ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

Интерполяционные многочлены Ньютона для равноотстоящих узлов

Конечные разности

Пусть функция задана таблицей с постоянным шагом. Разности между значениями функции в соседних узлах интерполяции называются ***конечными разностями первого порядка***:

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i \text{ , (} i\text{=0,1,2, ...)}$$

Из конечных разностей первого порядка образуются конечные разности второго порядка:

$$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i \text{ , (} i\text{=0,1,2, ...)}$$

Продолжая этот процесс, можно по заданной таблице функции составить таблицу конечных разностей. Конечные разности любого порядка могут быть представлены через значения функции. Действительно, для разностей первого порядка это следует из определения. Для разностей второго порядка имеем:

$$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i = (y_{i+2} - y_{i+1}) - (y_{i+1} - y_i) = y_{i+2} - 2y_{i+1} - y_i$$

Аналогично для разностей третьего порядка:

$$\Delta^3 y_i = \Delta^2 y_{i+1} - \Delta^2 y_i = (y_{i+3} - 2y_{i+2} + y_{i+1}) - (y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i) =$$
$$= y_{i+3} - 3y_{i+2} + 3y_{i+1} - y_i$$

И т.д.

Методом математической индукции можно доказать, что

$$\Delta^k y_i = y_{i+k} - k y_{i+k-1} + \frac{k(k-1)}{2!} y_{i+k-2} - \ldots + (-1)^k y_i$$

x	**y**	$\Delta \mathbf{y}_\mathbf{i}$	$\Delta^\mathbf{2} \mathbf{y}_\mathbf{i}$	$\Delta^\mathbf{3} \mathbf{y}_\mathbf{i}$	**…**
x_0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	
X_1	Y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$	
X_2	Y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_2$	…	
X_3	Y_3	Δy_3	…		
X_4	Y_4	…			
…	…				

Первая интерполяционная формула Ньютона

Пусть для функции, заданной таблицей с постоянным шагом, составлена таблица конечных разностей. Будем искать интерполяционный многочлен в виде:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + a_n(x - x_0)\ldots(x - x_{n-1}$$

Это многочлен n-ой степени. Значения коэффициентов a_0, a_1, a_n найдем из условия совпадения значений исходной функции и многочлена в узлах.

Полагая $x = x_0$, находим $y_0 = P_n(x_0) = a_0$, откуда $a_0 = y_0$. Далее, придавая x значения x_1 и x_2, последовательно получаем: $y_1 = P_n(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0), откуда$

Далее, $$a_1 = \frac{\Delta y_0}{h}$$

проведя аналогичные выкладки можно получить выражение для a_k:

$$a_k = \frac{\Delta^k y_0}{k!\,h^k}$$

Подставим теперь найденные значения a_k в выражение для многочлена:

$$\mathrm{P}_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \ldots +$$

$$+ \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_0)\ldots(x - x_{n-1})$$

Практически эта формула применяется в несколько ином виде. Положим $\frac{x - x_0}{h} = t, т.е. x = x_0 + ht$

Тогда: $$\frac{x - x_1}{h} = \frac{x - x_0 - h}{h} = t - 1$$

$$\frac{x - x_2}{h} = \frac{x - x_0 - 2h}{h} = t - 2 \quad и\ т.д.$$

Окончательно имеем:

$$P_n(x) = P_n(x_0 + th) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \ldots +$$

$$+ \frac{t(t-1)\ldots(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_0$$

Эта формула называется ***первой интерполяционной формулой Ньютона*** и применяется для интерполирования в начале отрезка интерполяции, когда *t* мало по абсолютной величине. Первую интерполяционную формулу Ньютона называют по этой причине формулой для интерполирования вперед. За начальное значение x_0 можно принимать любое табличное значение аргумента *x*.

Вторая интерполяционная формула Ньютона

Когда значение аргумента находится ближе к концу отрезка интерполяции, применять первую интерполяционную формулу становится невыгодно. В этом случае применяется формула для интерполирования назад – ***вторая интерполяционная формула Ньютона***, которая отыскивается в виде:

$$\mathrm{P}_n(x) = a_0 + a_1(x - x_n) + a_2(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \ldots + a_n(x - x_n)\ldots(x - x_1)$$

Как и для первой формулы Ньютона, коэффициенты a_0, a_1, a_n находятся из условия совпадения значений функции и интерполяционного многочлена в узлах:

$$a_k = \frac{\Delta^k y_{n-k}}{k!\,h^k}$$

Подставляя a_k и переходя к переменной

$$t = \frac{x - x_n}{h}$$

Получим окончательный вид второй интерполяционной формулы Ньютона:

$$\mathrm{P}_n(x) = \mathrm{P}_n(x_n + th) = y_n + t\Delta y_{n-1} + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + ... +$$

$$+ \frac{t(t+1)...(t+n-1)}{n!}\Delta^n y_0$$

Оценка погрешности интерполяционных формул Ньютона

$$\left|R_n(x)\right| \approx \frac{\Delta^{n+1} y_0}{(n+1)!}\left|t(t-1)(t-2)\ldots(t-n)\right|,$$

$$\left|R_n(x)\right| \approx \frac{\Delta^{n+1} y_n}{(n+1)!}\left|t(t+1)(t+2)\ldots(t+n)\right|$$

Пример Построить интерполяционный многочлен Ньютона для функции, заданной таблично:

i	x_i	Y_i
0	1	12
1	3	4
2	5	12

Построим таблицу конечных разностей:

i	x_i	Y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$
0	1	12	-8	16
1	3	4	8	
2	5	12		

h=2

$$P_2(x) = 12 + \frac{-8}{2}(x-1) + \frac{16}{2!\cdot 2^2}(x-1)(x-3) =$$

$$= 12 - 4(x-1) + 2(x-1)(x-3)$$

Представим тот же многочлен через переменную t

$$t = \frac{x - x_0}{h} = \frac{x-1}{2}$$

Получим

$$\mathrm{P}_2(x) = \mathrm{P}_n(1+2t) = 12 - 8t + \frac{16}{2!}t(t-1) = 12 - 8t + 8t(t-1)$$