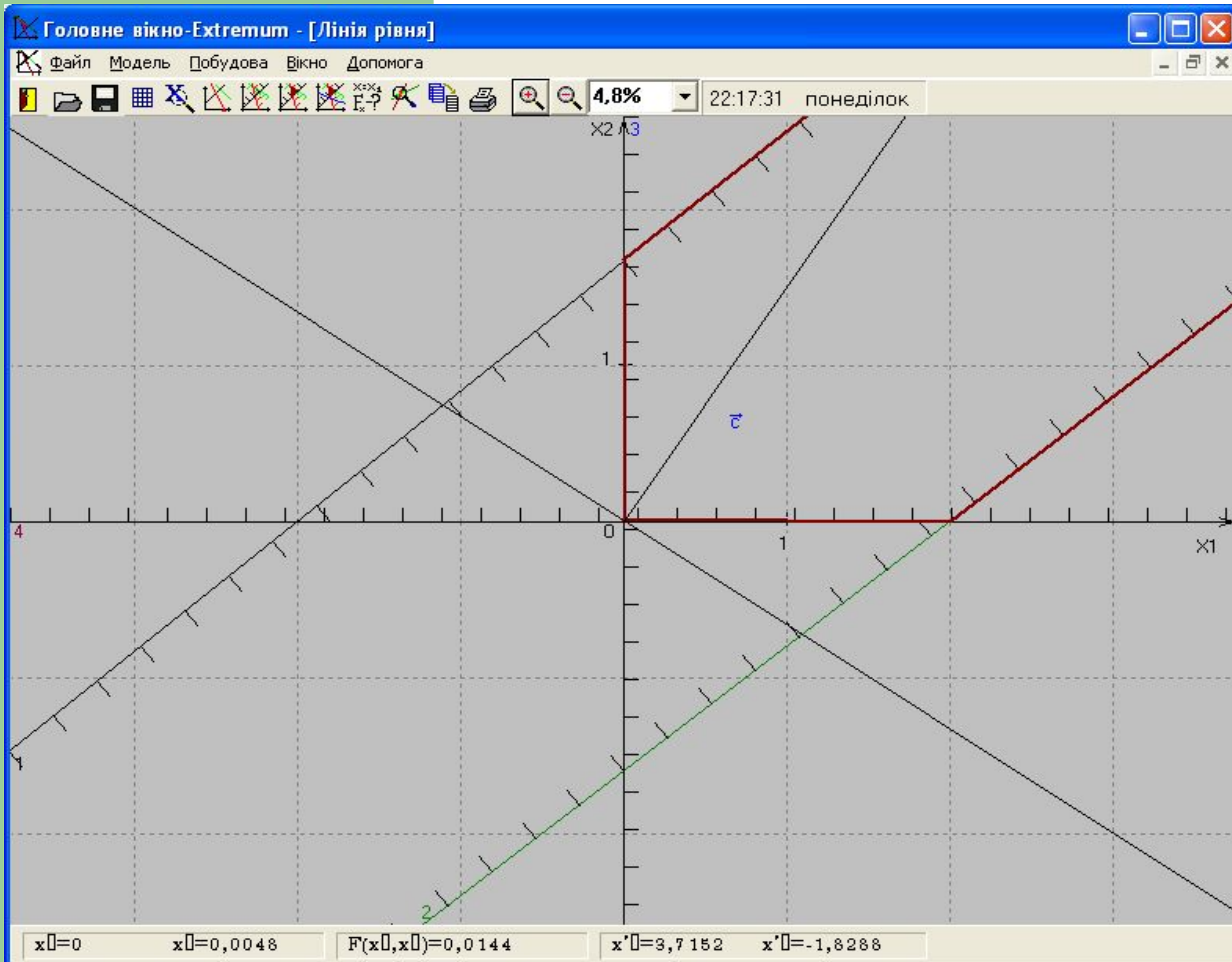


Приклад 2. Розв'язати задачу ЛП геометричним методом і симплекс-методом:

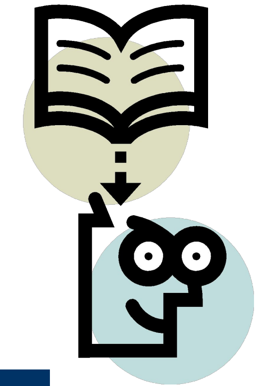
$$f(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2 \to \min(\max),$$

$$\begin{cases} -5x_1 + 6x_2 \le 10, \\ 4x_1 - 5x_2 \le 8, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$


Головне вікно-Extremum - [Лінія рівня]
Файл Модель Побудова Вікно Допомога
4,8%
22:17:31 понеділок
X2
X1
0
1
1
x□=0 x□=0,0048
F(x□,x□)=0,0144
x'□=3,7152 x'□=-1,8288

3. Алгоритм симплекс-методу.



Приклад 2. Побудувати канонічну форму задачі ЛП:

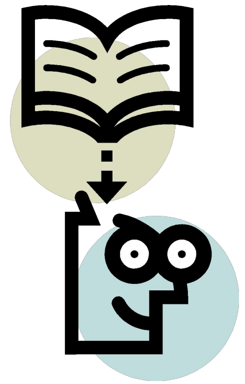
$$f(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 \to \min(\max),$$

$$\begin{cases} -5x_1 + 6x_2 + x_3 = 10, \\ 4x_1 - 5x_2 + x_4 = 8, \end{cases}$$

$\Delta_j \leq 0$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0.$$

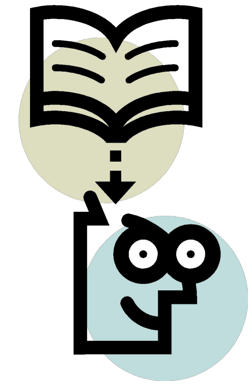
3. Алгоритм симплекс-методу.



Таблиця 1. Початкова симплекс-таблиця

				2	3	0	0
i	**Базис**	**$C_б$**	**P_0**	**P_1**	**P_2**	**P_3**	**P_4**
1	**P_3**	0	10	-5	6	1	0
2	**P_4**	0	8	4	-5	0	1
3		Δ_j	0	-2	-3	0	0

Оскільки всі $\Delta_j \le 0$, то одержано оптимальний план для канонічної задачі мінімізації: X’=(0,0,10,8) і X*=(0,0) для початкової задачі, f(X*)=0.

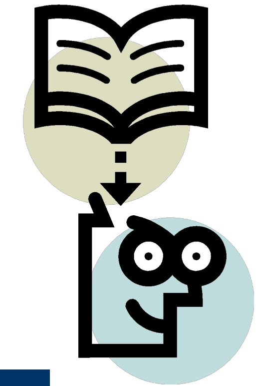


3. Алгоритм симплекс-методу.

Розв'яжемо задачу максимізації. Знайдемо розв'язковий елемент.

Таблиця 1. Початкова симплекс-таблиця							
				2	3	0	0
i	**Базис**	**$C_б$**	**P_0**	**P_1**	**P_2**	**P_3**	**P_4**
1	**P_3**	0	10	-5	6	1	0
2	**P_4**	0	8	4	-5	0	1
3		Δ_j	0	-2	-3	0	0

3. Алгоритм симплекс-методу.

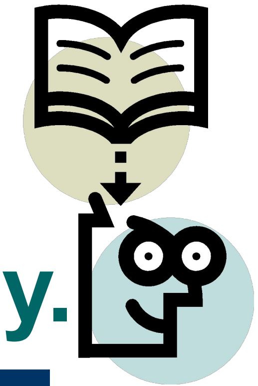


Таблиця 2. Наступна симплекс-таблиця

				2	**3**	**0**	**0**
i	**Базис**	**Сб**	$\mathbf{P_0}$	$\mathbf{P_1}$	$\mathbf{P_2}$	$\mathbf{P_3}$	$\mathbf{P_4}$
1	$\mathbf{P_2}$	3	5/3	-5/6	1	1/6	0
2	$\mathbf{P_4}$	0	49/3	-1/6	0	5/6	1
			5	-9/2	0	1/2	0

Розв’язку задачі максимізації не існує.

3. Алгоритм симплекс-методу.

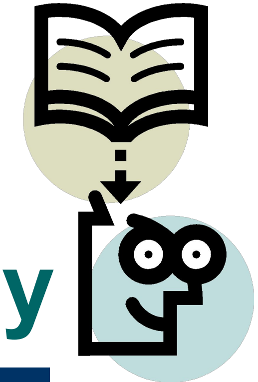


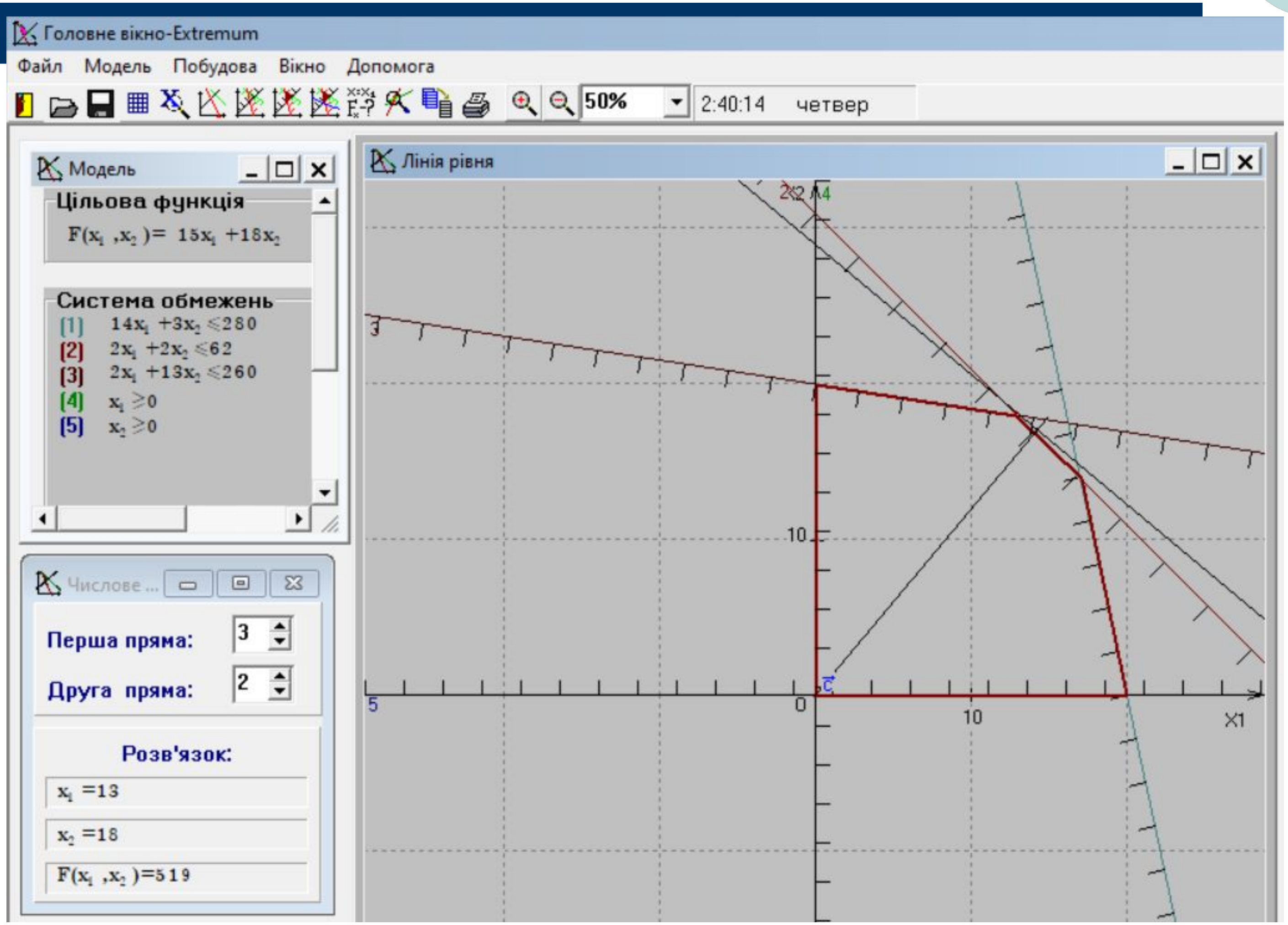
Завдання 1. Розв’язати задачу ЛП симплекс-методом, в якій потрібно знайти максимальний прибуток підприємства від реалізації виготовленої продукції при наявних обмеженнях на ресурси і заданих витратах ресурсів на одиницю кожного виду продукції.

Результати перевірити за допомогою графічного методу і з використанням системи Mathcad.

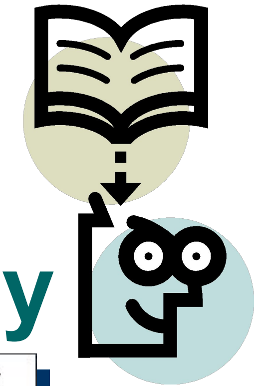
Витрати ресурсів на одиницю продукції (т)						Наявність ресурсів (т)			Прибуток на одиницю продукції (у.о.)	
А1		А2		А3		А1	А2	А3		
П1	П2	П1	П2	П1	П2				П1	П2
14	3	2	2	2	13	280	62	260	15	18

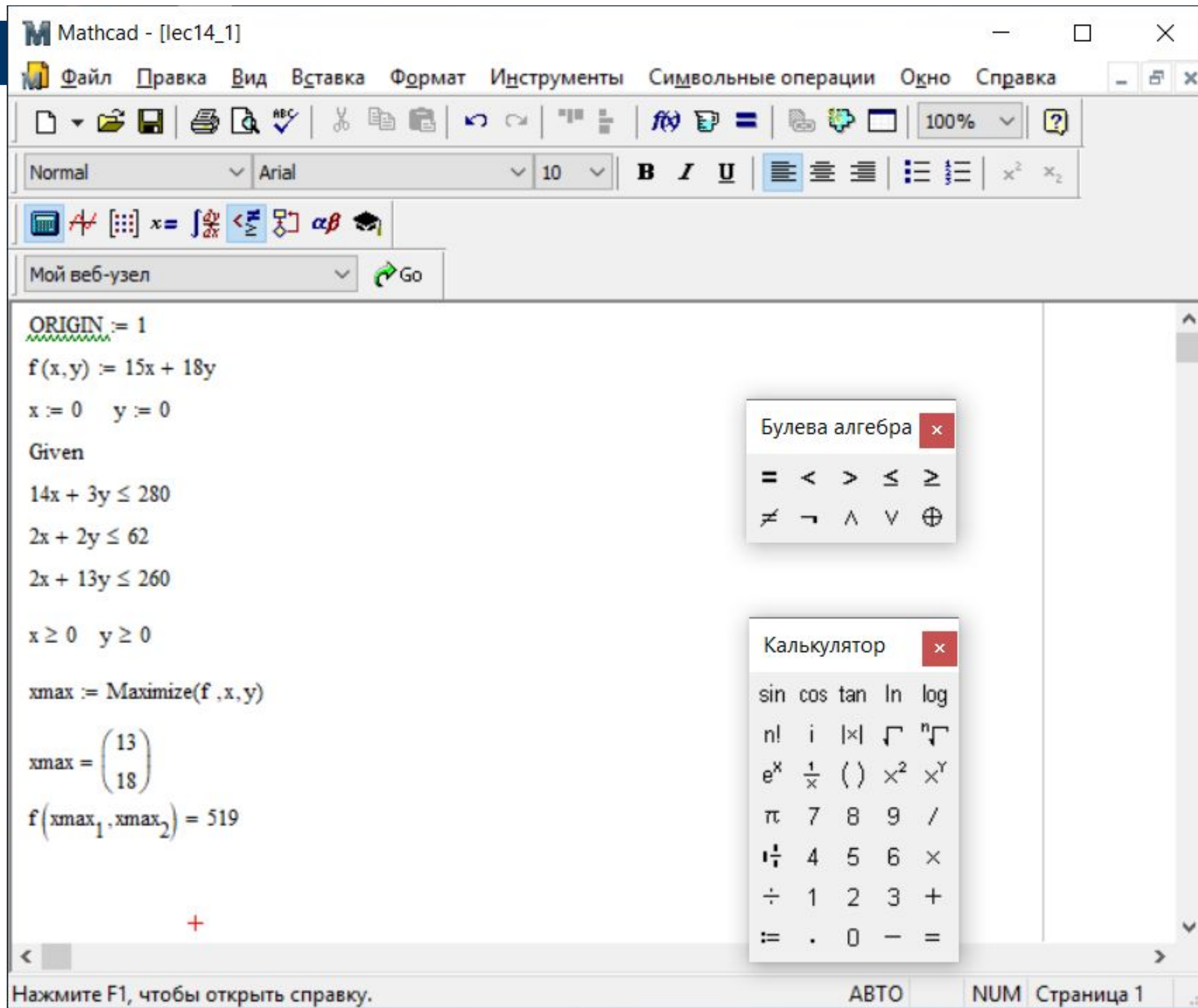
3. Алгоритм симплекс-методу





3. Алгоритм симплекс-методу





Ваші запитання

8(0472) 51-15-84 – кафедра КН та СА

tryus@chdtu.edu.ua

Дякую за увагу!