Новосибирский Государственный Архитектурно-Строительный Университет (Сибстрин)

Лекция №3
Введение в динамику механической системы

Лекции по теоретической механике. Динамика

Кафедра теоретической механики

План лекции

- Введение
- Понятие механической системы
- Силы взаимодействия механической системы и свойства внутренних сил
- Масса системы, центр масс
- Момент инерции системы относительно оси. Теорема Гюйгенса
- Центробежные моменты инерции

На предыдущих лекциях

- Изучали движение одной материальной точки при действии на неё сил.
- Движение точки полностью характеризуется:
  - Массой;
  - Координатами;
  - Скоростью в выбранной системе отсчёта.

Цель лекции

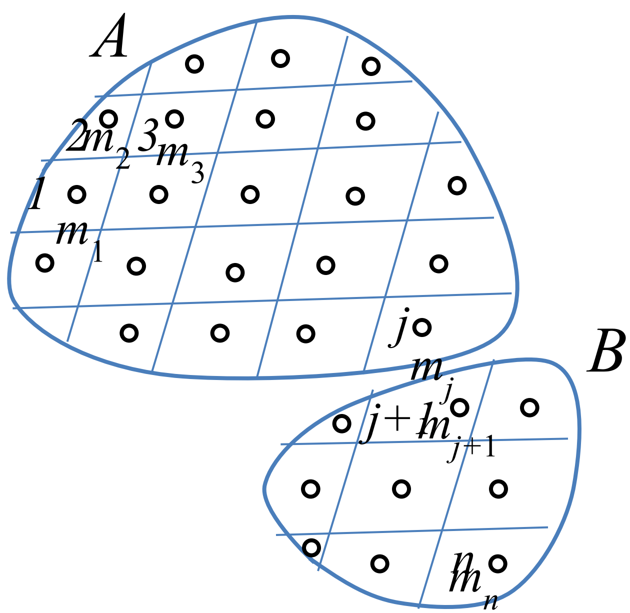
Ознакомление с параметрами системы материальных точек

Механическая система

<u>Определение:</u> *Совокупность материальных точек или тел, движение (или равновесие) которых рассматривается.*

Любое твёрдое тело или систему твёрдых тел можно свести к системе материальных точек.

Сведение твёрдых тел к системе материальных точек



1. Имеем систему из двух твёрдых тел: *A* и *B*.
2. Разобьём её на *n* частей: *1, 2, 3,…, j, j+1,…, n.*
3. Заменим каждую из частей системы на материальную точку с массой, равной массе этого элемента.
4. Получим систему из *n* материальных точек: m_1, m_2, m_3,…, m_n.

МЕХАНИЧЕСКАЯ СИСТЕМА

Силы взаимодействия

Если между точками (телами) механической системы действуют силы взаимодействия, то она обладает таким свойством, что положение или движение каждой точки (тела) зависит от положения и движения всех остальных.

Классический пример – Солнечная система, в которой все тела связаны силами взаимного притяжения.

Внешние и внутренние силы

Действующие на систему силы

Внешние

Силы, действующие на точки системы со стороны точек или тел, не входящих в состав данной системы.

Внутренние

Силы, с которыми точки или тела данной системы действуют друг на друга.

<u>**Обозначение**:</u> надстрочный индекс

e *(от латинского <u>exterior</u>)*

i *(от латинского <u>interior</u>)*

<u>**В Солнечной системе:**</u>

Силы, с которыми звёзды действуют на планеты

Силы взаимодействия между планетами

Свойства внутренних сил

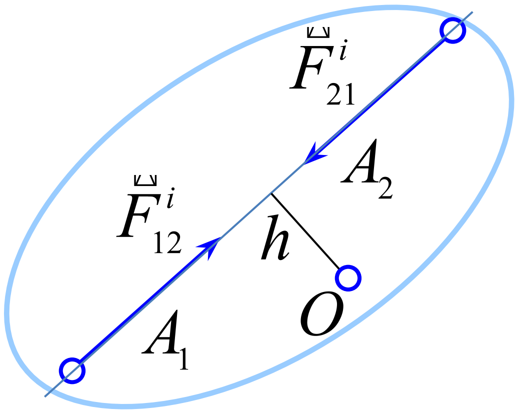
1. *Главный вектор внутренних сил системы равен нулю:*

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k = 0$$

2. *Главный момент внутренних сил системы относительно любого центра равен нулю:*

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{M}_O(\vec{F}_k) = 0$$

Доказательство



1) Действительно, если рассмотреть любую пару точек системы, то по III закону динамики они действуют друг на друга с равными по модулю и противоположно направленными силами, сумма которых равна нулю.

Это справедливо для всех пар внутренних точек, что доказывает **I свойство**.

2) Аналогично можно показать, что для любой пары точек сумма моментов сил их взаимодействия относительно произвольного центра *O* равна нулю, следовательно, доказано и **II свойство**.

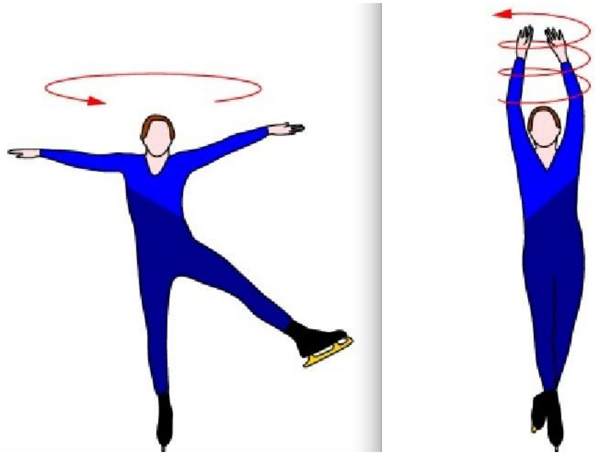
Масса системы. Центр масс

Масса материальной точки *полностью характеризует меру инерции точки.* Поэтому, вследствие II закона динамики, движение точки заданной массы полностью определяется силами, действующими на точку, и её начальными условиями.

В случае механической системы, состоящей из ***N*** *точек,* ***масса системы M*** *уже не определяет полностью* ***меру инерции системы.***

Масса системы. Центр масс

Так, вращение фигуриста будет происходить с разной угловой скоростью в зависимости о того, прижаты или расставлены у него руки.



Движение механической системы зависит ещё и от распределения масс, определяемое координатами её отдельных точек. Поэтому, наряду с ***массой системы****, ещё вводят понятия* ***центра масс*** *и* ***момента инерции относительно оси.***

Масса системы. Центр масс

Масса системы равна арифметической сумме масс всех точек или тел, образующих систему:

$$M = \sum_{k=1}^{n} m_k$$

<u>Центр масс системы</u> – геометрическая точка С, координаты которой определяются формулами:

$$x_C = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{n} m_k x_k \qquad y_C = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{n} m_k y_k \qquad z_C = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{n} m_k z_k$$

В векторном виде положение центра тяжести определяется формулой: $\vec{r}_C = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{n} m_k \vec{r}_k$

которую можно получить из формулы радиус-вектора центра тяжести, если учесть, что: $p_k = m_k \cdot g; P = M \cdot g$

Момент инерции относительно оси

Момент инерции тела (системы) относительно оси OZ – величина, равная сумме произведений масс всех точек тела (системы) на квадраты их расстояний до этой оси

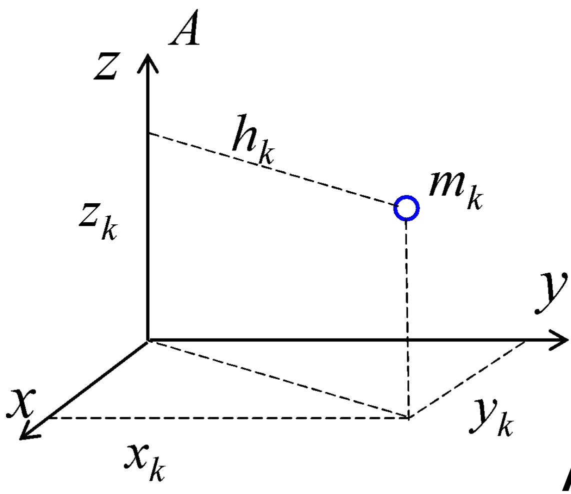
$$J_Z = \sum_{k=1}^{n} m_k h_k^2$$

J_Z *- осевой момент инерции,* h_k *- расстояние от k-ой точки до оси*

Единица измерения момента инерции в СИ – [кг*м^2]

Осевой момент инерции *для вращающегося тела играет ту же роль, что и* ***масса при его поступательном движении****.*

Момент инерции относительно декартовых осей



Момент инерции относительно оси

Oz: $J_Z = \sum_{k=1}^{n} m_k h_k^2$

но $h_k^2 = x_k^2 + y_k^2$, следовательно

$$J_Z = \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k^2 + y_k^2)$$

$$J_Z = M \cdot \rho^2$$

Аналогично моменты инерции относительно осей *Ox* и *Oy*:

$$J_X = \sum_{k=1}^{n} m_k (y_k^2 + z_k^2) \quad J_Y = \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k^2 + z_k^2)$$

Радиус инерции геометрически равен расстоянию от оси той точки, в которой нужно сосредоточить всю массу тела (системы), чтобы момент инерции этой точки был равен моменту инерции всего тела (системы).

МОМЕНТ ИНЕРЦИИ ОТНОСИТЕЛЬНО ОСИ

Момент инерции сплошного тела

В случае сплошного тела, разбивая его на элементарные участки массой Δm_k, в пределе получим:

$$J_Z = \lim_{\Delta m_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} \Delta m_k h_k^2 = \int_{(V)} h^2 dm$$

Где *V* – объём. Учитывая, что $dm=\rho dV$ (ρ - плотность)

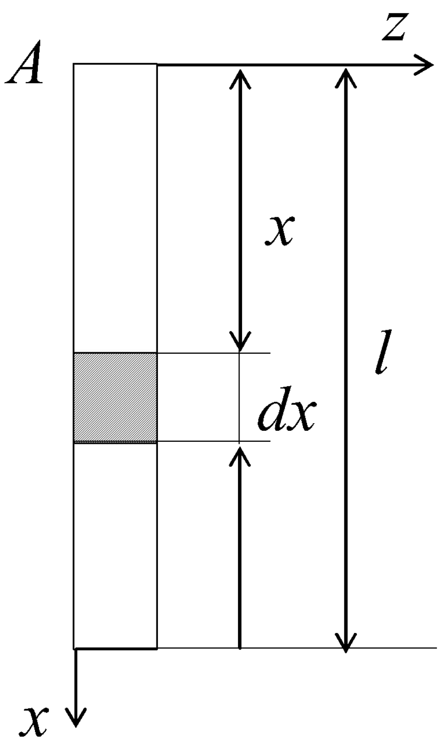
$$J_Z = \int_{(V)} \rho h^2 dV$$

Моменты инерции относительно декартовых осей координат:

$$J_Z = \int_{(V)} \rho (x^2 + y^2) dV \quad J_X = \int_{(V)} \rho (y^2 + z^2) dV \quad J_Z = \int_{(V)} \rho (x^2 + z^2) dV$$

В случае однородных тел плотность ρ будет постоянной и её можно вынести из под знака интеграла.

Момент инерции некоторых однородных тел



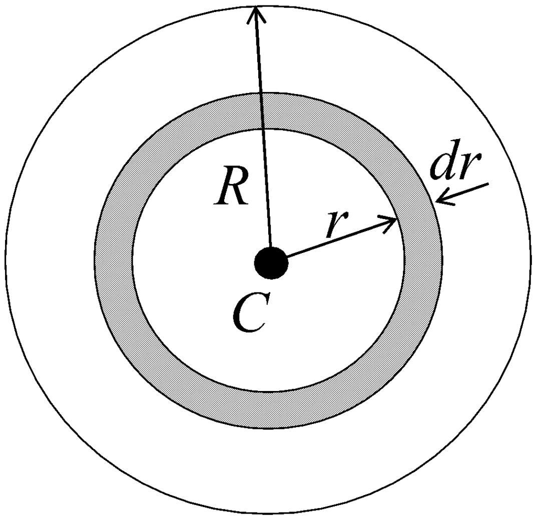
1. **Тонкий однородный стержень *длиной l и массой M.* Вычислим момент инерции отночительно оси *Az,* перпендикулярной стержню и проходящей через его конец *A.***

Направим вдоль стержня ось *Ax.* Для любого элементарного отрезка длины *dx* *h=x*, *dm=ρ*1·*dx*, где *ρ*1 =*M* / *l* – масса единицы длины стержня, а элементарный момент инерции *dJA=x*2·*ρ*1*dx*. Интегрируя, получим

$$J_A = \int\limits_{(l)} h^2 dm = \int\limits_0^l x^2 \cdot \rho_1 dx = \rho_1 \int\limits_0^l x^2 dx = \rho_1 l^3 / 3$$

Заменяя *ρ*1 его значением, найдём $J_A = M\,l^2 / 3$

Момент инерции некоторых однородных тел



2. Цилиндр *радиуса R* и *массой M*. Момент инерции относительно оси *Cz*, перпендикулярной пластине и проходящей через центр С?

Выделим элементарное кольцо радиусом *r* и шириной *dr.*

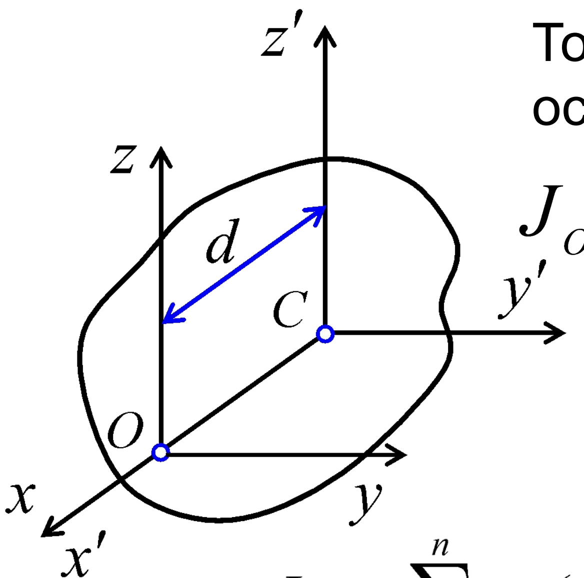
Его площадь $2\pi r \cdot dr$, масса $dm=\rho_2 \cdot 2\pi r \cdot dr$, где $\rho_2 = M/\pi R^2$ – масса единицы площади пластины, а элементарный момент инерции $dJA = r^2 \cdot \rho_2 \cdot 2\pi r \cdot dr$. Интегрируя, получим:

$$J_C = \int_{(S)} h^2 dm = \int_0^l r^2 \cdot \rho_2 2\pi r dr = 2\rho_2 \pi \int_0^l r^3 dr = \pi \rho_2 R^4 / 2$$

Заменяя ρ_2 его значением, найдём окончательно $J_C = M R^2 / 2$

Теорема Гюйгенса

Как, зная момент инерции относительно какой-либо оси, проведённой в теле, найти момент инерции относительно любой другой параллельной ей оси.



Точка *C* – центр масс, *O* – произвольная точка оси *Cx*', *d* – расстояние между осями *Cz*' и *Oz.*

$$J_{Oz} = \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k^2 + y_k^2) \quad J_{Cz'} = \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k'^2 + y_k'^2)$$

Для любой точки *k* тела: $x_k = x_k' - d$

$$x_k^2 = x_k'^2 + d^2 - 2x_k' d \qquad y_k = y_k'$$

$$J_{Oz} = \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k'^2 + y_k'^2) + \sum_{k=1}^{n} m_k d^2 - \sum_{k=1}^{n} m_k x_k' 2d = J_{Cz'} + Md^2$$

$$\sum_{k=1}^{n} m_k x_k' = Mx_C' \quad x_C' = 0 \qquad \sum_{k=1}^{n} m_k x_k' = 0$$

ТЕОРЕМА ГЮЙГЕНСА

Теорема Гюйгенса

Таким образом доказана теорема Гюйгенса.

Момент инерции тела относительно данной оси равен моменту инерции относительно оси, ей параллельной и проходящей через центр масс тела, сложенному с произведением его массы на квадрат расстояния между осями.

$$J_{Oz} = J_{Cz'} + Md^2$$

$J_{Cz'}$ - момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс

J_{Oz} – момент инерции относительно произвольной оси, параллельной оси Cz'

d – расстояние между осями Oz и Cz'

Примеры применения теоремы Гюйгенса

1. *Момент инерции тонкого однородного стержня относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через центр масс.*

$$J_{Oz} = J_{Cz'} + Md^2$$

так как момент инерции относительно конца стержня равен *JOz*=*Ml*2/3, а *d*=*l*/2, то *JCz'*=*Ml*2/12

2. *Момент инерции цилиндра относительно оси Az, проходящей через его образующую*

$$J_{Oz} = J_{Cz'} + Md^2$$

так как момент инерции относительно цилиндра равен *JCz'*=*MR*2/2, а *d*=*R*, то *JOz*=3*MR*3/2

Центробежные моменты инерции

Если через точку О провести координатные оси Oxyz, то по отношению к этим осям <u>центробежными моментами инерции</u> называют величины, определяемые равенствами:

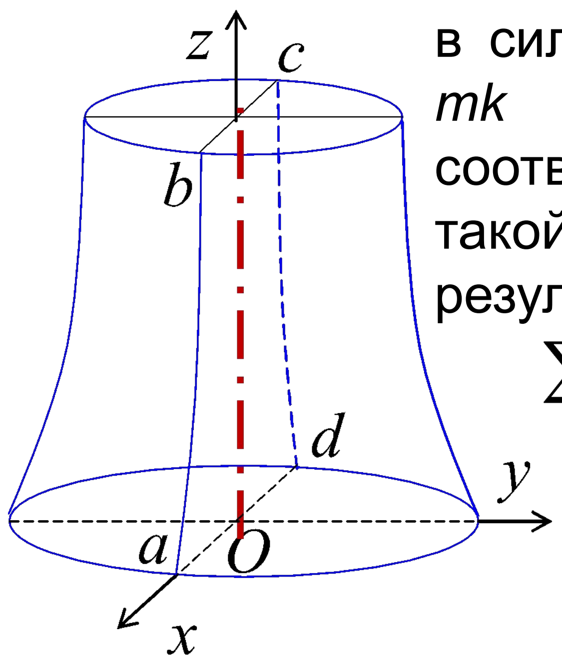
$$J_{xy} = \sum m_k x_k y_k, \; J_{yz} = \sum m_k y_k z_k, \; J_{zx} = \sum m_k z_k x_k$$

<u>*Центробежные моменты инерции могут быть положительными, отрицательными и равными нулю.*</u>

Оси, для которых центробежные моменты инерции, содержащие в своих индексах их наименования, равны нулю, называют главными осями инерции.

Главные оси инерции

Можно показать, что для однородного тела, имеющего ***ось симметрии, данная ось одновременно является и её главной осью инерции.***



Если вдоль оси симметрии направить ось *Oz* то, в силу симметрии, каждой точке тела с массой *mk* и координатами *xk*, *yk*, *zk* будет соответствовать точка с другим индексом, но такой же массой и координатами *-xk*, *-yk*, *zk*. В результате получим, что

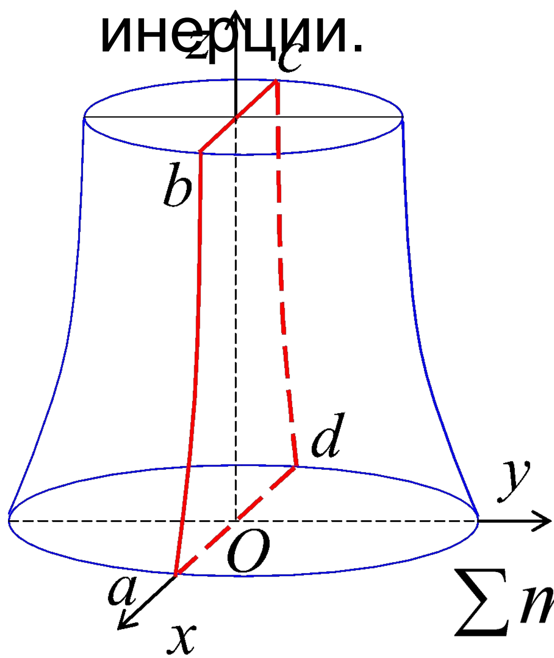
$$\sum m_k z_k x_k = J_{zx} = 0, \quad \sum m_k y_k z_k = J_{yz} = 0$$

так как в этих суммах все слагаемые попарно одинаковы по модулю и противоположны по знаку.

ЦЕНТРОБЕЖНЫЕ МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ

Главные оси инерции

Также можно показать, что если однородное тело имеет плоскость симметрии, то любая ось, перпендикулярная ей является главной осью инерции.



Для изображенного на рисунке тела *abcd* – плоскость симметрии. Каждой точке с массой *mk* и координатами *xk*, *yk*, *zk* будет соответствовать точка с такой же массой и координатами, равными *xk*, *-yk*, *zk*, следовательно

$$\sum m_k x_k y_k = J_{xy} = 0, \quad \sum m_k y_k z_k = J_{yz} = 0$$

и ось *y* является главной осью инерции.

Главные оси инерции

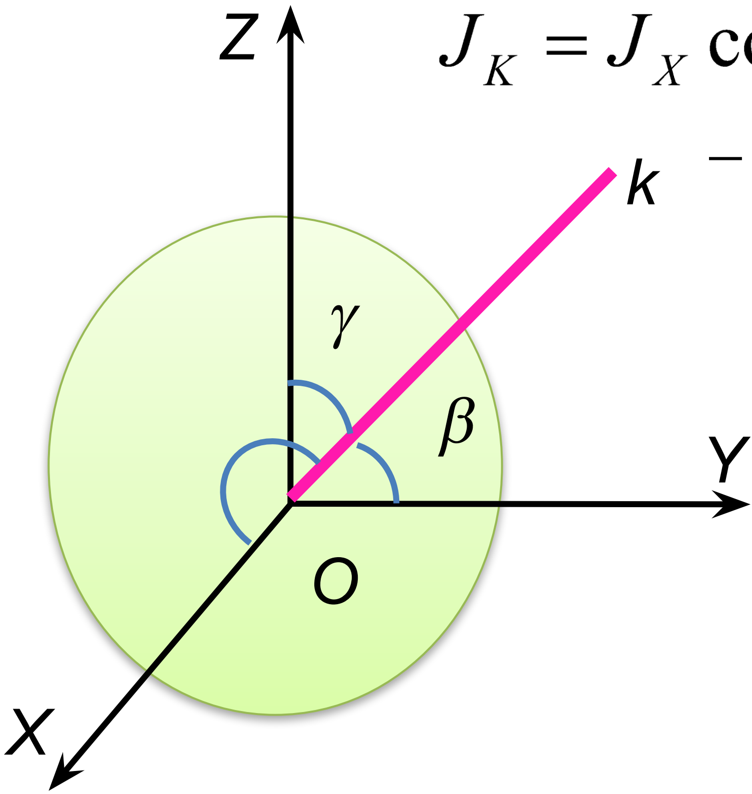
Главные оси инерции, построенные для центра масс системы, называют главными центральными осями инерции.

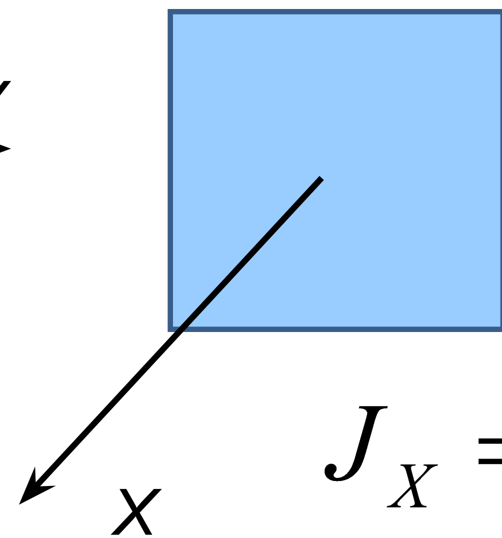
Понятие о главных осях инерции играет важную роль в динамике твердого тела. В частности с этим понятием связано решение задачи о динамическом уравновешивании вращающихся тел.

Оказывается, что ***динамические реакции, действующие на ось вращающегося тела, будут равны статическим, если ось вращения, является одной из главных центральных осей инерции.***

Момент инерции относительно произвольной оси

$$J_K = J_X \cos^2\alpha + J_Y \cos^2\beta + J_Z \cos^2\gamma -$$
$$-2J_{XY}\cos\alpha\cos\beta - 2J_{XZ}\cos\alpha\cos\gamma -$$
$$-2J_{YZ}\cos\beta\cos\gamma$$





$$J_X = Ma^2/6$$

ЦЕНТРОБЕЖНЫЕ МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ

Заключение

1. Масса системы характеризует меру инертности тела при его поступательном движении, а осевой момент инерции характеризует меру инертности тела при его вращении вокруг соответствующей оси.

2. Центробежные моменты инерции характеризуют несимметричность распределения массы тела относительно координатных осей или плоскостей.

3. Чтобы тело при вращении вокруг оси было динамически уравновешенным, необходимо чтобы эта ось была главной центральной осью инерции.

Вопросы для самоконтроля

1. Что называют центром масс системы точек и как определяют его координаты?
2. Может ли центр масс твердого тела находиться вне этого тела?
3. Запишите формулы для вычисления координат центра масс в трехмерном пространстве.
4. Приведите определение осевого момента инерции системы материальных точек.
5. Как вычисляются моменты инерции тела относительно параллельных осей (теорема Штейнера)?
6. Как классифицируют в динамике силы, действующие на точки механической системы?
7. При каких условиях некоторая ось является главной осью инерции в данной точке?
8. Что называется центробежным моментом инерции твердого тела?
9. Какими свойствами обладают главные и главные центральные оси инерции?

ВОРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

Тема следующей лекции

Теоремы о движении центра масс, об изменении количества движения и об изменении момента количества движения системы