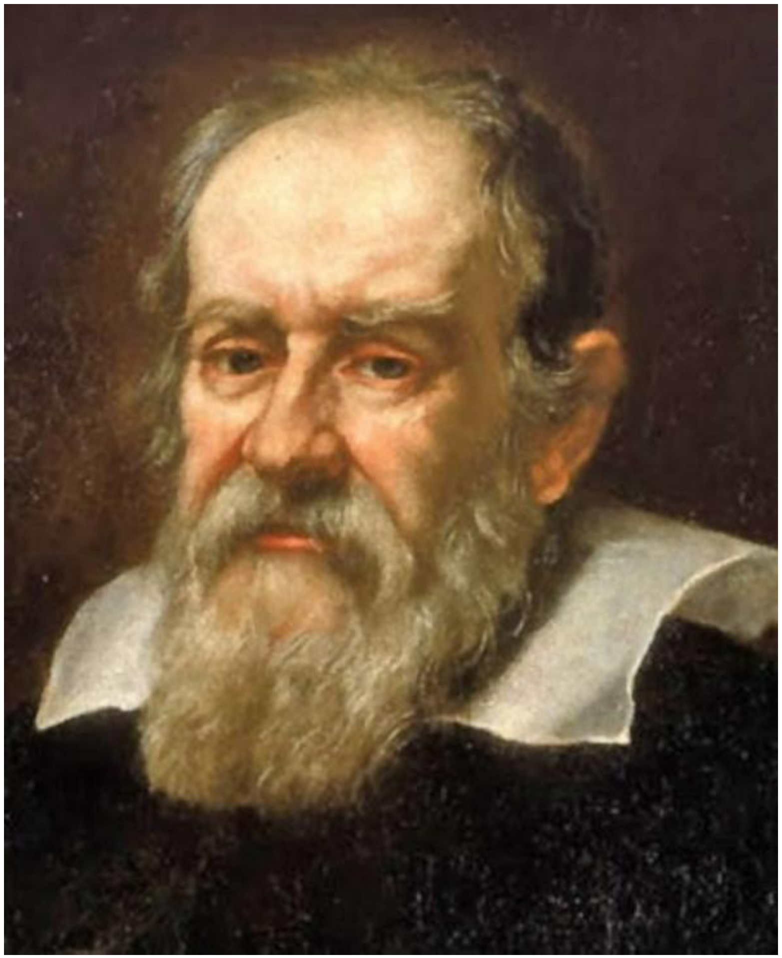
ДИНАМИКА –
наиболее общий раздел механики,
в котором изучается
движение материальных тел
в зависимости
от действующих на них сил

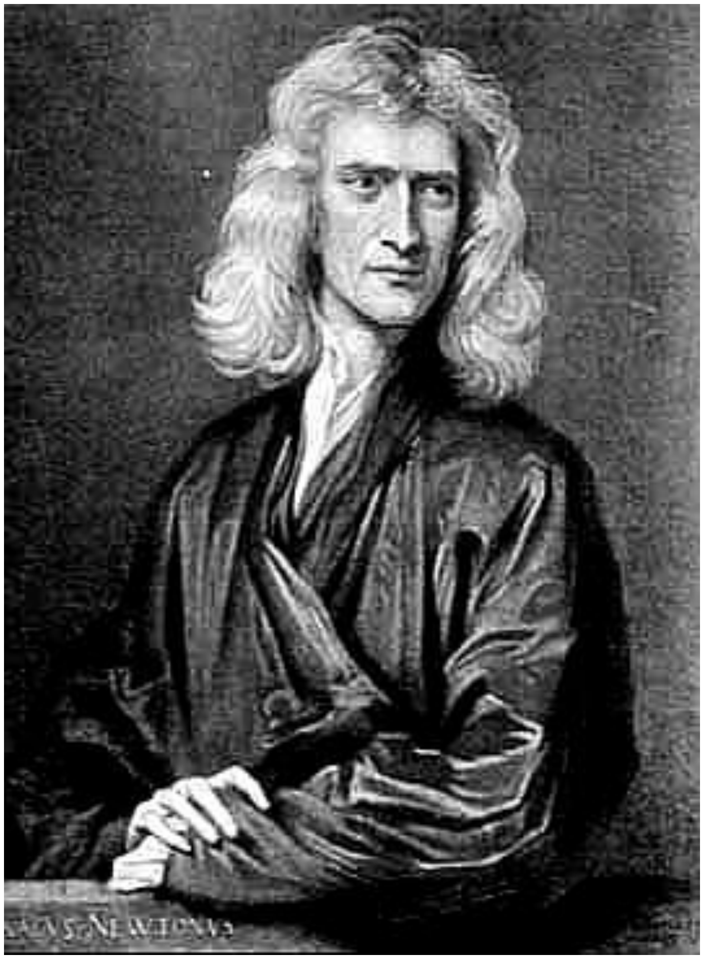
Основные законы современной механики ***Ньютон*** сформулировал в своей книге «Математические начала натуральной философии»

Галилео **Галилей** (1564–1642)



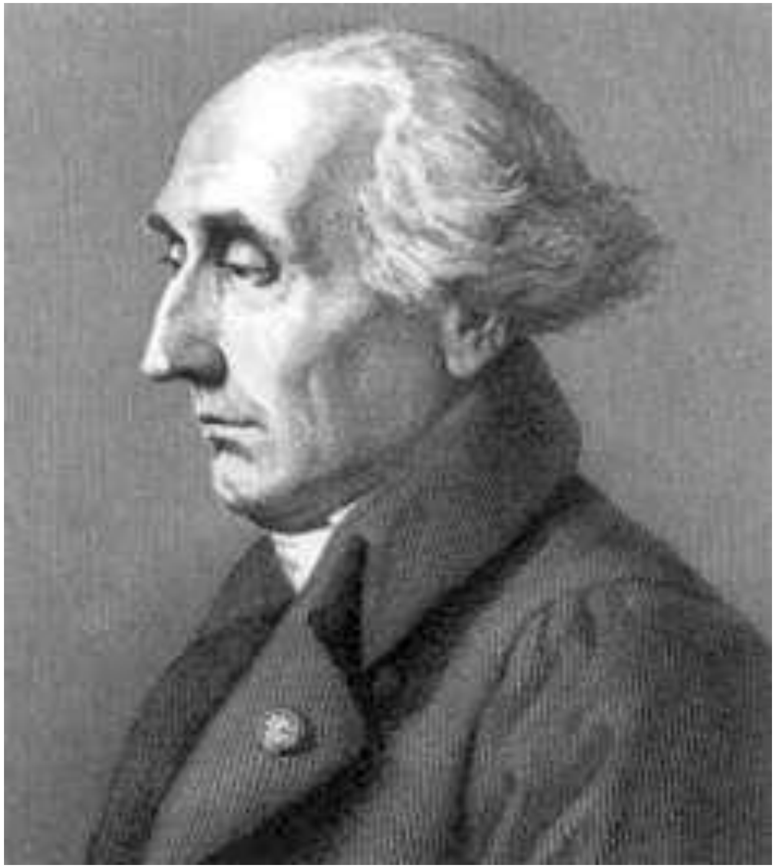
Итальянский физик,
механик,
астроном, философ
и математик.
Основатель экспериментальной физики

Исаак **НЬЮТОН** (1643 – 1727)



Английский физик и математик, создатель теоретических основ ***механики*** и астрономии

Жозеф Луи **Лагранж** (1736-1813)



Французский математик и механик, создатель аналитической механики

1. Закон инерции

Открыт Галилеем в 1638 г. :

«***Изолированная от внешних воздействий материальная точка сохраняет свое состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока приложенные силы не заставят ее изменить это состояние***»

2. Основной закон механики (второй закон Ньютона)

«Изменение количества движения пропорционально приложенной силе и происходит по направлению той прямой, по которой эта сила действует»

(формулировка Ньютона)

$$m(v - v_0) = P(t - t_0)$$

Формулировка Эйлера:

$$P = m \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(v - v_0)}{(t - t_0)} = ma$$

Современная запись:

$$m\overline{a} = \overline{P}$$

Система отсчета,
в которой проявляются
первый и второй законы,
называется
инерциальной

Определение понятия масса тела

Ньютон:

количество материи

Эйлер:

мера инертности

3. Закон равенства действия и противодействия:

«Всякому действию соответствует равное и противоположно направленное противодействие»

4. **Закон независимости действия сил**

«Несколько одновременно действующих на материальную точку сил
сообщают точке такое ускорение,
которое сообщила бы ей одна сила,
равная их геометрической сумме»

$$m\bar{a} = \sum \bar{P}_i = \bar{R}$$

Дифференциальные уравнения движения материальной точки в декартовых координатах

$$m\bar{a} = \sum \bar{P}_i = \bar{R}$$

Проектируем обе части равенства на координатные оси

$$\left.\begin{aligned} ma_x &= \sum_{i=1}^{n} X_i; \\ ma_y &= \sum_{i=1}^{n} Y_i; \\ ma_z &= \sum_{i=1}^{n} Z_i. \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= \sum_{i=1}^{n} X_i; \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= \sum_{i=1}^{n} Y_i; \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= \sum_{i=1}^{n} Z_i. \end{aligned}\right\}$$

Дифференциальные уравнения движения материальной точки

Дифференциальные уравнения движения материальной точки в естественных координатах

$$m\bar{a} = \sum \bar{P}_i = \bar{R}$$

Проектируем обе части равенства на естественные оси

$$\left.\begin{aligned} ma_\tau &= \sum_{i=1}^{n} F_\tau; \\ ma_n &= \sum_{i=1}^{n} F_n; \\ ma_b &= \sum_{i=1}^{n} F_b. \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2 s}{dt^2} &= \sum_{i=1}^{n} F_\tau; \\ m\frac{v^2}{\rho} &= \sum_{i=1}^{n} F_n; \\ m\cdot 0 &= \sum_{i=1}^{n} F_b = 0 \end{aligned}\right\}$$

Дифференциальные уравнения движения материальной точки

Задачи динамики

Первая –

зная массу точки m

и уравнения ее движения

$$x = f_1(t); \quad y = f_2(t); \quad z = f_3(t)$$

найти модуль и направление равнодействующей сил,

приложенных к точке

Вторая –

зная силы, действующие на материальную точку,

начальное положение точки и ее начальную скорость, получить уравнения движения точки

Первая задача динамики

зная массу точки и уравнения ее движения,
найти модуль и направление равнодействующей сил, приложенных к точке

$$x = f_1(t); \qquad y = f_2(t); \qquad z = f_3(t)$$

$$\left.\begin{aligned} X &= m\frac{d^2x}{dt^2}; \\ Y &= m\frac{d^2y}{dt^2}; \\ Z &= m\frac{d^2z}{dt^2}. \end{aligned}\right\}$$

$$P = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2};$$

$$\cos(\bar{P}, \bar{i}) = X / P;$$

$$\cos(\bar{P}, \bar{j}) = Y / P;$$

$$\cos(\bar{P}, \bar{k}) = Z / P$$

Вторая задача динамики

зная силы, действующие на материальную точку,

начальное положение точки

и ее **начальную скорость**,

получить уравнения движения точки

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= \sum_{i=1}^{n} X_i; \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= \sum_{i=1}^{n} Y_i; \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= \sum_{i=1}^{n} Z_i. \end{aligned}\right\}$$

В общем случае силы могут быть функциями $t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}.$

Решение трех дифференциальных уравнений второго порядка содержит **шесть постоянных,** которые определяют по начальным условиям:

$$x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0 \ \textit{при} \ t = 0.$$

$$\left.\begin{aligned} x &= f_1(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0); \\ y &= f_2(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0); \\ z &= f_3(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0). \end{aligned}\right\}$$

Общие теоремы динамики точки

Устанавливают наглядные зависимости между основными динамическими характеристиками движения материальных тел.

Избавляют от необходимости проделывать для каждой задачи те операции интегрирования, которые раз и навсегда производятся при выводе этих теорем.

Меры механического движения:

1. **Количество движения** – векторная величина, равная произведению массы точки *m* на скорость ***v***:

$$Q=mv$$

В системе СИ единица измерения

кгм/сек

КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ —

скалярная величина

$$T = \frac{mv^2}{2},$$

равная половине произведения массы точки на квадрат ее скорости.

В системе СИ единица измерения

$$кг \cdot м^2 / сек^2 = н \cdot м = джоуль$$

Теорема об изменении количества движения материальной точки

$$m\bar{a} = \bar{P}; \quad m\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{P}; \quad \frac{d(m\bar{v})}{dt} = \bar{P}.$$

«Производная по времени
от количества движения
материальной точки
геометрически равна
сумме всех действующих на точку
сил»

Интегрируем: $d(m\bar{v}) = \bar{P}\cdot dt.$

$$\int_{v_1}^{v_2} d(m\bar{v}) = \int_{t_1}^{t_2} \bar{P}\cdot dt.$$

$$m\bar{v}_2 - m\bar{v}_1 = \sum \bar{S}_i.$$

В интегральной форме:

«Изменение количества движения материальной точки за некоторый промежуток времени равно геометрической сумме импульсов сил, приложенных к точке за тот же промежуток времени»

$$mv_{2x} - mv_{1x} = \sum S_{ix},$$
$$mv_{2y} - mv_{1y} = \sum S_{iy},$$
$$mv_{2z} - mv_{1z} = \sum S_{iz}.$$

«Изменение ***проекции количества движения*** *материальной точки на данную ось за некоторый промежуток времени равно сумме проекций на ту же ось* ***импульсов сил****, приложенных к точке за тот же промежуток времени»*

МОМЕНТ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ ОТНОСИТЕЛЬНО ПОЛЮСА *О* –

момент количества движения точки относительно этого полюса:

$$\bar{L}_O = \bar{r} \times m\bar{v}$$

где *m* масса точки, $\bar{v}$ – ее скорость, $\bar{r}$ – радиус–вектор.

Теорема об изменении кинетического момента точки относительно полюса

$$\bar{L}_O = \bar{r} \times m\bar{v};$$

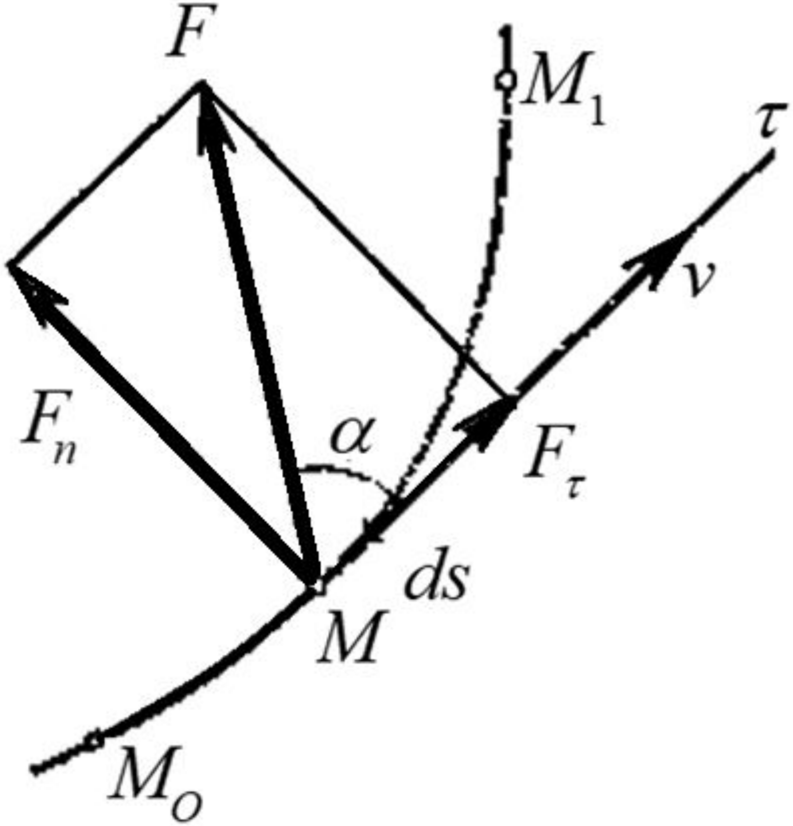
$$\frac{d\bar{L}_O}{dt} = \frac{d(\bar{r} \times m\bar{v})}{dt} = \frac{d\bar{r}}{dt} \times m\bar{v} + \bar{r} \times m\frac{d\bar{v}}{dt} =$$

$$= \bar{v} \times m\bar{v} + \bar{r} \times m\bar{a} = 0 + \bar{r} \times \bar{R} = \bar{M}_O;$$

$$\frac{d\bar{L}_O}{dt} = \bar{M}_O$$

Производная по времени от кинетического момента материальной точки относительно некоторого неподвижного центра равна моменту равнодействующей сил, действующих на материальную точку, относительно того же центра

Работа силы. Мощность



Элементарная работа силы ***F*** называется скалярная величина

$$dA = F_\tau ds =$$

$$= F\cos\alpha \cdot ds =$$

$$= \overline{F} \cdot d\overline{r}$$

Элементарная работа силы равна произведению модуля силы на элементарное перемещение ds и на косинус угла между направлением силы и направлением перемещения

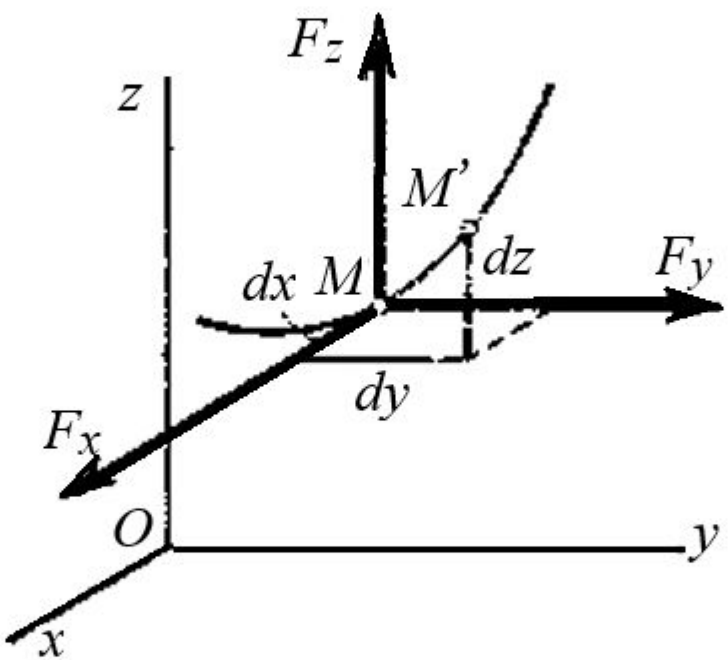
Если угол **α острый**, то работа **положительна**.

Если угол **α тупой**, то работа **отрицательна**.

Если угол **α=90^0**,
т.е. если сила направлена перпендикулярно
перемещению,
то элементарная работа силы **равна нулю**

Аналитическое выражение элементарной работы

$$dA = \overline{F} \cdot d\overline{r} = (F_x \overline{i} + F_y \overline{j} + F_z \overline{k}) \cdot (dx \cdot \overline{i} + dy \cdot \overline{j} + dz \cdot \overline{k})$$



Так как $\overline{i} \cdot \overline{j} = \overline{i} \cdot \overline{k} = \overline{j} \cdot \overline{k} = 0,$

а $\overline{i} \cdot \overline{i} = \overline{j} \cdot \overline{j} = \overline{k} \cdot \overline{k} = 1,$

то $dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz$

Работа силы на любом конечном перемещении вычисляется как интегральная сумма соответствующих элементарных работ
и будет равна:

$$A_{(M_0 M_1)} = \int\limits_{(M_0)}^{(M_1)} F_\tau ds = \int\limits_{(M_0)}^{(M_1)} (F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$

Работа силы на любом перемещении M_0M_1 равна взятому вдоль этого перемещения интегралу
от элементарной работы

Единицей измерения работы в системе СИ является *джоуль*
(1 дж=1Нм)

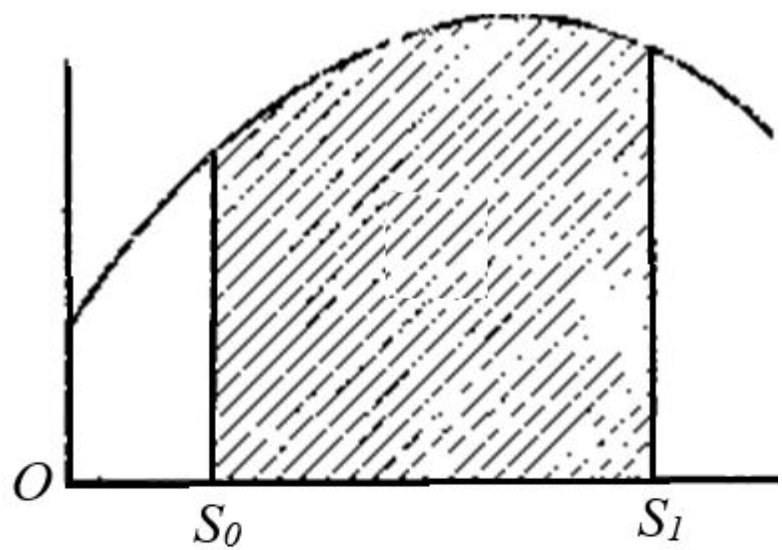
ПРИМЕРЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ РАБОТЫ

Графический способ вычисления работы

Если сила зависит от расстояния S

и известен график зависимости F_τ от S

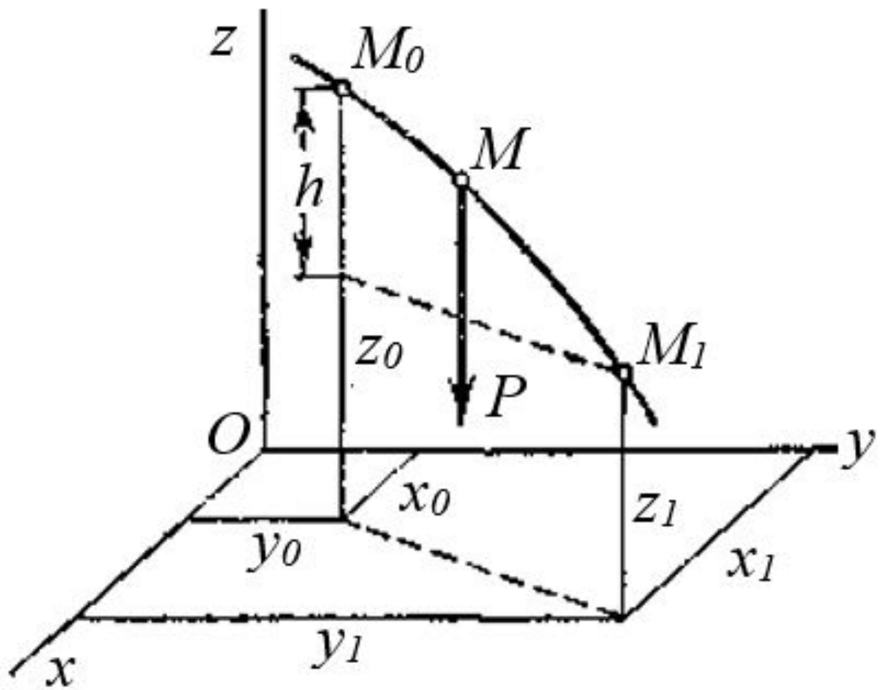
то работу силы ***F*** можно вычислить графически



Работа силы тяжести

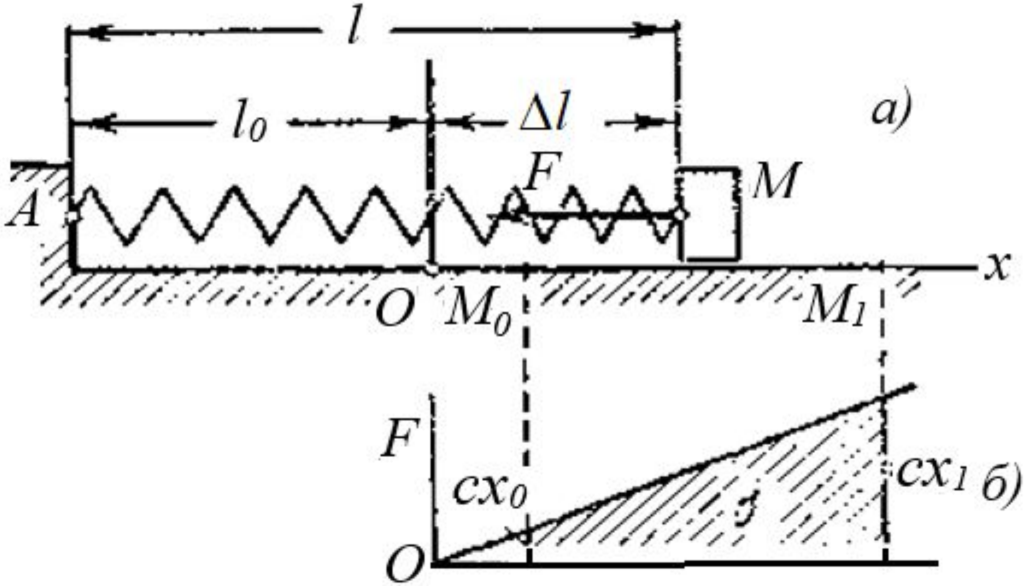
$$A_{(M_0M_1)} = \int\limits_{(M_0)}^{(M_1)} (-P)dz = -P\int\limits_{z_0}^{z_1} dz = P(z_0 - z_1) = Ph.$$

$$A_{(M_0M_1)} = \pm Ph$$



Работа силы тяжести не зависит
от вида той траектории,
по которой перемещается точка ее приложения.
Силы, обладающие таким свойством, называются ***потенциальными***

Работа силы упругости



$$F = c|\Delta l| = c|x|$$

$$A = \int_0^x -cx\,dx = -c\int_0^x x\,dx = \frac{c}{2}(x_0^2 - x_1^2)$$

Работа силы упругости равна
половине произведения коэффициента жесткости
на разность квадратов
начального и конечного удлинений (или сжатии)
пружины

Работа силы трения

$$A_{\text{тр}\,(M_0 M_1)} = -\int_{(M_0)}^{(M_1)} F \cdot ds = -\int_{(M_0)}^{(M_1)} f \cdot N \cdot ds$$

Работа силы трения при скольжении
всегда отрицательна.
Величина этой работы зависит от длины дуги M_0M_1 ,
следовательно,
сила трения является
силой ***непотенциальной***

Мощность

Мощность - величина, определяющая работу, совершаемую силой в единицу времени.

$$W = {dA}/{dt} = {F_\tau ds}/{dt} = F_\tau v$$

Единицей измерения мощности в системе СИ является *ватт* (1*вт*=1 *дж/сек*), а в системе МкГС—1 *кГм/сек*.
В технике за единицу мощности часто принимается 1 лошадиная сила, равная 75 *кГм/сек* или 736 *вт*.

Теорема
об изменении кинетической энергии точки

$$ma_\tau = \sum F_{i\tau}$$

$$a_\tau = {dv}/{dt} = {dv}/{ds} \cdot {ds}/{dt} = {dv}/{ds} \cdot v$$

$$mv\frac{dv}{ds} = \sum F_{i\tau}; \quad mvdv = \sum F_{i\tau} \cdot ds;$$

$$d(\frac{mv^2}{2}) = \sum F_{i\tau} \cdot ds$$

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum A_{(M_0M_1)}$$

Изменение кинетической энергии точки при некотором ее перемещении
равно алгебраической сумме работ
всех действующих на точку сил
на том же перемещении

Связи и их уравнения

Несвободной материальной точкой называется точка, свобода движения которой ограничена.

Тела, ограничивающие свободу движения точки,

называются ***связями****.*

Пусть связь представляет собой поверхность какого-либо тела, по которой движется точка.

Тогда координаты точки должны удовлетворять уравнению этой поверхности, называемому *уравнением связи*

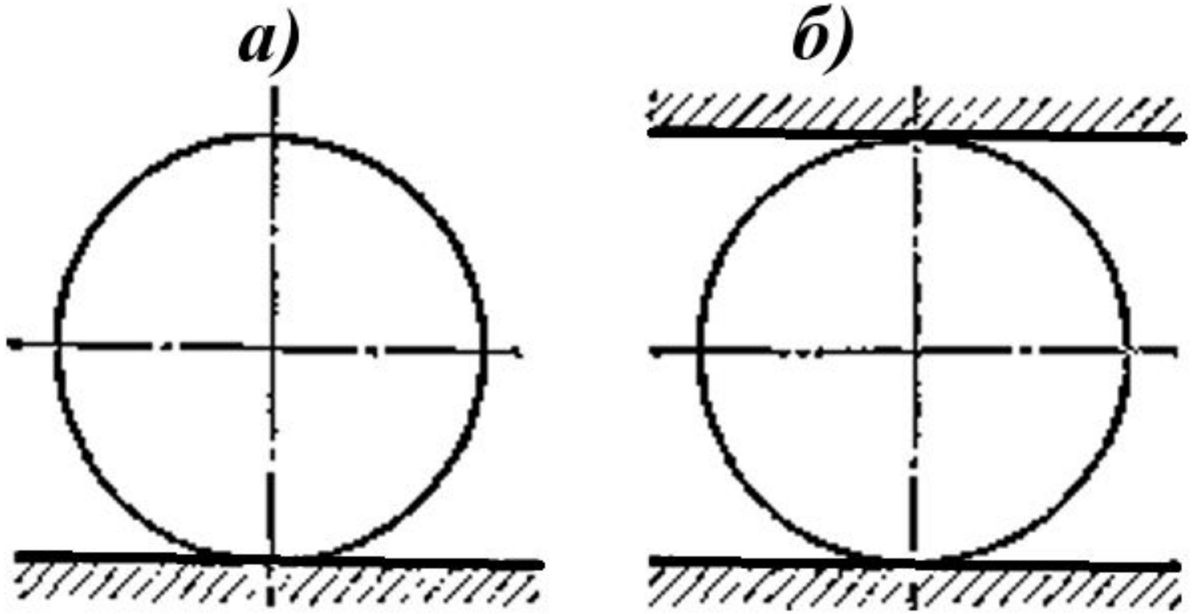
$$f(x, y, z) = 0$$

Если точка вынуждена двигаться по некоторой линии (движение шарика внутри криволинейной трубки),

то уравнениями связи

являются уравнения этой линии

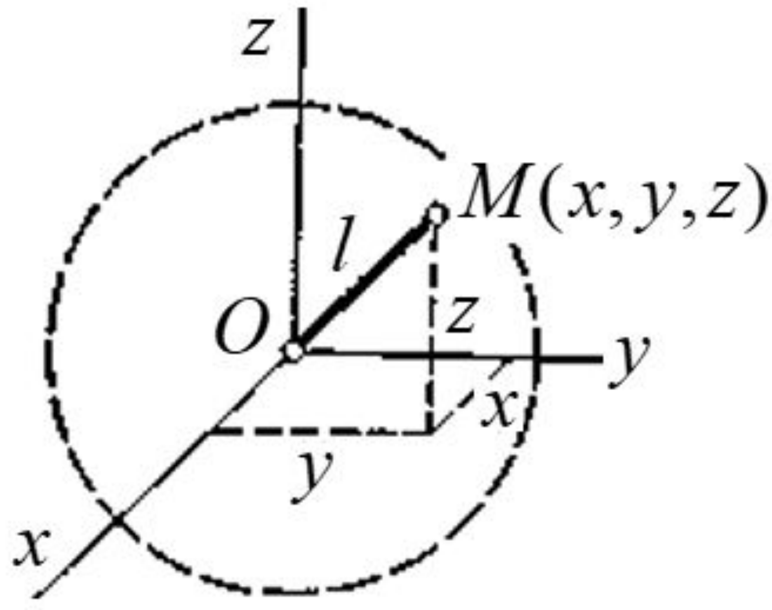
$$\left.\begin{aligned} f_1(x, y, z) = 0; \\ f_2(x, y, z) = 0. \end{aligned}\right\}$$



Связи делятся на:

а) *односторонние*, или *неудерживающие;*

б) *двусторонние*, или *удерживающие*.



Уравнения неудерживающей связи выражаются *неравенствами*:

$$x^2 + y^2 + z^2 - l^2 \leq 0$$

Уравнения удерживающей связи выражаются *равенствами*:

$$x^2 + y^2 + z^2 - l^2 = 0$$

$$f(x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, t) = 0$$

Дифференциальные интегрируемые связи – связи, выраженные дифференциальными уравнениями, которые могут быть проинтегрированы.

Связь называется ***голономной***, если она выражается или конечным соотношением между координатами точки, т. е. уравнением, не содержащим никаких производных от координат, или интегрируемым дифференциальным уравнением.

Если дифференциальное уравнение,
выражающее связь,
неинтегрируемо,
т. е. его нельзя привести к некоторому эквивалентному соотношению

$$f(x, y, z, t) = C$$

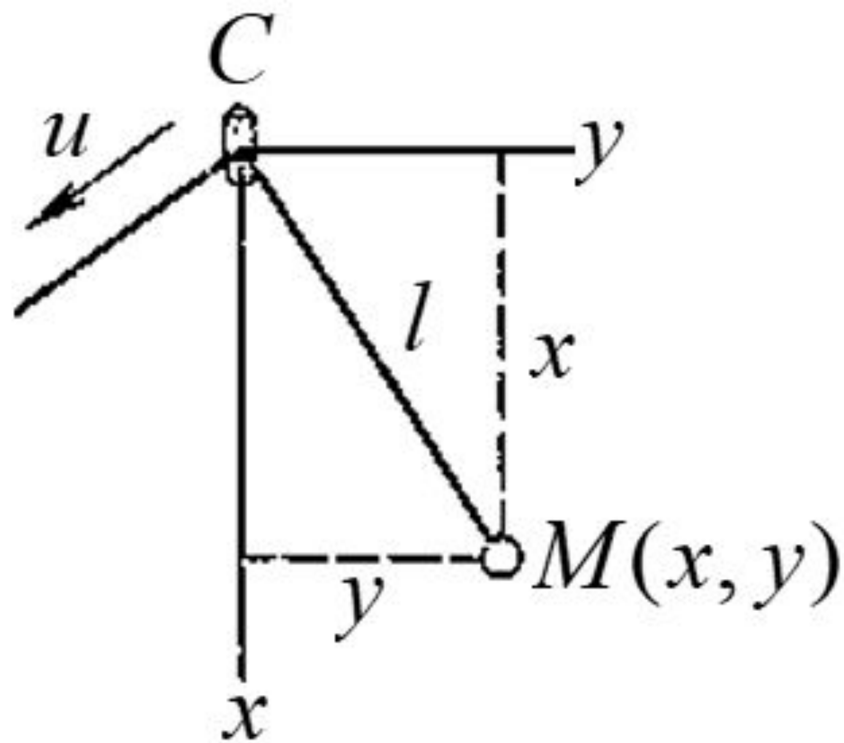
только между координатами точки и *t*,
то эта связь называется
неголономной

Голономные механические связи делятся на:

1) ***Стационарные*** (равенства, выражающие связи, не содержат явно время);

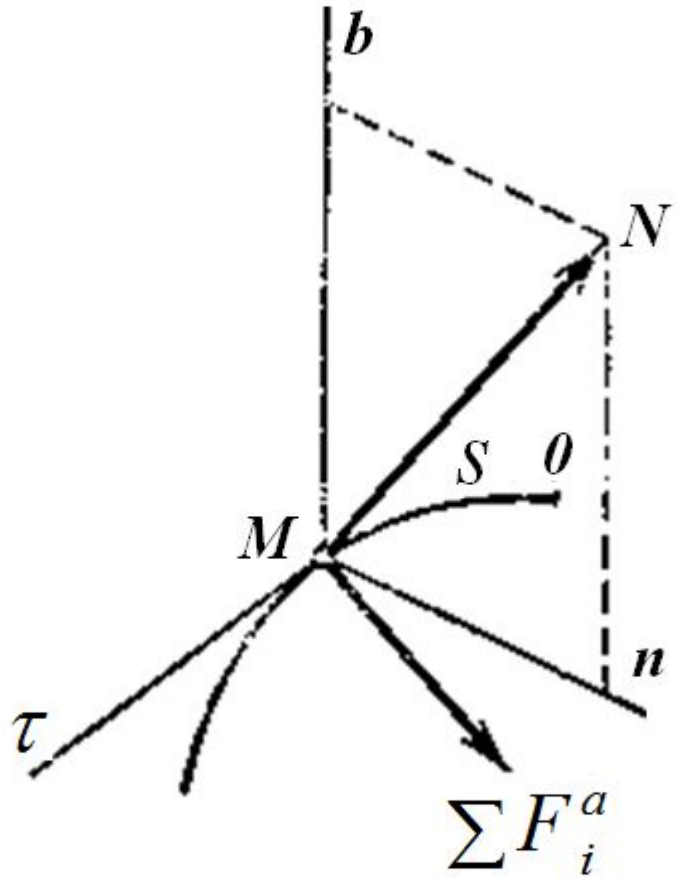
2) ***Нестационарные*** (если в эти равенства явно входит время).

Пример нестационарной связи



$$x^2 + y^2 - (l_0 - ut) = 0$$

Несвободное движение точки



$$m\bar{a} = \sum \bar{F}_i^a + \bar{N}$$

$$\left.\begin{aligned} ma_\tau &= \sum F_{i\tau}^a; \\ ma_n &= \sum F_{in}^a + N_n; \\ ma_b &= \sum F_{ib}^a + N_b. \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2 s}{dt^2} &= \sum F_{i\tau}^a; \quad (1) \\ m\frac{v^2}{\rho} &= \sum F_{in}^a + N_n; \quad (2) \\ 0 &= \sum F_{ib}^a + N_b. \quad (3) \end{aligned}\right\}$$

Уравнение (1) не содержит неизвестной реакции ***N***
и позволяет определить закон движения точки вдоль кривой,
т. е. зависимость *s=f(t)*.

Уравнения же (2,3) служат для определения реакции связи

Принцип Даламбера:

«Если к заданным (активным) силам, действующим на точку, и реакциям наложенных связей

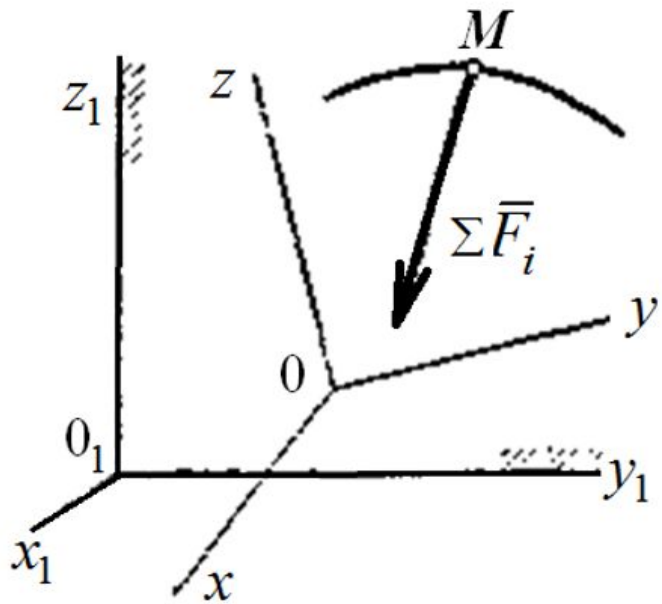
присоединить силу инерции,

то получится уравновешенная система сил»

$$m\bar{a} = \bar{P} + \bar{N}; \quad \bar{P} + \bar{N} - m\bar{a} = 0; \qquad -m\bar{a} = \bar{\Phi};$$

$$\bar{P}_i + \bar{N}_i + \bar{\Phi}_i = 0$$

Динамика относительного движения точки



$$\overline{a}_a = \overline{a}_{отн} + \overline{a}_{пер} + \overline{a}_{кор}$$

$$m\overline{a}_{отн} = \sum \overline{F}_i + (-m\overline{a}_{пер}) + (-m\overline{a}_{кор})$$

$$m\overline{a}_{отн} = \sum \overline{F}_i + \overline{F}^{и}_{пер} + \overline{F}^{и}_{кор}$$

Основной закон динамики относительного движения точки

«Все уравнения и теоремы механики для ***относительного движения*** *точки составляются так же,*

как уравнения абсолютного движения,

если при этом к действующим на точку силам взаимодействия с другими телами прибавить **переносную** *и* **кориолисову** *силы инерции»*

Частные результаты

1. Если подвижные оси движутся поступательно, то

$$\bar{F}^{u}_{кор} = 0$$

и закон относительного движения принимает вид

$$m\bar{a}_{отн} = \sum \bar{F}_{i} + \bar{F}^{u}_{пер}$$

2. Если подвижные оси перемещаются поступательно, равномерно и прямолинейно, то

$$\bar{F}^{u}_{пер} = \bar{F}^{u}_{кор} = 0$$

и закон относительного движения будет иметь такой же вид,
как и закон движения
по отношению к неподвижным осям.
Следовательно,
такая система отсчета также будет ***инерциальной***

Принцип относительности классической механики **(Галилей)**

«Никаким механическим экспериментом нельзя обнаружить,

находится ли данная система отсчета в покое

или совершает поступательное, равномерное и прямолинейное движение»

3. Если точка по отношению к подвижным осям находится в покое, то для нее

$$a_{отн} = a_{кор} = v_{отн} = 0; \qquad \sum \bar{F}_i + \bar{F}^{и}_{пер} = 0$$

Уравнения относительного равновесия составляются так же, как уравнения равновесия в неподвижных осях, если при этом к действующим на точку силам взаимодействия с другими телами добавить ***переносную силу инерции***

$$\overline{F}^{u}_{кор} = -m\overline{a}_{кор} = -2m(\overline{\omega}_{пер} \times \overline{v}_{отн})$$

Проекция кориолисовой силы инерции на касательную к относительной траектории точки всегда равна нулю

$$m\frac{dv_{отн}}{dt} = \sum F_{i\tau} + F^{u}_{пер\tau}$$

Работа кориолисовой силы инерции на любом относительном перемещении равна нулю
и теорема об изменении кинетической энергии
в относительном движении
будет иметь вид:

$$m\frac{v_{отн1}^2}{2} - m\frac{v_{отн0}^2}{2} = \sum A_{iпер} + A(\bar{F}^{u}\ \ )$$