Матрицы

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел .

Если матрица содержит m строк и n столбцов, то говорят, что матрица имеет размерность $m \times n$.

m - порядок матрицы

$$
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn}
\end{pmatrix}
$$

- Обозначение матриц

$$A = \left(a_{ij}\right)_{m \times n}$$

Матрица размера $m \times m$ называется ***квадратной***.

Матрица , имеющая только одну строку называется ***матрицей-строкой.***

Матрица, имеющая только один столбец называется ***матрицей-столбцом .***

Две матрицы считаются *равными*, если равны их размеры и равны элементы, стоящие на одинаковых местах.

Квадратная матрица называется *невырожденной* (неособенной), если её определитель отличен от нуля, и *вырожденной* (особенной) , если определитель её равен нулю.

Квадратная матрица вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

наз. единичной и обозначается E

- Матрица, все элементы которой равны нулю, наз. нулевой.

- Определитель, составленный из элементов квадратной матрицы, наз. определителем матрицы.

Очевидно $$|E| = 1$$

- Матрица

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

наз. транспонированной по отношению к матрице

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Действия над матрицами.

<u>**Суммой**</u> двух матриц одинаковой размерности A и B называется матрица C той же размерности, элементы которой равны суммам элементов матриц A и B с одинаковыми индексами.

Произведением матрицы на число α называется матрица, получающаяся из матрицы A умножением всех её элементов на α.

Разностью двух матриц A и B одинаковой размерности называется матрица $C=A+(-B)$.

Произведением матрицы $A=(a_{ij})$ размера $m\times n$ на матрицу $B=(b_{ij})$ размера $n\times k$ называется матрица $C=(c_{ij})$ размера $m\times k$, элемент c_{ij} которой, стоящий в *i*-ой строке и *j*-ом столбце, равен сумме произведений элементов *i*-ой строки матрицы А и соответствующих элементов *j*-го столбца матрицы *B.*

Свойства операций над матрицами

$$1.\ A+B=B+A$$

$$2.\ (A+B)+C=A+(B+C)$$

$$3.\ k(A+B)=kA+kB$$

$$4.\ AB \neq BA$$

5. $(AB)C=A(BC)$

6. $A(B+C)=AB+AC$

7. $A+O=A$

8. $AE=EA=A$

- Если A и B две квадратные матрицы одного порядка, то

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$$

Обратная матрица

Пусть A - квадратная матрица. Обратной для неё матрицей наз. квадратная матрица того же порядка, обозначаемая A^{-1} и удовлетворяющая условию

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$$

- Для того, чтобы квадратная матрица A имела обратную матрицу, необходимо и достаточно, чтобы матрица A была невырожденной.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{A_{11}}{\Delta} & \dfrac{A_{21}}{\Delta} & \dfrac{A_{31}}{\Delta} \\ \dfrac{A_{12}}{\Delta} & \dfrac{A_{22}}{\Delta} & \dfrac{A_{32}}{\Delta} \\ \dfrac{A_{13}}{\Delta} & \dfrac{A_{23}}{\Delta} & \dfrac{A_{33}}{\Delta} \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Р а н г   м а т р и ц ы

Рангом матрицы называется наивысший из порядков отличных от нуля миноров матрицы.

Ранг матрицы А обозначается:

$r(A)$ или $rang(A)$.

Теорема о ранге матрицы

Ранг матрицы равен максимальному числу линейно – независимых строк матрицы.

c_{ij}

Элементарные преобразования матрицы.

1. Умножение всех элементов строк на одно и то же число не равное 0.
2. Перестановка строк местами.
3. Прибавление к элементам одной строки соответствующих элементов другой строки, умноженных на одно и тоже число.

4. Отбрасывание одной из двух одинаковых строк.

5. Отбрасывание нулевой строки

Теорема: Элементарные преобразования не меняют ранг матрицы.

Матрицы, полученные с помощью элементарных преобразований наз. эквивалентными (~).

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{array}{cl}
\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix} &
\begin{array}{l} (-2)\ \ (-1) \\ \quad + \\ \qquad\quad + \end{array}
\end{array}
$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & 5 & 1 \\ 0 & 7 & -5 & -1 \end{pmatrix} \quad +$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$r(A) = 2$$

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & -3 & -2 \\ 3 & 4 & 3 & -1 & -3 \\ 5 & 6 & -1 & 4 & -4 \end{pmatrix}\begin{array}{l} 3 \quad 5 \\ \overset{+}{(-2)} \\ (-2) \end{array}$$

$$\begin{array}{cc}\begin{pmatrix}2 & 3 & 5 & -3 & -2\\ 0 & 1 & 9 & -7 & 0\\ 0 & 3 & 27 & -23 & -2\end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ (-3) \\ + \end{array}\end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 9 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$r(A) = 3$$