



Анализ алгоритмов

Алтайский государственный университет
Факультет математики и ИТ
Кафедра информатики
Барнаул 2014

Лекция 16

■ План

- Эффективность алгоритмов
 - Эффективность алгоритмов и ее измерение
 - Временная сложность алгоритма в зависимости от размера задачи
 - Худший, средний и лучший случаи
 - Что ускорять: компьютер или алгоритм?
- Асимптотический анализ алгоритмов
 - Цели асимптотического анализа
 - O-символика
 - Примеры асимптотического анализа алгоритмов
 - Асимптотическая сложность задач
 - Временная и пространственная сложность
- Бинарный поиск
 - Идея алгоритма
 - Временная сложность алгоритма



Эффективность алгоритмов

- Эффективность алгоритмов и ее измерение
- Временная сложность алгоритма в зависимости от размера задачи
- Худший, средний и лучший случаи
- Что ускорять: компьютер или алгоритм?

Эффективность алгоритмов

- Часто для решения одной и той же задачи могут быть использованы различные алгоритмы
- Как выбрать алгоритм?
- При разработке программ преследуются две (часто конфликтующие) цели
 1. Разработать алгоритм, простой для понимания, кодирования и отладки
 - Предмет изучения дисциплины «Software Engineering»
 2. Разработать алгоритм, **эффективно** использующий ресурсы компьютера
 - Предмет изучения дисциплины «Структуры данных и анализ алгоритмов»

Эффективность алгоритмов

■ Основные ресурсы

- Время выполнения алгоритма
 - Определяется количеством тривиальных шагов, необходимых для решения задачи
- Пространство, используемое алгоритмом
 - Определяется объёмом оперативной памяти или памяти на носителе данных

Остается «за скобками» :

- Трудоемкость кодирования алгоритма
 - Определяется временными затратами программиста на кодирование и отладку алгоритма

Как измерять эффективность алгоритмов?

■ Возможные пути

1. Экспериментальное (эмпирическое) сравнение алгоритмов
 - Сравнение затрат времени (памяти) при непосредственном запуске программ
2. Асимптотический анализ алгоритмов
 - Построение теоретических оценок затрат времени (памяти) в зависимости от различных факторов

От чего зависит время выполнения?

- От загрузки машины
- От операционной системы
- От компилятора
- От специфики значений входных данных
- От размера задачи
 - Зависимость времени выполнения T от размера задачи n выражается некоторой функцией $T(n)$

Зависимость времени от размера

■ Пример 1. Поиск максимума

```
int largest(int array[], int n) {  
    int currlarge = 0;  
    for (int i=1; i<n; i++)  
        if (array[currlarge] < array[i])  
            currlarge = i;  
    return currlarge;  
}
```

$$T(n) = c_1 n + c_2$$

■ Пример 2. Подсчет

```
sum = 0;  
for (i=1; i<=n; i++)  
    for (j=1; i<n; j++)  
        sum++;
```

$$T(n) = c_1 n^2 + c_2$$

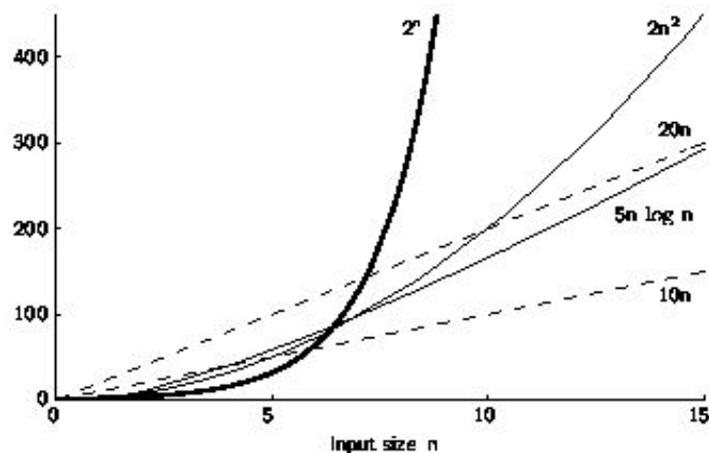
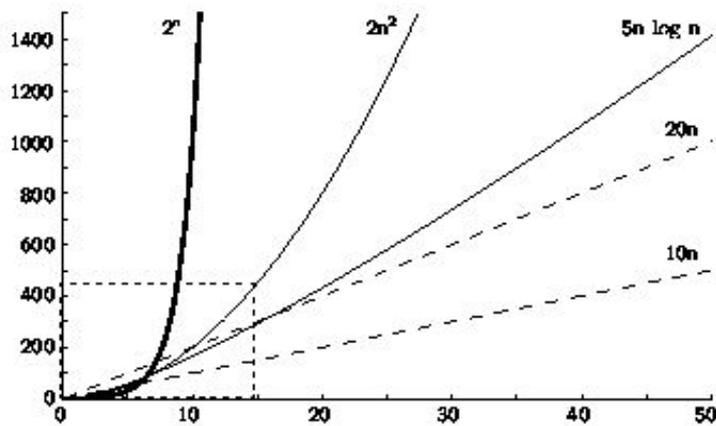
■ Пример 3. Присваивание

```
count = 0;
```

$$T(n) = c$$

Характер роста функций

- В зависимости от вида функции $T(n)$ характер ее роста может быть разным



Наилучший, наихудший и средний случаи

- При том же размере входных данных n время выполнения алгоритма может быть разным
- **Пример.** Последовательный поиск элемента K в массиве размера n
 - Элементы массива, начиная с первого, поочередно просматриваются до тех пор пока не найден K
 - *Наилучший случай:* K найден на 1-й позиции
 - *Наихудший случай:* K найден на n -й позиции
 - *Средний случай:* в среднем K обнаружится после $(n+1)/2$ сравнений

Какой из случаев оценивать?

- Анализировать поведение алгоритма в среднем – наиболее разумно, но наиболее трудно
 - Требуется знание распределения значений (частоты возникновения тех или иных данных)

- Поведение алгоритма в худшем случае важно анализировать в алгоритмах реального времени
 - Пример – системы диспетчеризации транспорта

Ускорять компьютер или алгоритм?

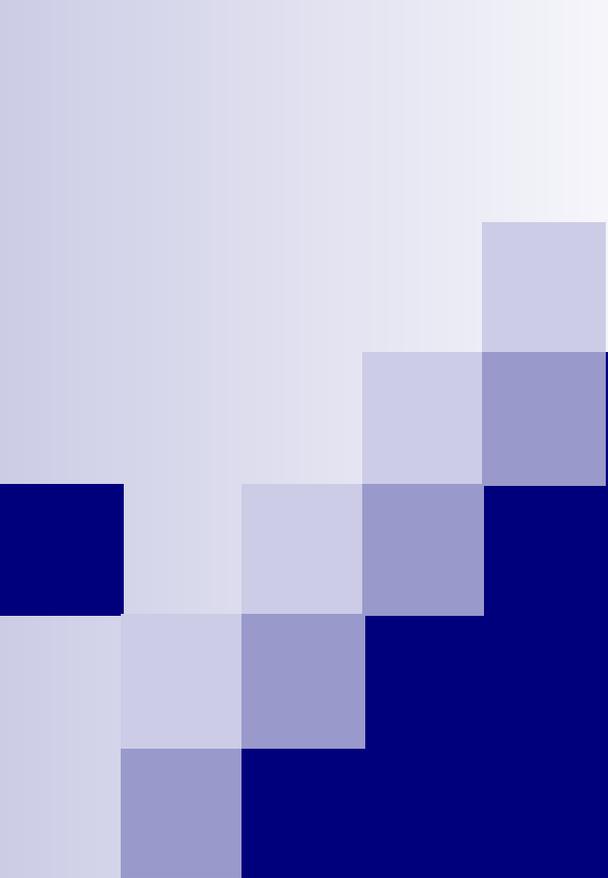
- Что произойдет, если использовать компьютер в 10 раз производительнее?

$T(n)$	n	n'	Изменение	n'/n
$10n$	1,000	10,000	$n' = 10n$	10
$20n$	500	5,000	$n' = 10n$	10
$5n \log n$	250	1,842	$\sqrt{10} n < n' < 10n$	7.37
$2n^2$	70	223	$n' = \sqrt{10}n$	3.16
2^n	13	16	$n' = n + 3$	---

Ускорять компьютер или алгоритм?

- Абсолютные временные затраты алгоритмов разной сложности

$T(n)$	$n=10$	$n=10^3$	$n=10^6$
$\log n$	0.2 сек	0.6 сек	1.2 сек
n	0.6 сек	1 час	16.6 час
n^2	6 сек	16.6 час	1902 года
2^n	1 час	10^{295} лет	10^{300000} лет



Асимптотический анализ алгоритмов

- Цели асимптотического анализа
- O-символика
- Примеры асимптотического анализа алгоритмов
- Асимптотическая сложность задач
- Временная и пространственная сложность

Асимптотический анализ

- Экспериментальное сравнение алгоритмов трудоемко
- На практике чаще используется более простой асимптотический анализ алгоритмов
- Асимптотический анализ алгоритмов направлен на получение и сравнение теоретических оценок сложности алгоритмов (вида $T(n)$) при достаточно больших n

Асимптотический анализ

- В асимптотическом анализе алгоритмов используются обозначения, принятые в математическом асимптотическом анализе
- **O-символика**
 - $o(f(n))$ оценка порядка малости
 - $O(f(n))$ оценка верхней границы
 - $\Omega(f(n))$ оценка нижней границы
 - $\Theta(f(n))$ оценка верхней и нижней границы

Асимптотический анализ: $O()$

■ Определение

- Говорят, что неотрицательная функция $f(n)$ есть $O(g(n))$, если существуют константы $c > 0$ и $n_0 > 0$, такие что $f(n) \leq cg(n)$ для любых $n > n_0$.

■ Пример использования

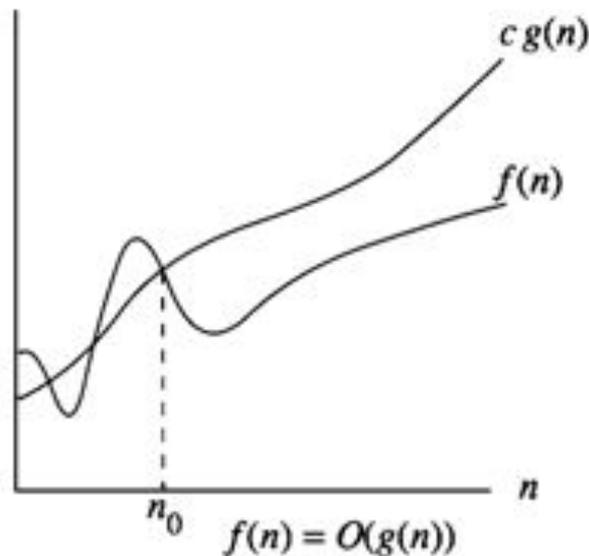
- Временная сложность алгоритма есть $O(n^2)$ в [лучшем, среднем, худшем] случае.

■ Смысл

- Для всех достаточно больших входных данных ($n > n_0$), алгоритм всегда выполняется менее, чем за $cg(n)$ шагов в [лучшем, среднем, худшем] случае

Асимптотический анализ: $O()$

- Другими словами
 - Запись $f(n)=O(g(n))$ означает, что $f(n)$ принадлежит классу функций, которые растут не быстрее, чем функция $g(n)$ с точностью до постоянного множителя.



- Пример. Если $T(n) = 3n^2$, то $T(n)$ есть $O(n^2)$

Асимптотический анализ: $O()$

- $O()$ указывает верхнюю границу
- При выборе верхней границы наиболее интересна наименьшая из возможных
- Пример.
 - Хотя $T(n) = 3n^2$ есть $O(n^3)$, мы выбираем $O(n^2)$ как более информативный вариант

Асимптотический анализ: $O()$

- **Пример 1.** Линейный поиск в массиве (средний случай)

$$T(n) = c_s n/2$$

Для всех $n > 1$, $c_s n/2 \leq c_s n$

Таким образом, по определению, $T(n)$ есть $O(n)$ при $n_0 = 1$ и $c = c_s$

Асимптотический анализ: $O()$

- **Пример 2.** Пусть $T(n) = c_1n^2 + c_2n$ в среднем случае

$$c_1n^2 + c_2n \leq c_1n^2 + c_2n^2 \leq (c_1 + c_2)n^2$$

для всех $n > 1$

$$T(n) \leq cn^2 \text{ при } c = c_1 + c_2 \text{ и } n_0 = 1.$$

Тогда $T(n)$ есть $O(n^2)$ по определению

- **Пример 3.** $T(n) = c$. Говорят: $T(n)$ есть $O(1)$.

Асимптотический анализ: $O()$

- Распространенная ошибка
 - “Лучшим для моего алгоритма является случай $n=1$, т.к. при этом алгоритм наиболее быстр” – **НЕКОРРЕКТНО!**
- $O()$ описывает **характер роста** по мере стремления n к ∞
- Лучшим случаем называют такой, при котором на обработку входных данных размера n тратится наименьшее время по сравнению с прочими данными того же размера

Асимптотический анализ: $O()$

- Распространенная ошибка
 - Часто худший случай путают с верхней границей
- Верхняя граница описывает **характер роста** по мере стремления n к ∞
- Худшим случаем называют такой, при котором на обработку входных данных размера n тратится наибольшее время по сравнению с прочими данными того же размера

Асимптотический анализ: $\Omega()$

■ Определение

- Говорят, что неотрицательная функция $f(n)$ есть $\Omega(g(n))$, если существуют константы $c > 0$ и $n_0 > 0$, такие что $f(n) \geq cg(n)$ для любых $n > n_0$.

■ Смысл

- Для всех достаточно больших входных данных ($n > n_0$), алгоритм всегда выполняется более, чем за $cg(n)$ шагов
- Нижняя граница
- Оценка $\Omega(g(n))$ задает нижнюю асимптотическую оценку роста функции $f(n)$ и определяет класс функций, которые растут не медленнее, чем $g(n)$ с точностью до постоянного множителя

Асимптотический анализ: $\Omega()$

■ **Пример.** $T(n) = c_1 n^2 + c_2 n$.

$$c_1 n^2 + c_2 n \geq c_1 n^2 \quad \text{для любых } n > 1$$

$$T(n) \geq c n^2 \quad \text{для } c = c_1 \text{ и } n_0 = 1$$

Таким образом, $T(n)$ есть $\Omega(n^2)$ по определению

Из всех нижних границ интересна наибольшая

Асимптотический анализ: $\Theta()$

■ Определение

- Говорят, что неотрицательная функция $f(n)$ есть $\Theta(g(n))$, если существуют константы $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ и $n_0 > 0$, такие что $c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$ для любых $n > n_0$.
- Функция $f(n)$ есть $\Theta(g(n))$, если она одновременно есть $\Omega(g(n))$ и $O(g(n))$

■ Смысл

- Асимптотическое равенство (с точностью до константы)
- Полностью описывает характер роста функции

Асимптотический анализ

■ Правила упрощения

1. Транзитивность

Если $f(n)$ есть $O(g(n))$ и $g(n)$ есть $O(h(n))$,
то $f(n)$ есть $O(h(n))$

2. Игнорирование констант

Если $f(n)$ есть $O(kg(n))$ для любой константы $k > 0$,
то $f(n)$ есть $O(g(n))$

3. Отбрасывание членов низких порядков

Если $f_1(n)$ есть $O(g_1(n))$ и $f_2(n)$ есть $O(g_2(n))$,
то $(f_1 + f_2)(n)$ есть $O(\max(g_1(n), g_2(n)))$

4. Мультипликативность

Если $f_1(n)$ есть $O(g_1(n))$ и $f_2(n)$ есть $O(g_2(n))$,
то $f_1(n)f_2(n)$ есть $O(g_1(n)g_2(n))$

Асимптотический анализ

■ Пример 1

```
a = b;
```

Присвоение требует константного времени, поэтому имеет сложность $\Theta(1)$

■ Пример 2

```
sum = 0;  
for (i=1; i<=n; i++)  
    sum += n;
```

Цикл имеет линейную сложность, т.е. $\Theta(n)$

Асимптотический анализ

■ Пример 3

```
sum = 0;
for (j=1; j<=n; j++)
    for (i=1; i<=j; i++)
        sum++;
for (k=0; k<n; k++)
    A[k] = k;
```

Первая строка есть $\Theta(1)$

Вложенный цикл есть $\sum i = \Theta(n^2)$

Последний цикл есть $\Theta(n)$

Итог: $\Theta(n^2)$

Асимптотический анализ

■ Пример 4

```
sum1 = 0;
for (i=1; i<=n; i++)
    for (j=1; j<=n; j++)
        sum1++;

sum2 = 0;
for (i=1; i<=n; i++)
    for (j=1; j<=i; j++)
        sum2++;
```

Первая пара вложенных циклов – n^2 шагов

Вторая пара вложенных циклов – $(n+1)(n)/2$ шагов

Обе пары есть $\Theta(n^2)$

Итог: $\Theta(n^2)$

Асимптотический анализ

■ Пример 5

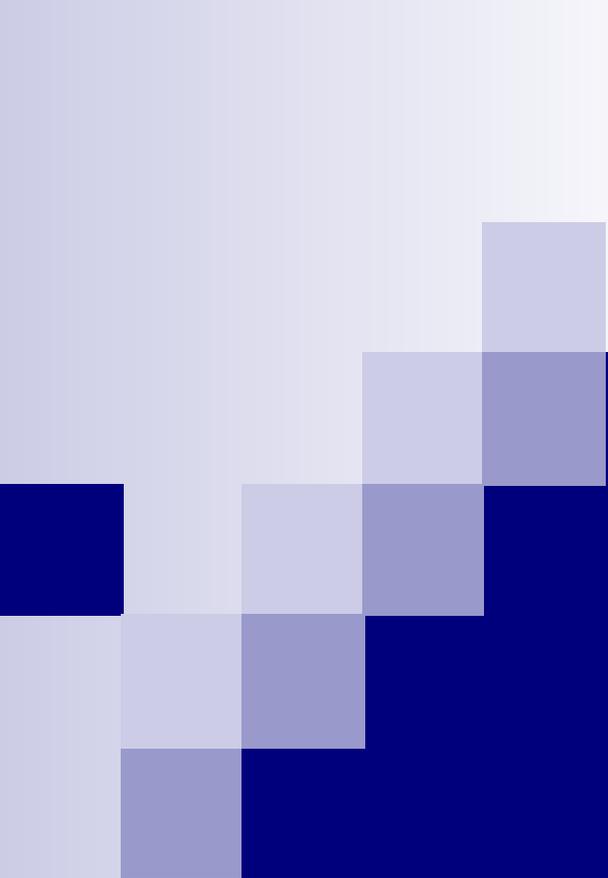
```
sum1 = 0;
for (k=1; k<=n; k*=2)
    for (j=1; j<=n; j++)
        sum1++;

sum2 = 0;
for (k=1; k<=n; k*=2)
    for (j=1; j<=k; j++)
        sum2++;
```

Первая пара циклов: $\sum n$ для $k=1 \dots \log n$ есть $\Theta(n \log n)$

Вторая пара циклов: $\sum 2^k$ для $k=0 \dots \log n - 1$ есть $\Theta(n)$

Итог: $\Theta(n \log n)$



Бинарный поиск

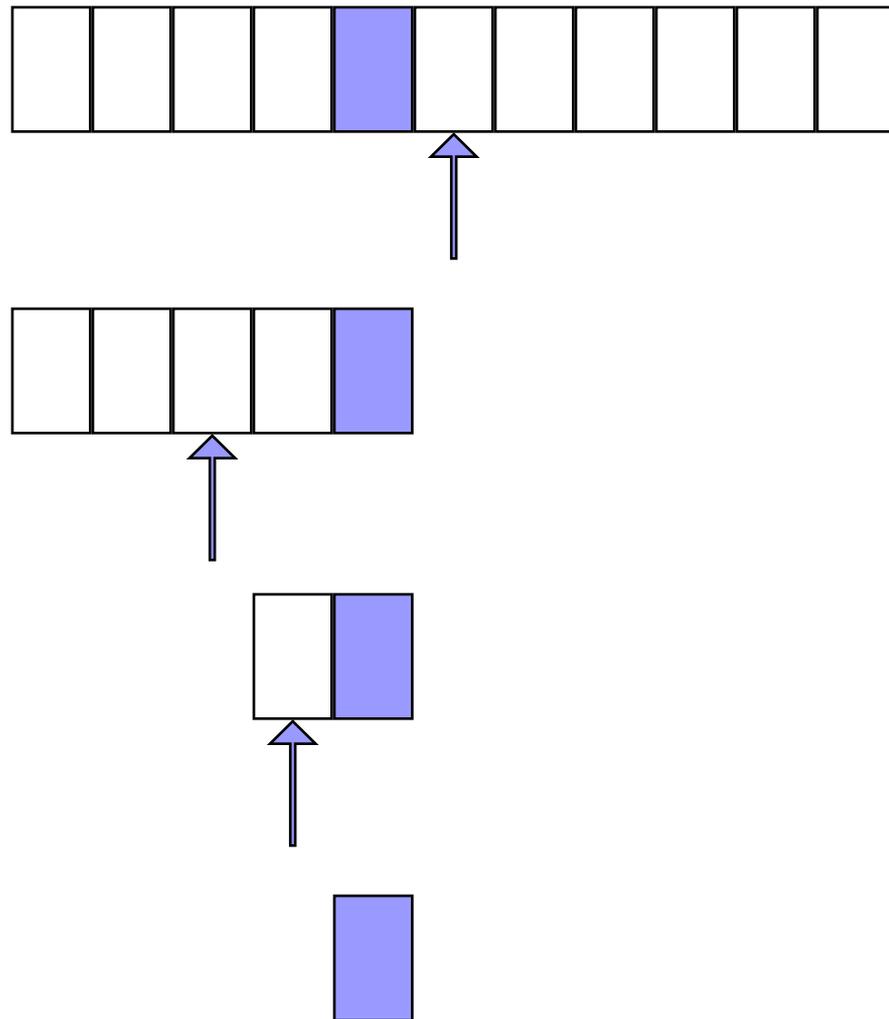
- Идея алгоритма
- Временная сложность алгоритма

Бинарный поиск

- Возможно ли ускорить линейный алгоритм поиска элемента в массиве? ($\Theta(n)$)
- Да, если массив упорядочен
- Наличие порядка позволяет использовать принцип «разделяй и властвуй»: на каждом шаге уменьшая вдвое размер решаемой задачи
- Бинарный поиск – реализация стратегии «разделяй и властвуй» в чистом виде

Бинарный поиск

- На каждом шаге центральный элемент $A[m]$ проверяется на совпадение с искомым K
- Если $A[m] = K$, конец алгоритма
- Если $A[m] < K$, то далее решается задача поиска в подмассиве $A[m] \dots A[n]$?
- иначе – в подмассиве $A[1] \dots A[m]$



Бинарный поиск

■ Код

```
// Возвращает позицию элемента K
// в упорядоченном массиве размера n
int binary(int array[], int n, int K) {
    int l = -1;
    int r = n;          // l, r за границами массива
    while (l+1 != r) { // Стоп, если l, r сошлись
        int i = (l+r)/2; // Центральный элемент
        if (K < array[i]) r = i; // Идем налево
        if (K == array[i]) return i; // K найден
        if (K > array[i]) l = i; // Идем направо
    }
    return n; // K не встречается в массиве
}
```

- Сколько сравнений производится в худшем случае?

Асимптотический анализ различных управляющих конструкций

- Цикл `while` анализируется так же как и `for`
- Условный оператор `if` оценивается по наиболее сложной ветви `then/else`
 - Вероятность срабатывания ветвей не должна зависеть от n
- Оператор ветвления `switch` оценивается по наиболее сложной ветви `case`
 - Вероятность срабатывания ветвей не должна зависеть от n
- Сложность вызова подпрограммы равна сложности подпрограммы

Асимптотический анализ сложности задач

- Анализ задачи = анализ классов алгоритмов
- Верхняя граница: верхняя граница сложности наилучшего из известных алгоритмов решения задачи
- Нижняя граница: нижняя граница для всех известных алгоритмов решения задачи

Асимптотический анализ сложности задач

- Пример
- Нет смысла говорить о верхних/нижних границах, если известно точное количество операций
- Пример неточных знаний о задаче: **сортировка**
 1. Сложность ввода/вывода: $\Omega(n)$.
 2. Пузырьковая сортировка или вставками: $O(n^2)$.
 3. Более эффективные методы (Quicksort, Mergesort, Heapsort, и т.д.): $O(n \log n)$.
 4. Для некоторых типов данных существуют методы со сложностью $O(n)$.

Асимптотический анализ: несколько параметров

- Упорядочить по популярности C значений пикселей на изображении, содержащем P пикселей

```
for (i=0; i<C; i++) // Инициализировать счетчики
    count[i] = 0;
for (i=0; i<P; i++) // Просмотреть все пиксели
    count[value(i)]++; // Увеличить счетчик значения
sort(count); // Сортировать счетчики
```

- Если в качестве размера данных использовать P , то время работы есть $\Theta(P \log P)$
- Более точно: $\Theta(P + C \log C)$

Асимптотический анализ: затраты памяти

- Асимптотический анализ затрат памяти проводится совершенно аналогично анализу временных затрат
- Обычно такая потребность возникает при построении структур данных

Баланс «затраты памяти»/«затраты времени»

- Временные затраты алгоритма могут быть понижены, если повысить расход памяти и наоборот:
- Жертвуя временем, можно сэкономить память
- Принцип баланса «время»/«дисковое пространство»:
 - Чем меньше затраты дискового пространства, тем быстрее программа

Вопросы?

- Эффективность алгоритмов
 - Эффективность алгоритмов и ее измерение
 - Временная сложность алгоритма в зависимости от размера задачи
 - Худший, средний и лучший случаи
 - Что ускорять: компьютер или алгоритм?
- Асимптотический анализ алгоритмов
 - Цели асимптотического анализа
 - O-символика
 - Примеры асимптотического анализа алгоритмов
 - Асимптотическая сложность задач
 - Временная и пространственная сложность
- Бинарный поиск
 - Идея алгоритма
 - Временная сложность алгоритма

