Сегодня: *

Лекция 27

Тема: Вынужденные колебания

Содержание лекции:

27.1. Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний (механических и электромагнитных) и его решение

27.2. Амплитуда и фаза вынужденных колебаний (механических и электромагнитных). Резонанс;

27.3. Переменный ток;

27.4. Резонанс токов;

27.5. Резонанс напряжений;

27.6. Мощность, выделяемая в цепи переменного тока.

Чтобы в реальной колебательной системе получить незатухающие колебания, надо компенсировать потери энергии. Такая компенсация возможна с помощью какого-либо периодически действующего фактора *X(t)*, изменяющегося по гармоническому закону: $X(t) = X_o \cos \omega t$.

Если рассматривать механические колебания, то роль *X(t)* играет внешняя вынуждающая сила

$$F = F_0 \cos \omega t. \qquad (27.1)$$

С учетом силы (27.1) закон движения для пружинного маятника запишется в виде

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} + F_0 \cos \omega t,$$

r - коэффициент сопротивления, $\dot{x}$ - скорость движения.

kx - возвращающая сила, $r\dot{x}$ - сила трения.

Используя $r/2m = \beta$ $k/m = \omega_0^2$, придем к уравнению

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0 x = (F_0/m)\cos\omega t \quad (27.2)$$

Если рассматривать электрический колебательный контур, то роль *X(t)* играет подводимая к контуру внешняя периодически изменяющаяся по гармоническому закону э. д. с. или переменное напряжение

$$U = U_m \cos \omega t. \quad (27.3)$$

Тогда уравнение (27.2) с учетом (27.3) можно записать в виде

$$\ddot{Q} + \frac{R}{L}\dot{Q} + \frac{1}{LC}Q = \frac{U_m}{L}\cos\omega t.$$

Используя $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ и $\beta = R/2L$, придем к уравнению

$$\ddot{Q} + 2\beta\dot{Q} + \omega_0^2 Q = \frac{U_m}{L}\cos\omega t. \quad (27.4)$$

Колебания, возникающие под действием внешней периодически изменяющейся силы или внешней периодически изменяющейся э. д. с, называются соответственно *вынужденными механическими* или *электромагнитными колебаниями*.

Уравнения (27.2) и (27.4) можно свести к линейному неоднородному дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2s}{dt^2} + 2\beta\frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = x_0\cos\omega t \qquad (27.5)$$

применяя впоследствии его решение для вынужденных колебаний конкретной физической природы (x_0 в случае механических колебаний равно F_0/m, в случае электромагнитных - U_m/L).

Решение уравнения (27.5) равно сумме общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения. Частное решение найдем в комплексной форме. Заменим правую часть уравнения (27.5) на комплексную величину $x_0e^{i\omega t}$:

$$\ddot{s} + 2\beta\dot{s} + \omega_0^2 s = x_0 e^{i\omega t} \qquad (27.6)$$

Частное решение этого уравнения будем искать в виде $s = s_0 e^{i\eta t}$.
Подставляя выражения для s и его производных $\dot{s} = i\eta s_0 e^{i\eta t}, \ddot{s} = -\eta^2 e^{i\eta t}$ в уравнение (27.6), получим

$$s_0 e^{i\eta t}(-\eta^2 + 2i\beta\eta + \omega_0^2) = x_0 e^{i\eta t} \qquad (27.7)$$

Так как это равенство должно быть справедливым для всех моментов времени, то время t из него должно исключаться. Отсюда следует, что η = ω. Учитывая это, из уравнения (27.7) найдем величину s_0 и умножим ее числитель и знаменатель на $(\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\beta\omega)$:

$$s_0 = \frac{x_0}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2i\beta\omega} = x_0 \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) - 2i\beta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}$$

Это комплексное число удобно представить в экспоненциальной форме:

$$s_0 = Ae^{i\varphi} \qquad ,$$

где

$$A = \frac{x_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \qquad (27.8)$$

и

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \qquad (27.9)$$

Следовательно, решение уравнения (27.6) в комплексной форме примет вид

$$s_0 = Ae^{i(\omega t - \varphi)}.$$

Его вещественная часть, являющаяся решением уравнения (27.5), равна

$$s = A\cos(\omega t - \varphi), \qquad (27.10)$$

где A и φ задаются соответственно формулами (27.8) и (27.9).

Таким образом, частное решение неоднородного уравнения (27.5):

$$s = \frac{x_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \cos\left(\omega t - arctg\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right). \qquad (27.11)$$

Решение уравнения (27.7) равно сумме общего решения однородного уравнения

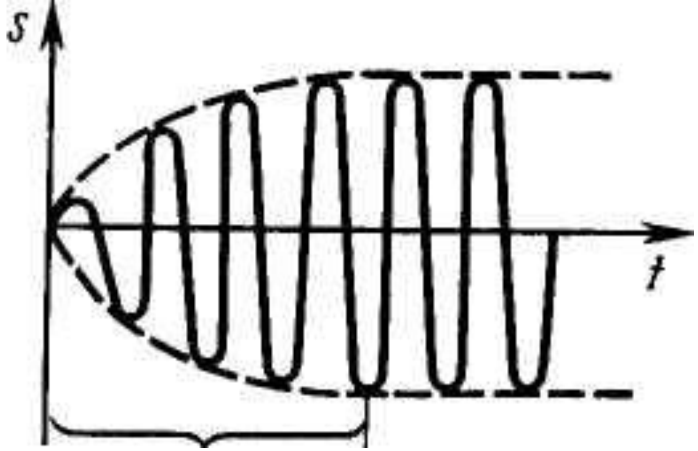

Рис. 27.1

$$s_0 = Ae^{-\beta t}\cos(\omega_1 t + \varphi_1) \quad (27.12)$$

Установление колебаний

и частного решения (27.11). Слагаемое (27.12) играет существенную роль только в начальной стадии процесса (при установлении колебаний) до тех пор, пока амплитуда вынужденных колебаний не достигнет значения, определяемого равенством (27.8). Графически вынужденные колебания представлены на рис. 27.1. Следовательно, в установившемся режиме вынужденные колебания происходят с частотой ω и являются гармоническими, амплитуда и фаза колебаний, определяемые выражениями (27.8) и (27.9), также зависят от ω.

Запишем формулы (27.10), (27.8) и (27.9) для электромагнитных колебаний, учитывая, что $\omega_0^2 = 1/(LC)$ и $\beta = R/(2L)$:

$$Q_m = \frac{U_m}{\omega\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}; \qquad \mathrm{tg}\alpha = \frac{R}{1/\omega C - \omega L} \tag{27.13}$$

Продифференцировав $Q = Q_m \cos(\omega t - \alpha)$ по t, найдем силу тока в контуре при установившихся колебаниях:

$$I = -\omega Q_m \sin(\omega t - \alpha) = I_m \cos(\omega t) - \alpha + \pi/2) \tag{27.14}$$

где

$$I_m = \omega Q_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}. \tag{27.15}$$

Выражение (27.14) может быть записано в виде

$$I = I_m \cos(\omega t - \varphi),$$

где φ = α - π/2 — сдвиг по фазе между током и приложенным напряжением (см. (27.3)). В соответствии с выражением (27.13)

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R} \qquad (27.16)$$

Из формулы (27.16) вытекает, что ток отстает по фазе от напряжения ($\varphi > 0$), если $\omega L > 1/(\omega C)$, и опережает напряжение ($\varphi < 0$), если $\omega L < 1/(\omega C)$.

Формулы (27.15) и (27.16) можно также получить с помощью векторной диаграммы. Это будет сделано ниже для переменных токов.