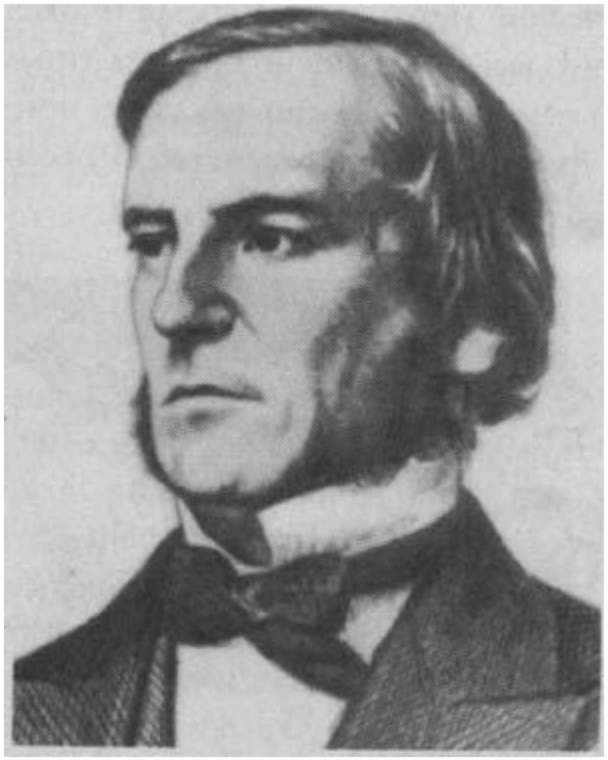
Лекция 1
Тема: Алгебра высказываний.

Цель: Разъяснить понятие высказывания.

Джордж Буль



(2 ноября 1815- 8 декабря 1864,
английский математик и логик.

Алгебра высказываний является теоретической базой при проектировании современных цифровых устройств, используется в приложениях математической логики к технике, в частности для описания электрических переключательных схем.

Алгебра высказываний

1. Основные понятия. Логические операции

Под ***высказыванием*** мы понимаем предложение, о котором можно сказать, **истинно** оно или **ложно**.

Высказывания мы будем обозначать заглавными буквами латинского алфавита, возможно с индексами: $A, B, X, Y, C_1, A_4, \ldots$

Если высказывание *A* истинно, мы будем писать ***A*=1**; если высказывание *A* ложно, мы будем писать ***A*=0**.

Примеры

1. *A*=«два умножить на два равно семи»
2. *B*=«два плюс два равно 4»
3. C=«если сентябрь – весенний месяц, то 5*5=25»
4. *D*=«число делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 3»
5. E=«если после четверга следует пятница, то в году 13 месяцев»

A=0

B=1

C=?

D=1

E=?

Операции над высказываниями. Отрицание

Определение 1

Высказывание "неверно, что A" называется ***отрицанием*** A и обозначается

$\overline{A}$

Задается действие отрицания с помощью *таблицы истинности*:

A	$\overline{A}$
0	1
1	0

Конъюнкция

Из высказываний *A, B* можно образовать высказывание *"A* и *B"*.

Определение 2

Высказывание *"A* и *B"* называется ***конъюнкцией*** (или *логическим умножением*) высказываний *A, B*.

Конъюнкция имеет несколько обозначений:

$A \wedge B \quad A \& B \quad A \cdot B \quad AB$

Конъюнкция задается с помощью таблицы истинности:

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Дизъюнкция

Из высказываний *A, B* можно образовать высказывание *"A* или *B"*.

Определение 3

Высказывание *"A* или *B"* называется ***дизъюнкцией*** (или *логическим сложением)* высказываний *A, B*
и обозначается **A v B**

Дизъюнкция задается с помощью таблицы истинности:

A	*B*	*A*v*B*
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Эквивалентность

Из высказываний *A, B* можно образовать следующее высказывание:
"A тогда и только тогда, когда *B"*.
Например, треугольник является равносторонним тогда и только тогда, когда все его углы равны между собой.
Синонимами служат фразы:
"A в том и только в том случае, когда *B"*,
"A необходимо и достаточно для того, чтобы выполнялось *B"*,
"A равносильно *B"*,
"A эквивалентно *B"*.

Определение 4

Высказывание *"A* равносильно *B"* называется ***эквивалентностью*** высказываний *A, B* и обозначается:

$$A \Leftrightarrow B$$

$$A \leftrightarrow B$$

$$A \sim B$$

Эквивалентность

Эквивалентность задается таблицей истинности:

A	B	$A \leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Импликация

Из высказываний A и B можно образовать высказывание "если A, то B".
Например, если две прямые параллельны третьей, то они параллельны между собой.
Синонимами служат следующие фразы:
"из A следует B",
"B является следствием A",
"A влечет B",
"A достаточное условие для B",
"B необходимое условие для A" и т.п.

Определение 5

Высказывание "если A, то B" называется ***импликацией*** высказываний A и B и обозначается:

$$A \to B \qquad A \Rightarrow B$$

В этой ситуации высказывание A называется *посылкой*, а B – *заключением*.

Импликация

Задается импликация таблицей истинности:

A	B	$A \to B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Примеры

1. D="если сегодня среда, то завтра будет четверг"
   D=1
2. Y="если после четверга следует пятница, то после пятницы следует воскресенье“
   Y=0
3. X="если два плюс два равно пяти, то три плюс два равно десяти“
   X=1
4. Z="если 1+1=3, то после пятницы следует суббота“
   Z=1

Импликация

Сделаем замечания, которые могут прояснить суть определения таблицы истинности для импликации и, возможно, помогут получше ее запомнить:

1) если посылка ложна, то импликация всегда истинна, независимо от заключения, то есть

$$0 \rightarrow B = 1$$

2) если заключение истинно, то импликация также истинна, независимо от посылки, то есть

$$A \rightarrow 1 = 1$$

Или обобщающая фраза: “из истины ложь не следует”

$$1 \rightarrow 0 = 0$$

Пример

Формализовать высказывание:

F=«Хлеба уцелеют тогда и только тогда, когда будут вырыты ирригационные канавы; если хлеба не уцелеют, то фермеры обанкротятся и оставят фермы.»

Решение

Пусть

A=«хлеба уцелеют»

B=«будут вырыты ирригационные канавы»

C=«фермеры обанкротятся»

D=«фермеры оставят фермы».

Тогда

$$F = (A \leftrightarrow B) \wedge (\overline{A} \rightarrow C \wedge D)$$

Пример

Построить таблицу истинности для высказывания

$$(A \vee \overline{C}) \rightarrow \overline{B \leftrightarrow A}$$

A	B	C	$\overline{C}$	$A \vee \overline{C}$	$B \leftrightarrow A$	$\overline{B \leftrightarrow A}$	F
0	0	0	1	1	1	0	0
0	0	1	0	0	1	0	1
0	1	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0	1	1
1	0	1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	0
1	1	1	0	1	1	0	0