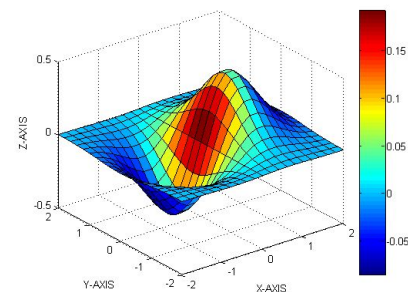
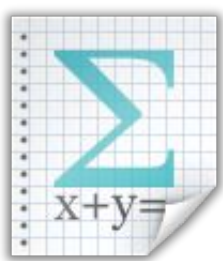




Лекция 4

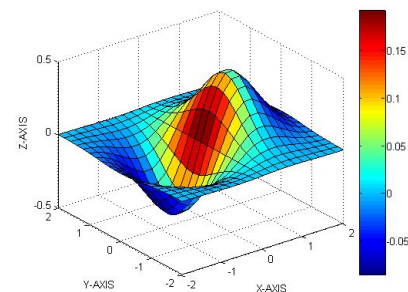
Устойчивость.





Содержание

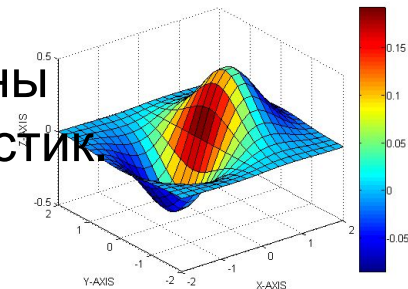
- **Сходимость. Устойчивость. Аппроксимация.**
- **Спектральный признак устойчивости.**
- **Устойчивость в энергетической норме.**
- **Устойчивость неявной схемы.**
- **Алгоритм исследования устойчивости.**





Слагаемые адекватности

- **Обусловленность**
 - Обусловленность модели должна быть не хуже обусловленности исходного объекта.
- **Погрешность**
 - Погрешность метода не должна вносить существенный самостоятельный вклад в результат.
- **Сходимость**
 - Процесс моделирования должен быть ограничен во времени и стремиться к стабилизации характеристик.
- **Устойчивость**
 - Малые возмущения в параметрах модели должны приводить к адекватным изменениям характеристик.

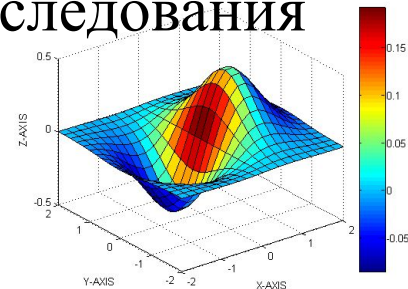




Сходимость

Определение 1. Говорят, что решение u_τ сходится к решению при $\tau \rightarrow 0$, если $\|u_\tau - U_\tau\| \rightarrow 0$, где U_τ — проекция точного решения на разностную сетку; причем, если имеет место оценка $\|u_\tau - U_\tau\| \leq c\tau^p$, $c \neq c(\tau)$, то сходимость имеет порядок p .

Наблюдение: Чтобы исследовать схему на сходимость (напрямую), необходимо знать **точное решение** дифференциальной задачи, а также иметь возможность получить **аналитическое решение разностной**. Так как в большинстве случаев, представляющих интерес, это невозможно, используются косвенные методы исследования схемы на сходимость.



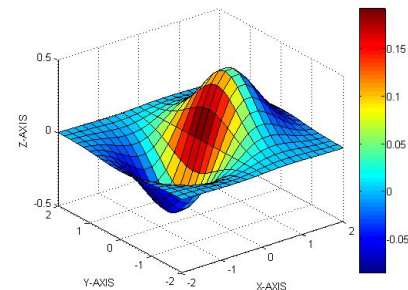


Аппроксимация

Определение 2. Говорят, что разностная задача аппроксимирует дифференциальную на ее решении, если норма невязки, возникающей при действии разностного оператора на сеточную функцию — проекцию на сетку точного решения

$$r_\tau = \mathbf{L}_\tau U_\tau - F_\tau$$

стремится к нулю при $\tau \rightarrow 0$; если выполнена оценка $\|r_\tau\| \leq c_k \tau^p$, $c_k \neq c_1(\tau)$ (константа, входящая в правую часть неравенства, не зависит от сеточных параметров), то имеет место аппроксимация порядка p .





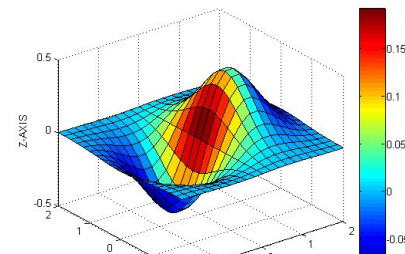
Устойчивость

Определение 3. Говорят, что разностная задача является *устойчивой*, если из соотношений

$$\mathbf{L}_\tau u_\tau - F_\tau = \xi_\tau, \mathbf{L}_\tau v_\tau - F_\tau = \eta_\tau,$$

следует в смысле выбранной нормы

$\|u_\tau - v_\tau\| \leq c_2(\|\xi_\tau\| + \|\eta_\tau\|)$, причем эта оценка равномерная, $c_2 \neq c_2(\tau)$.

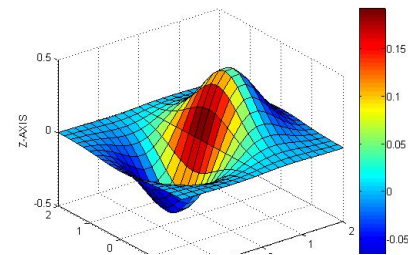


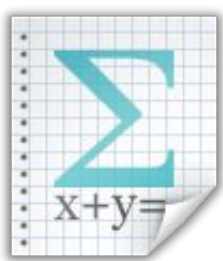


Устойчивость

Определение 4. Линейная разностная задача устойчива, если при любой правой части F_τ она имеет единственное решение u_τ , причем $\|u_\tau\| \leq C \|F_\tau\|$, и данная оценка равномерна по сеточным параметрам $C \neq C(\tau)$.

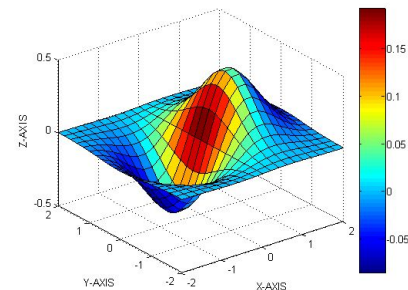
Теорема (П. Лакса–В. С. Рябенского). *Решение линейной разностной задачи сходится к решению дифференциальной, если разностная задача устойчива и аппроксимирует дифференциальную задачу на ее решении. При этом порядок аппроксимации совпадает с порядком сходимости.*





Содержание

- Сходимость. Устойчивость. Аппроксимация.
- **Спектральный признак устойчивости.**
- Устойчивость в энергетической норме.
- Устойчивость неявной схемы.
- Алгоритм исследования устойчивости.



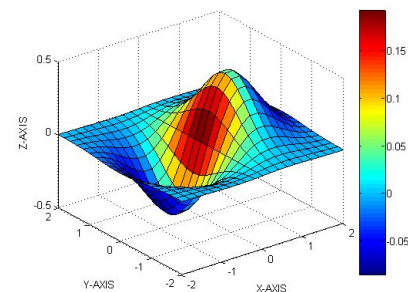


Каноническая форма

- Каноническая форма двухслойной разностной схемы

$$\mathbf{B} \frac{\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n}{\tau} + \mathbf{A} \mathbf{u}_n = \mathbf{f}_n$$

- \mathbf{B} и \mathbf{A} – операторы, действующие в Ω_x
- Выполняется условие $(\mathbf{A} \mathbf{u}, \mathbf{u}) > \mu(\mathbf{u}, \mathbf{u})$
- Явная схема $\mathbf{B} = \mathbf{E}$





Пример разностной схемы

- Разностная схема для уравнения теплопроводности

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = \xi \Lambda_{xx} u_m^{n+1} + (1 - \xi) \Lambda_{xx} u_m^n, \xi \in [0, 1]$$

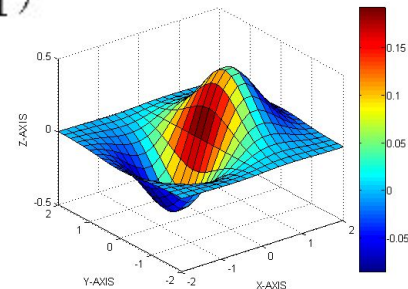
$$\Lambda_{xx} u_m^{n+1} = \frac{u_{m-1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m+1}^{n+1}}{h^2} \quad \Lambda_{xx} u_m^n = \frac{u_{m-1}^n - 2u_m^n + u_{m+1}^n}{h^2}$$

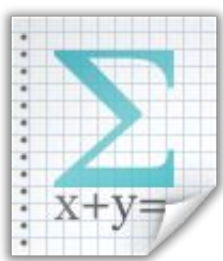
$$n = 0, \dots, N - 1 \quad m = 0, \dots, M - 1$$

$\xi = 0,5$ – схема Кранка-Николсона

$$\mathbf{A} \mathbf{u}_n = -\Lambda_{xx} u_m^n \quad \mathbf{u}_n = (u_1^n, u_2^n, \dots, u_{M-1}^n)^T$$

$$\mathbf{B} \frac{\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n}{\tau} + \mathbf{A} \mathbf{u}_n = 0 \quad \mathbf{B} = \mathbf{E} + \tau \xi \mathbf{A}$$





Некоторые определения

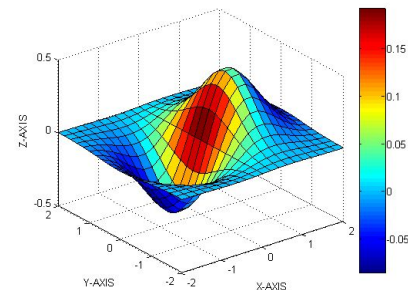
- Энергия оператора $(\mathbf{A}\mathbf{u}, \mathbf{u})$
- Норма вектора $\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{A}} = (\mathbf{A}\mathbf{u}, \mathbf{u})^{1/2}$

Определение 6. Разностная схема (11.1) устойчива по начальным данным, если для решения (11.1) выполняется оценка:

$$\|\mathbf{u}^{n+1}\| \leq M_1 \|\varphi\|, \forall t^n \in \omega^t \text{ — узлы сетки по } t,$$

причем константа M_1 не зависит от сеточных параметров.

$$\mathbf{B} \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\tau} = -\mathbf{A}\mathbf{u}^n + \mathbf{f}(x_m, t^n)$$





Некоторые определения

Определение 7. Говорят, что разностная схема (11.4) устойчива по правой части, если для решения (11.4) в любой момент времени выполняется условие

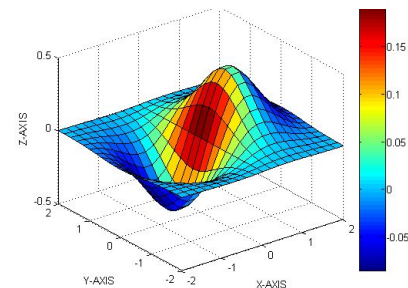
$$\|\mathbf{u}^{n+1}\| \leq M_2 \|\mathbf{f}\|,$$

причем константа M_2 не зависит от сеточных параметров.

Определение 8. Разностная схема (11.1) равномерно устойчива по начальным данным в энергетической норме, порождаемой некоторым оператором $\mathbf{R} = \mathbf{R}^* > 0$, если $\exists \rho > 0$: $\forall t^n$ выполнено:

$$\|\mathbf{u}_{n+1}\|_{\mathbf{R}} \leq \rho \|\mathbf{u}_n\|_{\mathbf{R}}$$

и при этом $\rho^n \leq M_1$, ρ и M_1 не зависят от сеточных параметров.





Некоторые определения

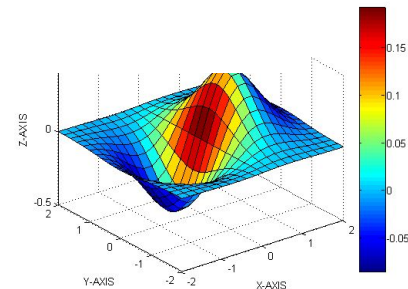
Представим разностную схему в канонической форме в виде

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{R}_\tau \mathbf{u}_n + \tau \mathbf{B}^{-1} \mathbf{f}_n$$

$$n = 0, \dots, N - 1 \quad \mathbf{R}_\tau = \mathbf{R}_\tau(t_n)$$

$\mathbf{R}_\tau = \mathbf{E} - \tau \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}$ - оператор послойного перехода разностной схемы

Нетрудно заметить, что условие равномерной устойчивости по начальным данным эквивалентно ограничению нормы оператора \mathbf{R}_τ : $\|\mathbf{R}_\tau\| \leq \rho$, а в силу условия $\rho^n \leq C$ и ограниченности норм степеней оператора \mathbf{R} : $\|\mathbf{R}_\tau^n\| \leq C$.

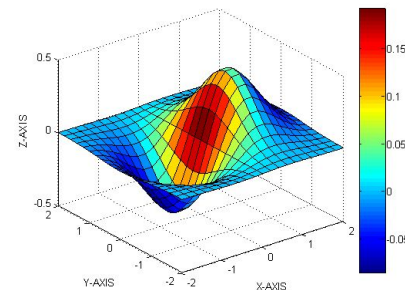


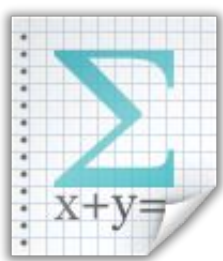


Спектральный признак устойчивости

Если λ — собственное значение, а ω — соответствующий ему собственный вектор, то $\mathbf{R}_\tau \omega = \lambda \omega$. Поэтому $\mathbf{R}_\tau^n \omega = \lambda^n \omega$, откуда $\|\mathbf{R}_\tau^n\| \geq |\lambda|^n$, так как $\|\mathbf{R}_\tau^n \omega\| = |\lambda|^n \|\omega\| \leq \|\mathbf{R}_\tau^n\| \|\omega\|$.

Последнее неравенство должно выполняться при любом n . Оно невыполнимо, если $|\lambda|^n$ с увеличением n будет неограниченно расти, так как $\|\mathbf{R}_\tau^n\| \leq C$. Этого не произойдет, если на λ будет наложено условие $|\lambda| \leq 1 + c\tau$, константа c не зависит от сеточных параметров, $c = O(1)$, $\tau \ll 1$. Последнее условие называется необходимым *спектральным признаком* устойчивости (признак фон Неймана).





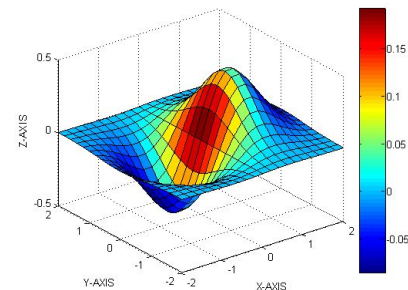
Спектральный признак устойчивости

Разностная задача Коши для линейного уравнения переноса

$$\mathbf{L}_\tau u_\tau = F_\tau$$

$$\mathbf{L}_\tau u_\tau = \begin{cases} \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} - \frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h}, & n = 0, \dots, N-1, m = 0, \dots, M-1, \\ u_m^0, & m = 0, \dots, M-1, \end{cases}$$

$$F_\tau = \begin{cases} f_n^m, & n = 0, \dots, N, m = 0, \dots, M-1, \\ \varphi_m, & n = 0, m = 0, \dots, M, \end{cases}$$





Спектральный признак устойчивости

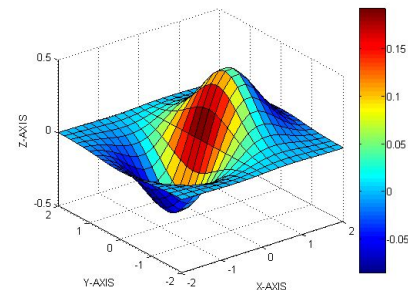
Условие устойчивости

$$\|u_\tau\| \leq C \|F_\tau\| \quad \text{или} \quad \max_m |u_m^n| \leq C \max_m |u_m^0|$$

Возьмем в качестве начального условия гармонику

$$u_m^0 = e^{i\alpha m} \quad \alpha \text{ — вещественный параметр.}$$

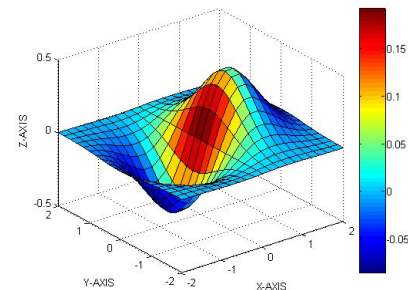
Решение однородной разностной задачи в этом случае ищется с помощью метода разделения переменных. На каждом временном слое решение разностной задачи ищется как произведение $u_m^n = \lambda^n e^{i\alpha m}$.

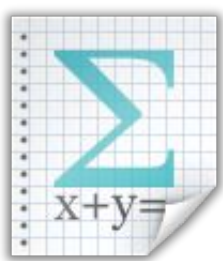




Спектральный признак устойчивости

Спектр оператора послойного перехода $\lambda(\alpha)$ легко ищется подстановкой в разностное уравнение. Например, для однородного уравнения переноса с постоянными коэффициентами после преобразований $u_m^{n+1} = (1 - \sigma)u_m^n + \sigma u_{m+1}^n$, где $\sigma = \tau/h = \text{const}$ — безразмерный параметр — число Куранта (в числитель дроби входит скорость переноса, которая в рассматриваемой задаче равна единице). Для спектра оператора перехода имеем $\lambda(\alpha) = (1 - \sigma) + \sigma e^{i\alpha}$.

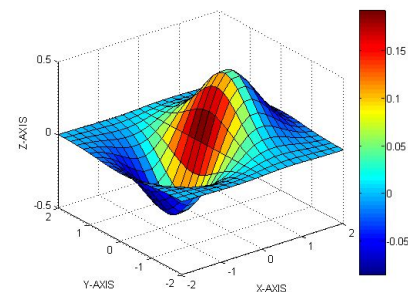


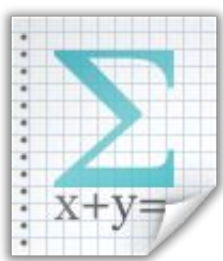


Спектральный признак устойчивости

Для решения вида $u_m^n = \lambda^n e^{i\alpha m}$ справедливо $\|u_m^n\| = \|\lambda^n e^{i\alpha m}\| = \|\lambda^n \cdot u_m^0\| \leq |\lambda^n| \cdot \|u_m^0\|$, или $\max_m |u_m^n| = |\lambda^n| \cdot \max_m |u_m^0|$, поэтому для выполнения условия устойчивости $\max_m |u_m^n| \leq C \cdot \max_m |u_m^0|$ необходимо выполнение неравенства $|\lambda(\alpha)|^n \leq 1 + C\tau$.

Спектральный признак устойчивости для рассмотренной задачи: спектр оператора перехода должен лежать в круге радиуса $1 + C\tau$ на комплексной плоскости.





Задача

Исследовать устойчивость разностной схемы

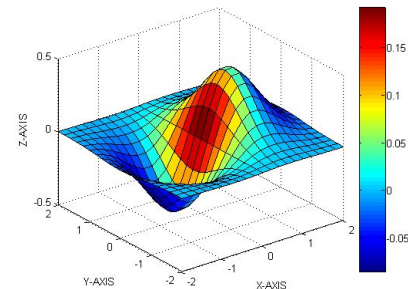
$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} - \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} - \frac{\tau}{2h^2} (u_{m-1}^n - 2u_m^n + u_{m+1}^n) = f_m^n,$$

$$n = 0, \dots, N - 1, \quad m = 1, \dots, M - 1,$$

аппроксимирующей задачу Коши для уравнения переноса.

Подсказка: подставляем решение в виде

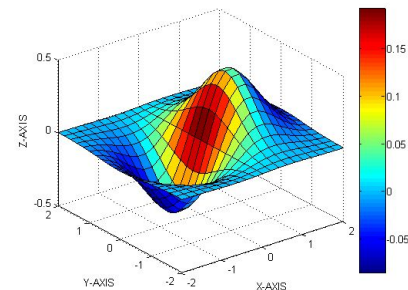
$$u_m^n = \lambda^n e^{im\alpha}$$





Содержание

- Сходимость. Устойчивость. Аппроксимация.
- Спектральный признак устойчивости.
- **Устойчивость в энергетической норме.**
- Устойчивость неявной схемы.
- Алгоритм исследования устойчивости.





УСТОЙЧИВОСТЬ

Теорема 3. *Для задачи Коши*

$$\mathbf{B} \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\tau} = -\mathbf{A}\mathbf{u}^n; \mathbf{u}^0 = \varphi \quad (11.6)$$

условие $\mathbf{B} \geq \frac{\tau}{2} \mathbf{A}$ необходимо и достаточно для устойчивости в энергетической норме, порождаемой \mathbf{A} , т. е.

$$\|\mathbf{u}^{n+1}\|_{\mathbf{A}} \leq \|\mathbf{u}^0\|_{\mathbf{A}}.$$

Неравенство в последней теореме имеет смысл операторного неравенства, т. е. для любого ненулевого вектора выполнено $(\mathbf{B}\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq \frac{\tau}{2}(\mathbf{A}\mathbf{u}, \mathbf{u})$.

Теорема 4. *Пусть \mathbf{A}, \mathbf{B} — постоянные самосопряженные положительные операторы. Тогда условие $\mathbf{B} \geq \frac{\tau}{2} \mathbf{A}$ необходимо и достаточно для устойчивости по начальным данным в энергетической норме, порождаемой оператором \mathbf{B} :*

$$\|\mathbf{u}^{n+1}\|_{\mathbf{B}} \leq \|\varphi\|_{\mathbf{B}}.$$

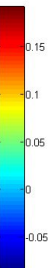




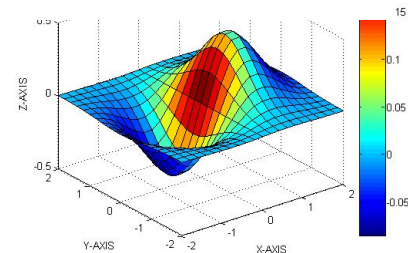
Схема Кранка-Николсона

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\tau} = -\frac{1}{2} \mathbf{A}\mathbf{u}^n - \frac{1}{2} \mathbf{A}\mathbf{u}^{n+1}$$

$$\left(\mathbf{E} + \frac{\tau}{2} \mathbf{A} \right) \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\tau} = -\mathbf{A}\mathbf{u}^n$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{E} + \frac{\tau}{2} \mathbf{A} \geq \frac{\tau}{2} \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{E} > 0$$

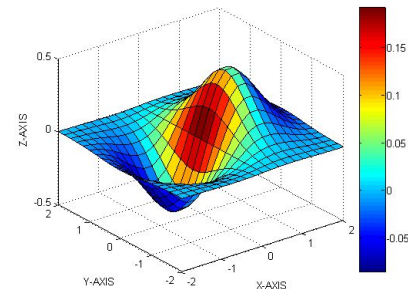
Тогда, в энергетической норме, порождаемой оператором \mathbf{A} , схема Кранка-Николсон безусловно устойчива.

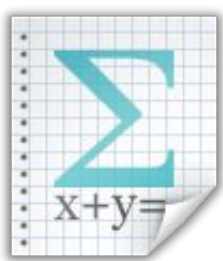




Содержание

- Сходимость. Устойчивость. Аппроксимация.
- Спектральный признак устойчивости.
- Устойчивость в энергетической норме.
- **Устойчивость неявной схемы.**
- Алгоритм исследования устойчивости.





Неявная схема

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\tau} + \mathbf{A}(\sigma \mathbf{u}^{n+1} + (1 - \sigma) \mathbf{u}^n) = 0$$

$$\mathbf{A}^{-1} \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\tau} + \sigma \mathbf{u}^{n+1} + (1 - \sigma) \mathbf{u}^n = 0$$

$$(\mathbf{A}^{-1} + \sigma \tau \mathbf{E}) \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\tau} + \mathbf{u}^n = 0.$$

Условие устойчивости: $(\mathbf{A}^{-1} + \sigma \tau \mathbf{E}) \geq \frac{\tau}{2} \mathbf{E}$

$$\mathbf{A}^{-1} + \left(\sigma - \frac{1}{2}\right) \tau \mathbf{E} \geq 0$$

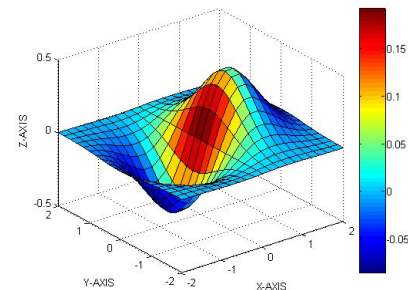
$$\mathbf{E} + (\sigma - 1/2) \tau \mathbf{A} \geq 0$$

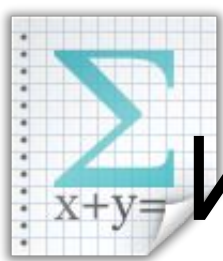
Следствие. Неявная схема ($\sigma = 1$) безусловно устойчива в норме $\|\cdot\| = (\cdot, \cdot)^{1/2}$ (аналог нормы L^2).



Содержание

- Сходимость. Устойчивость. Аппроксимация.
- Спектральный признак устойчивости.
- Устойчивость в энергетической норме.
- Устойчивость неявной схемы.
- **Алгоритм исследования устойчивости.**

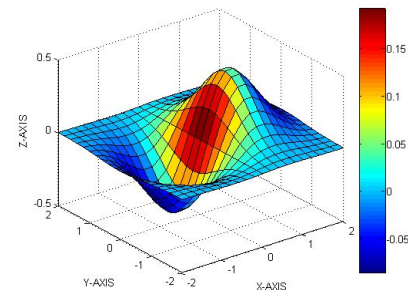




Исследование устойчивости

Порядок исследования устойчивости двухслойных разностных схем

1. Приводим схему к каноническому виду.
2. Исследуем свойства оператора A . Если он является положительным, самосопряженным и независящим от n , проверяется условие $B \geq 0,5\tau A$.





Исследование устойчивости

Теорема. Для разностной схемы вида

$$\mathbf{B} \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\tau} + \mathbf{A} \mathbf{u}^n = \varphi^n,$$

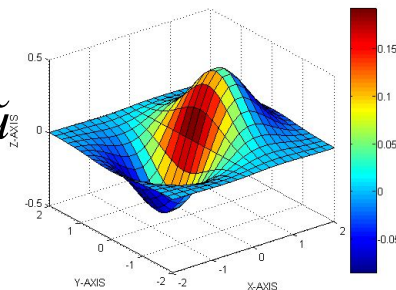
где \mathbf{A} — постоянный (т.е. не зависящий явно от n) положительно определенный самосопряженный оператор, а \mathbf{B} удовлетворяет условию

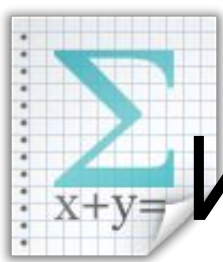
$$\mathbf{B} \geq \frac{1 + \varepsilon}{2} \tau \mathbf{A},$$

где $\varepsilon > 0$ не зависит от сеточных параметров, выполнена априорная оценка

$$\|\mathbf{u}^{n+1}\|_{\mathbf{A}}^2 \leq \|\mathbf{u}^0\|_{\mathbf{A}}^2 + \frac{1 + \varepsilon}{2\varepsilon} \tau \sum_{k=0}^n \|\varphi^k\|_{\mathbf{B}^{-1}}^2$$

т.е. из равномерной устойчивости однородной разностной схемы следует устойчивость по начальным данным.





Исследование устойчивости

Теорема. Разностная схема

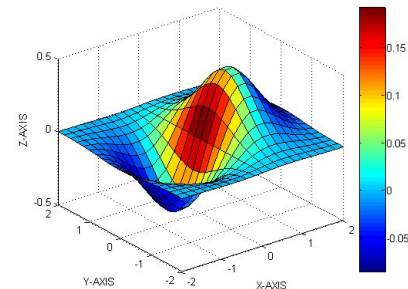
$$\mathbf{B} \frac{\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n}{\tau} + \mathbf{A} \mathbf{u}_n = 0$$

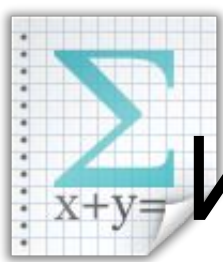
равномерно устойчива по начальным данным, если

$$(\sigma - 0,5)\tau \|\mathbf{A} \mathbf{u}\|^2 + (\mathbf{A} \mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq 0,$$

причем для ее решения справедлива оценка

$$\|\mathbf{u}_{n+1}\| \leq \|\mathbf{u}_n\|, \quad n = 0, \dots, N - 1.$$





Исследование устойчивости

- Сходимость = устойчивость + аппроксимация (теорема Лакса-Рябенского).
- Условие Куранта-Фридрихса-Леви (об областях влияния).
- Спектральный признак устойчивости (исследование спектра оператора перехода).
- Теоремы об устойчивости в энергетической норме.
- Равномерная устойчивость \Rightarrow устойчивость по начальным данным.

