Работа с таблично заданными функциями. Интерполяция и экстраполяция.

АППРОКСИМАЦИЯ

x_0	x_1	...	x_n
y_0	y_1	...	y_n

Найти φ(x)=?, такую что $\varphi(x_i) \approx y_i$

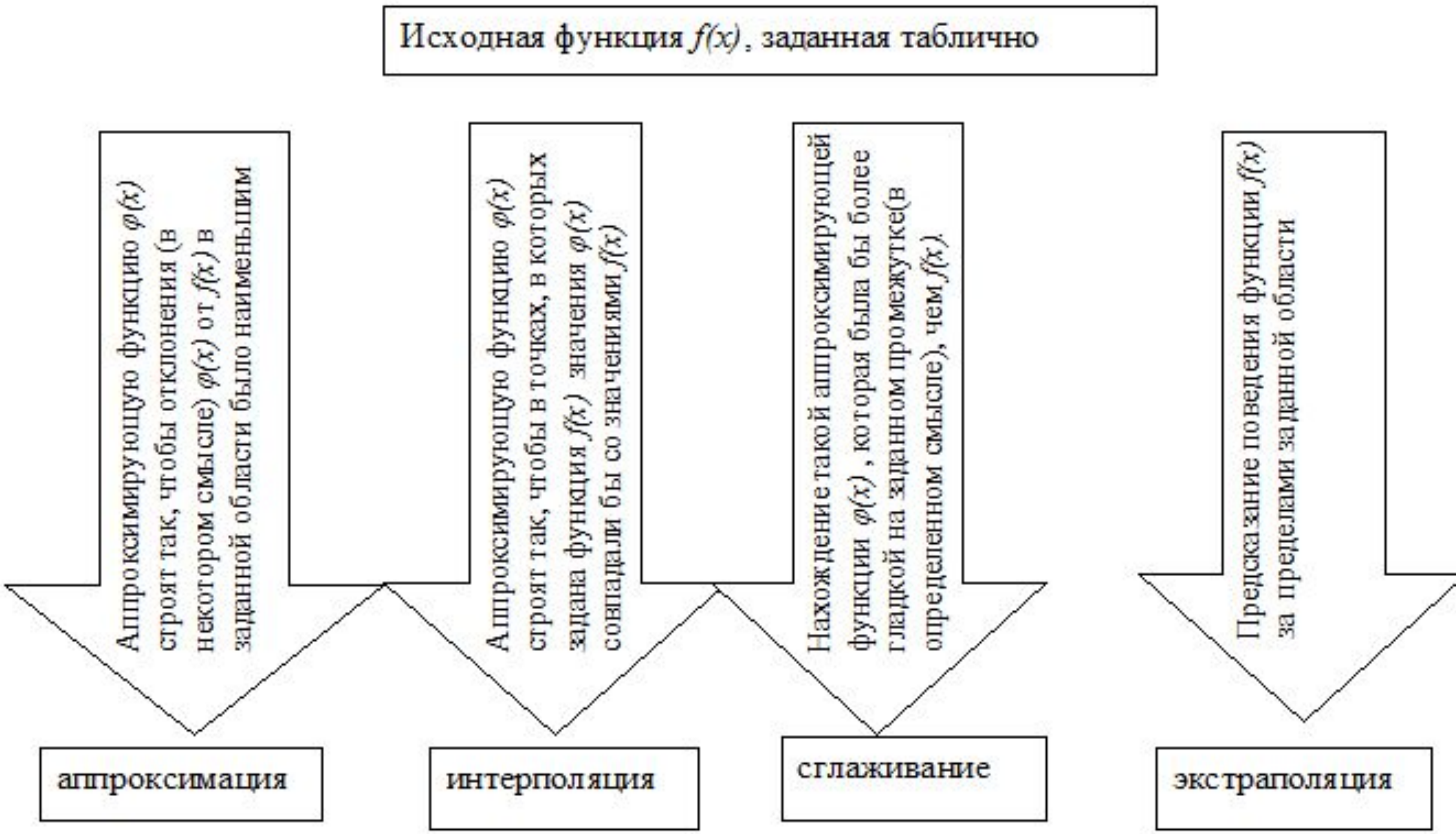
АППРОКСИМАЦИЯ

Непрерывной (интегральной)

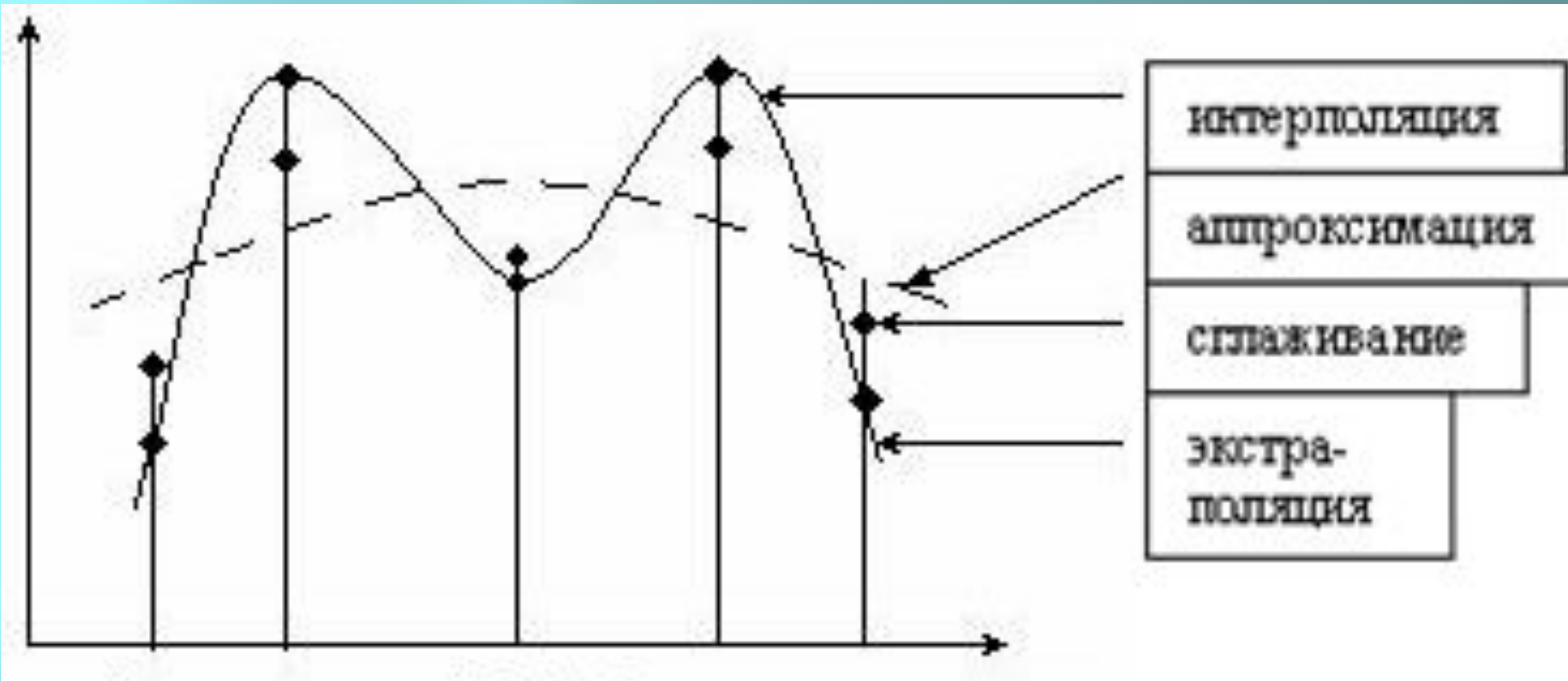
при построении аппроксимирующей функции *ϕ(x)* возможно требовать минимальности отклонения одной функции от другой на некотором непрерывном множестве точек, например, на отрезке [*a*,*b*].

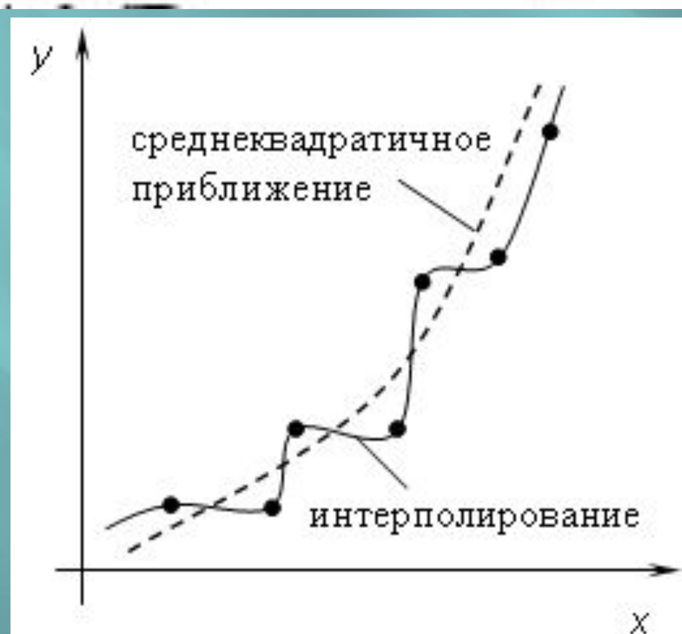
Точечной

Аппроксимация, при которой приближение строится на заданном дискретном множестве точек $\{x_i\}$, называется *точечной*.



Исходная функция f(x), заданная таблично
Аппроксимирующую функцию φ(x) строят так, чтобы отклонения (в некотором смысле) φ(x) от f(x) в заданной области было наименьшим
Аппроксимирующую функцию φ(x) строят так, чтобы в точках, в которых задана функция f(x) значения φ(x) совпадали бы со значениями f(x)
Нахождение такой аппроксимирующей функции φ(x), которая была бы более гладкой на заданном промежутке(в определенном смысле), чем f(x).
Предсказание поведения функции f(x) за пределами заданной области
аппроксимация
интерполяция
сглаживание
экстраполяция


интерполяция
аппроксимация
сглаживание
экстра-
поляция


y
среднеквадратичное
приближение
интерполирование
x

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

Пусть функция $y = f(x)$. задана таблицей значений

x	x_0	x_1	…	x_n
f(x)	y_0	y_1	…	y_n

Аппроксимирующую функцию $\phi(x)$ будем строить таким образом, чтобы ее значения в точках { x_i , i=0,1,….n} совпадали с табличными значениями заданной функции $f(x)$:

$$\varphi(x_0) = y_0, \quad \varphi(x_1) = y_1, \ldots\ldots, \quad \varphi(x_n) = y_n \qquad (1)$$

.

Такой способ введения аппроксимирующей функции называют *лагранжевой интерполяцией*, а условия (1) – *условиями*

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

Глобальной –
если на всем интервале интерполяции $[x_0, x_n]$, содержащем n+1 узлов, строят один полином степени n.

Локальной (многоинтервальной) -
если интервал интерполяции $[x_0, x_n]$, разбивают на меньшие отрезки, содержащие два или более узлов, и на каждом из отрезков строят свой (локальный) интерполяционный полином соответствующей степени.

Интерполяция степенным многочленом (полиномом).

Через точек на плоскости можно провести кривую, являющуюся графиком степенного многочлена (полинома) степени *n*, причем такой полином единственный.

Полином в каноническом виде.

$$\varphi(x) = P_n(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots.. + c_n x^n$$

Коэффициенты полинома определяются из условий Лагранжа, что приводит к системе уравнений:

$$\begin{cases} c_0 + c_1 x_0 + c_2 x_0{}^2 + \ldots.. + c_n x_0{}^n = y_0 \\ c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_1{}^2 + \ldots.. + c_n x_1{}^n = y_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_0 + c_1 x_n + c_2 x_n{}^2 + \ldots.. + c_n x_n{}^n = y_n \end{cases}$$

Определитель матрицы, известный в алгебре как *определитель Вандермонда,* если среди узлов x_i нет совпадающих :

$$A = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^{\,2} & \ldots & x_0^{\,n} \\ 1 & x_1 & x_1^{\,2} & \ldots & x_1^{\,n} \\ 1 & x_2 & x_2^{\,2} & \ldots & x_2^{\,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_n & x_n^{\,2} & \ldots & x_n^{\,n} \end{vmatrix} = \prod_{\substack{i,j=0 \\ (i \neq j)}}^{n} (x_i - x_j) \neq 0$$

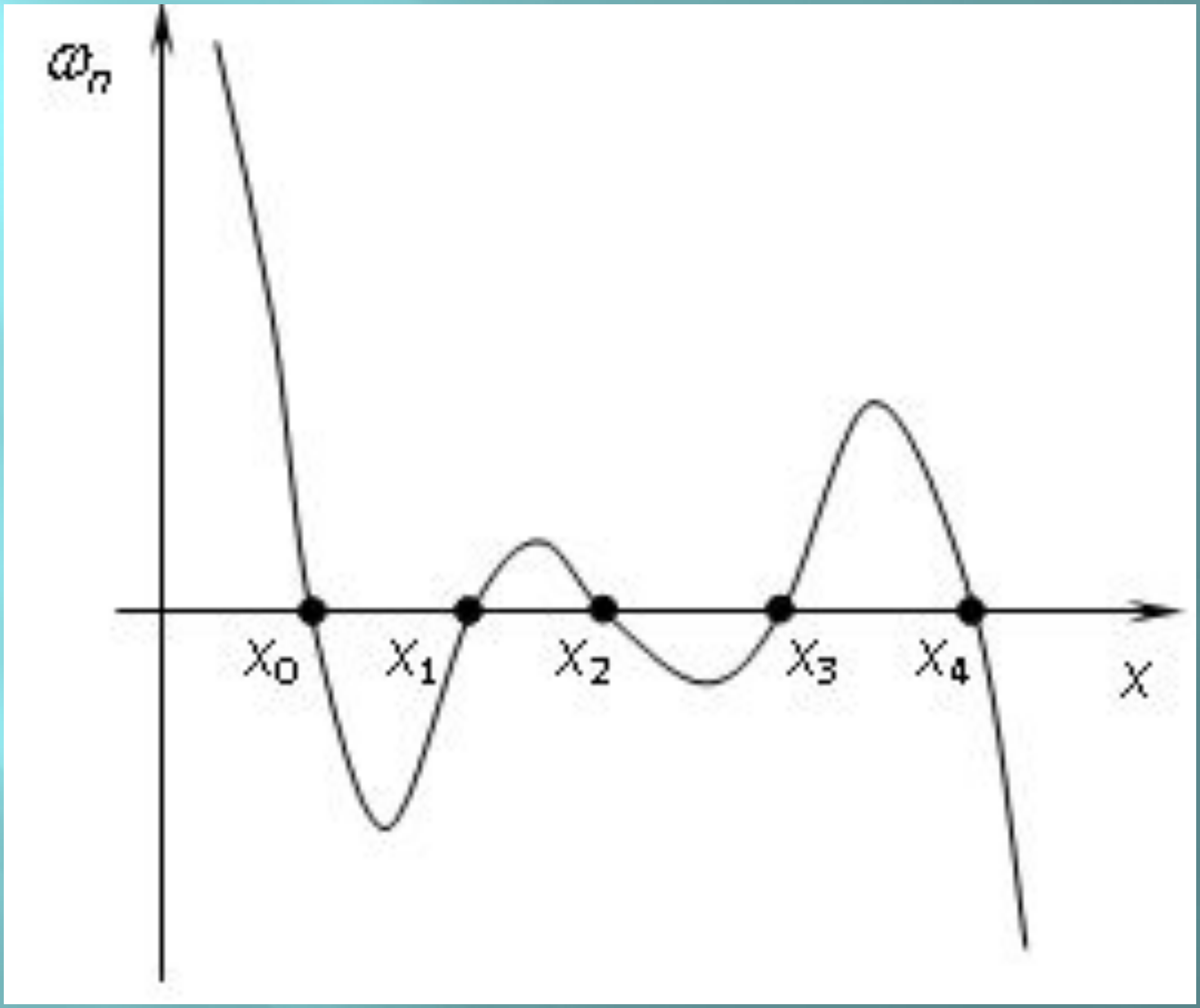
Погрешность глобальной интерполяции

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_n(x)$$

$$\omega_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)$$

$$M_{n+1} = \max_{x_0 \le x \le x_n} |f^{(n+1)}(x)|$$

$$|R_n(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega_n(x)|$$

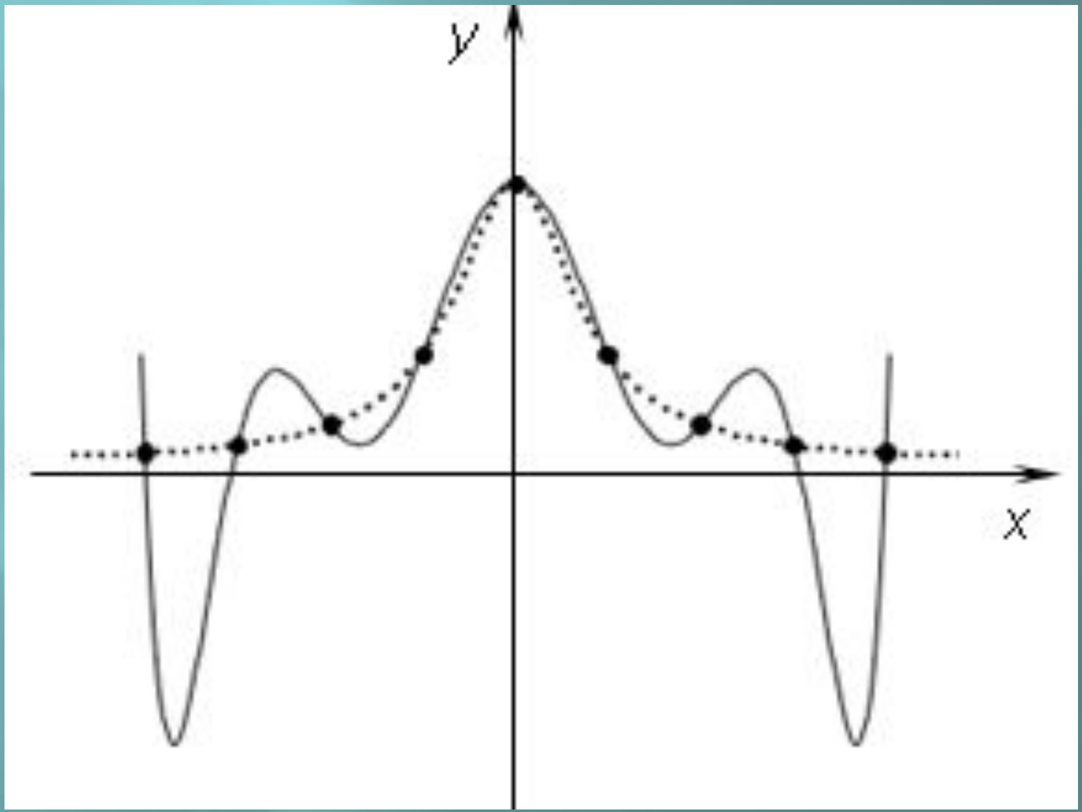


ωn
x0
x1
x2
x3
x4
x

Интерполяция функции

$$y = 1 \Big/ 1 + 25x^2$$

полиномом 8-й степени



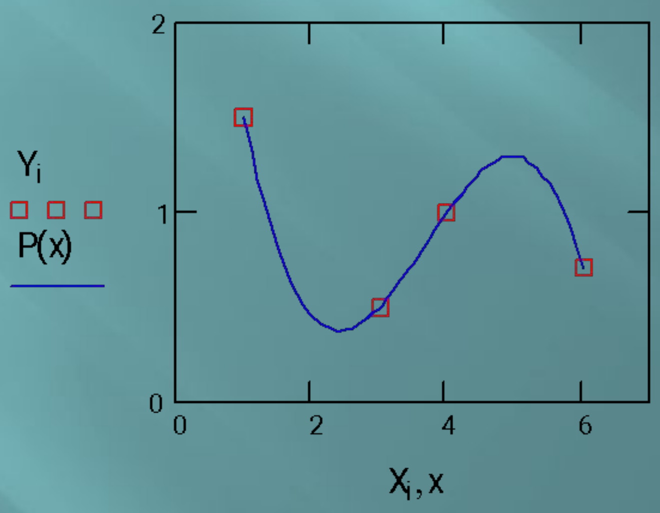
Глобальная интерполяция в пакете Mathcad

$$X := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad Y := \begin{pmatrix} 1.5 \\ 0.5 \\ 1 \\ 0.7 \end{pmatrix}$$

$n := 3$

$i := 0..n \qquad j := 0..n \qquad x := 1, 1.1..6$

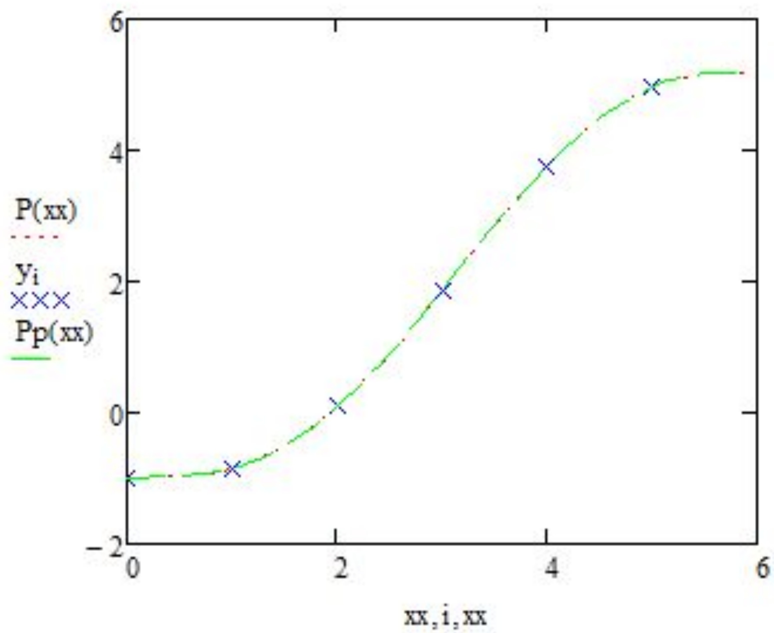
$$A_{i,j} := \left(X_i\right)^j \qquad c := A^{-1} \cdot Y \qquad P(x) := \sum_{k=0}^{n} c_k \cdot x^k$$



Глобальная интерполяция в пакете

$$S := \text{polycoeff}(x,y) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0.115 \\ -0.267 \\ 0.392 \\ -0.086 \\ 5.411 \times 10^{-3} \end{pmatrix} \qquad c = \begin{pmatrix} -1 \\ 0.115 \\ -0.267 \\ 0.392 \\ -0.086 \\ 5.411 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

$$Pp(t) := \text{polyint}(x,y,t)_0 \qquad \text{polyint}(x,y,1.5) = \begin{pmatrix} -0.502 \\ -7.609 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$



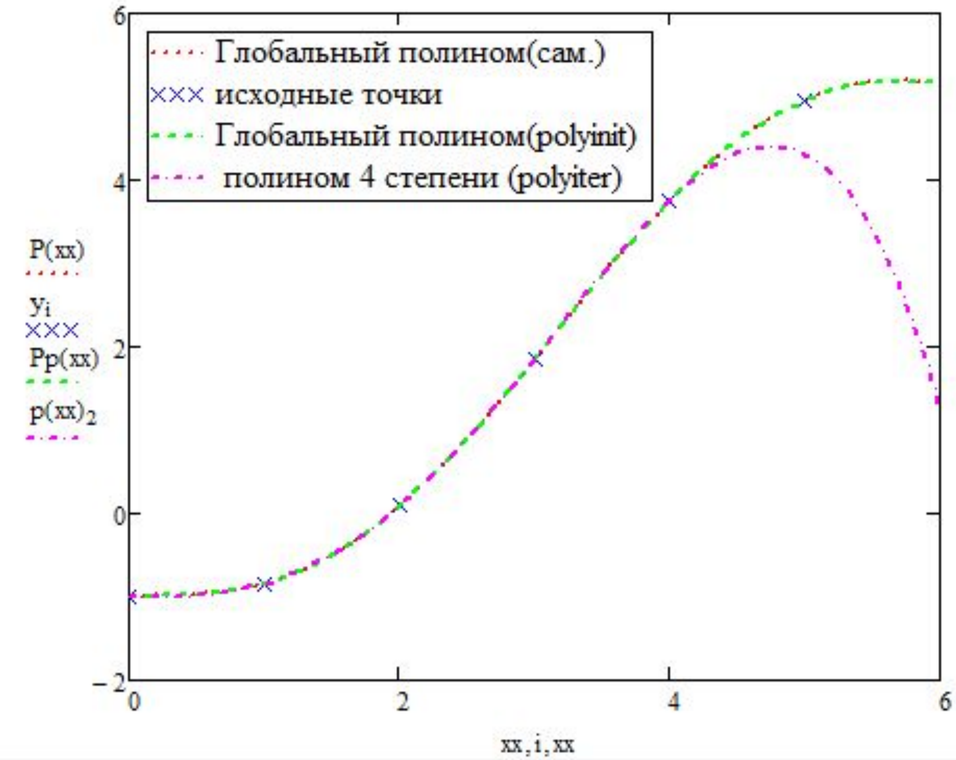
Глобальная интерполяция в пакете

$N := \text{length}(x) - 2 = 4$ степень полинома

$e := 0.1TOL = 1 \times 10^{-4}$ точность вычислений

$p(t) := \text{polyiter}(x, y, t, N, e)$ вызов функции

$p(1.5) = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -0.494 \end{pmatrix}$ результат работы функции polyiter для t=1.5



ЛОКАЛЬНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

Кусочно-линейная

Сплайн-интерполяция.

Кусочно-линейная интерполяция

$$y(x) \approx y_{i-1} + \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}(x - x_{i-1})$$

Осуществляет кусочно-линейную интерполяцию функция **linterp(vx, vy, x)**.

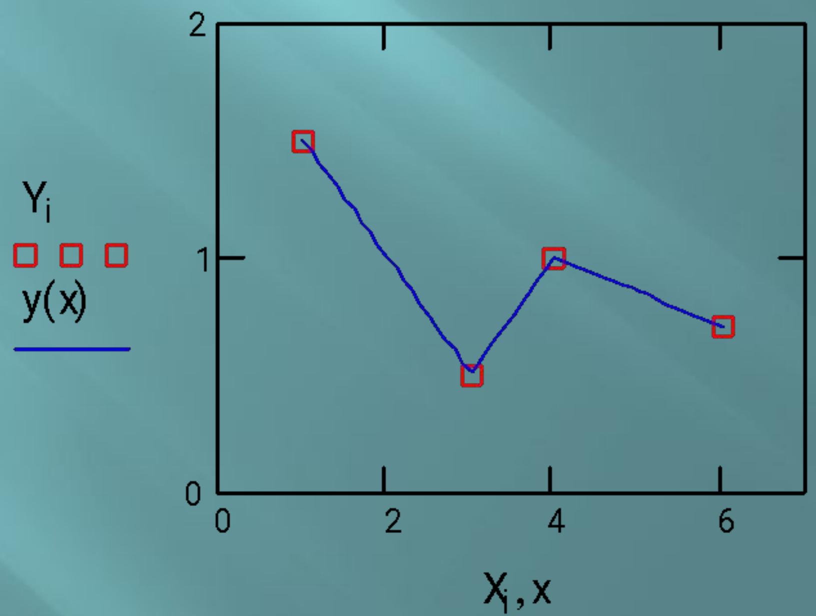
vx и **vy**, векторая, содержащие исходные данные
x - независимая переменная.

$$X := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad Y := \begin{pmatrix} 1.5 \\ 0.5 \\ 1 \\ 0.7 \end{pmatrix}$$

$n := 3$

$i := 0..n \qquad x := 1, 1.1 .. 6$

$$y(x) := \mathrm{linterp}(X, Y, x)$$



Сплайн-интерполяция.

Сплайн – это функция, которая на каждом частичном интервале представляется полиномом некоторой степени, и на всем отрезке интерполяции непрерывна вместе с несколькими своими производными.

На практике широкое применение получили сплайны третьей степени (кубические сплайны).

Кубический сплайн

$$s_i(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3$$

Условия для определения коэффициентов вытекают из так называемых условий сшивания соседних сплайнов в узловых точках:

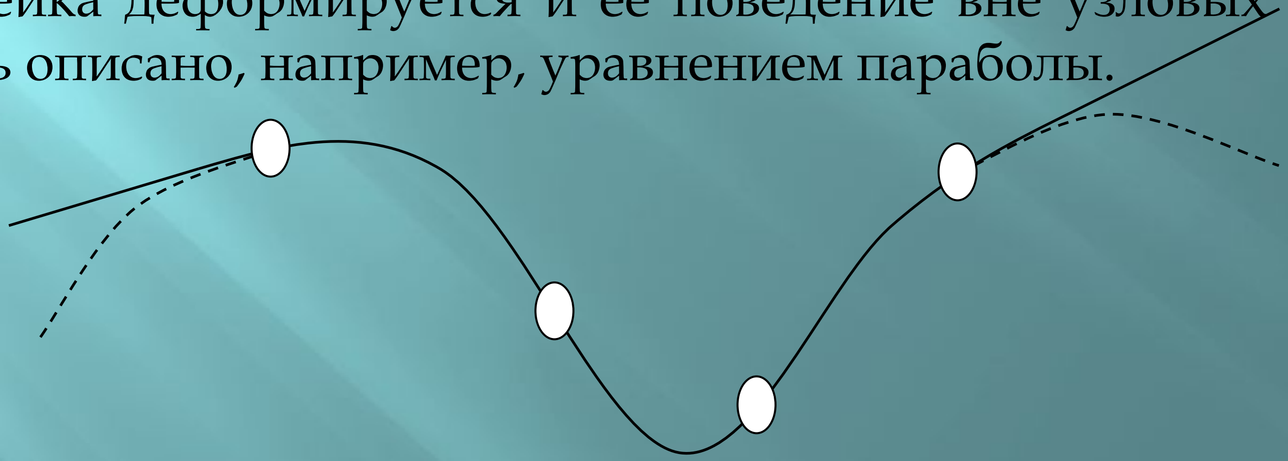
1) равенство значений сплайнов и аппроксимируемой функции в узлах – условия Лагранжа.

2) непрерывность первой и второй производной сплайнов в узлах.

3) Недостающие два соотношения получаются из условий закрепления концов сплайна.

Физико-механическое обоснование интерполяция сплайнами .

При совмещении упругой металлической линейки с узловыми точками, форма, которую примет в этом случае линейка между соседними узлами будет совпадать с графиком кубического сплайна. С физической точки зрения линейка принимает форму, при которой оказывается минимальной её потенциальная энергия, при этом форма линейки будет описываться однородным ОДУ 4-го порядка, т.е. между каждой парой соседних узлов функция является полиномом степени не выше третьей. Вне узловых точек, где линейка свободна, она описывается уравнением прямой. Если к свободным концам линейки подвесить небольшие грузы, то линейка деформируется и ее поведение вне узловых точек может быть описано, например, уравнением параболы.



Функции кубической сплайн-интерполяции.

lspline(vx, vy)

pspline(vx, vy)

cspline(vx, vy)

функции, возвращающие коэффициенты сплайнов;

interp(vs, vx, vy, x)

– функция, возвращающая значение сплайна в точке **x** по исходным векторам **vx** и **vy** и по коэффициентам сплайна **vs**.

Функции **lspline**, **pspline** и **cspline** отличаются граничными условиями, определяющими поведения сплайнов вне интервала интерполяции.

Функции кубической сплайн-интерполяции.

lspline генерирует кривую сплайна, которая приближается к прямой линии в граничных точках;
pspline генерирует кривую сплайна, которая приближается к параболе в граничных точках.
cspline генерирует кривую сплайна, которая может быть кубическим полиномом в граничных точках.

$$X := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix} \qquad Y := \begin{pmatrix} 0.7 \\ 0.6 \\ 1.1 \\ 0.7 \\ 0.8 \\ 1.2 \end{pmatrix}$$

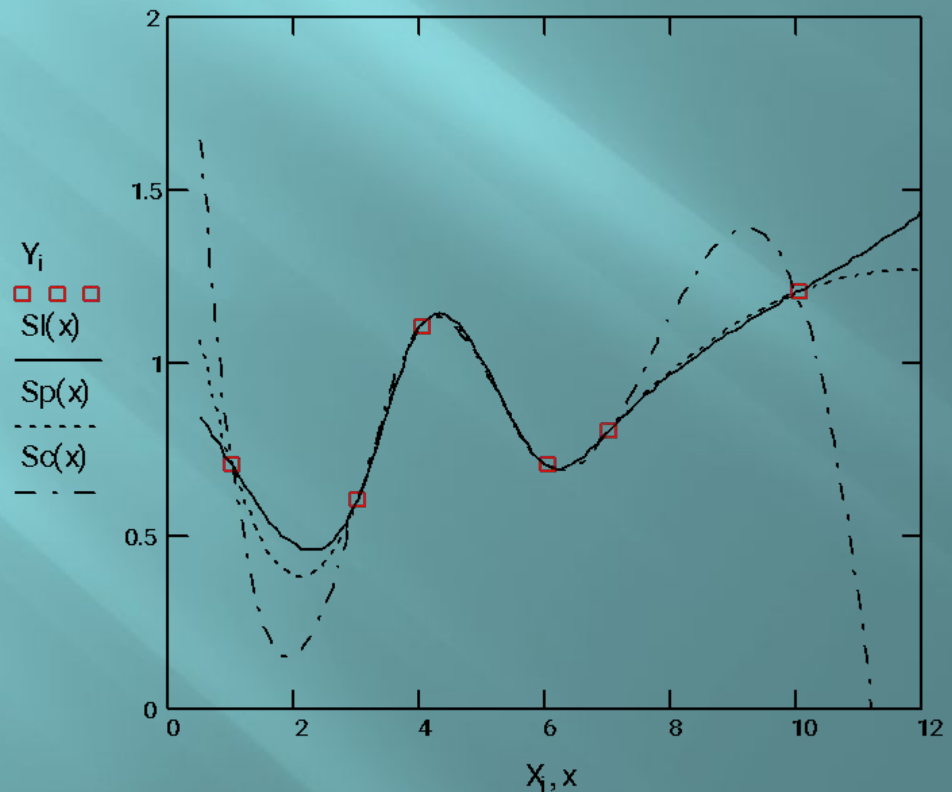
$$i := 0 .. 5$$

$$x := 0.5, 0.6 .. 12$$

$$Cl := lspline(X, Y) \qquad Sl(x) := interp(Cl, X, Y, x)$$

$$Cp := pspline(X, Y) \qquad Sp(x) := interp(Cp, X, Y, x)$$

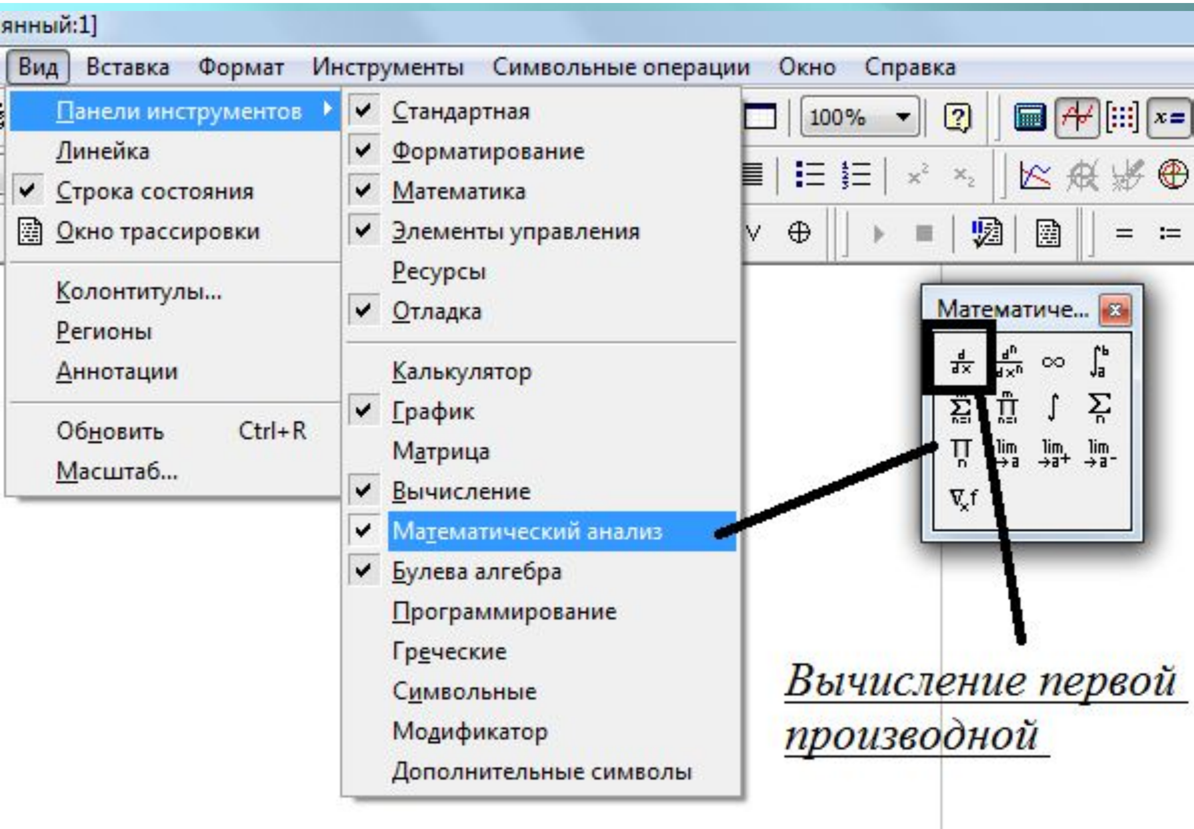
$$Cc := cspline(X, Y) \qquad Sc(x) := interp(Cc, X, Y, x)$$

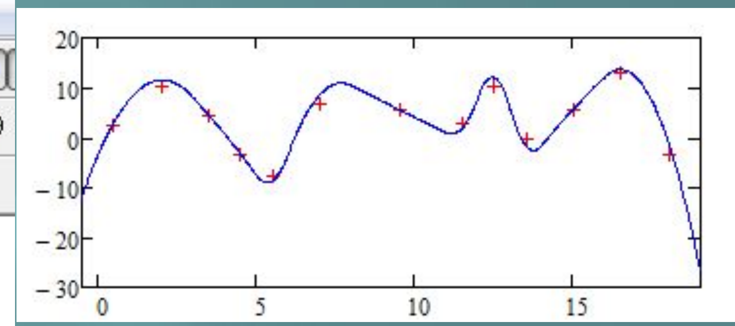


Дифференцирование таблично заданной функции

$$n := 0..\mathrm{rows}(X) - 2$$

$$\mathrm{dfit}(x) := \frac{d}{dx}\mathrm{fit}(x)$$ вычисление производной от интерполирующей функции

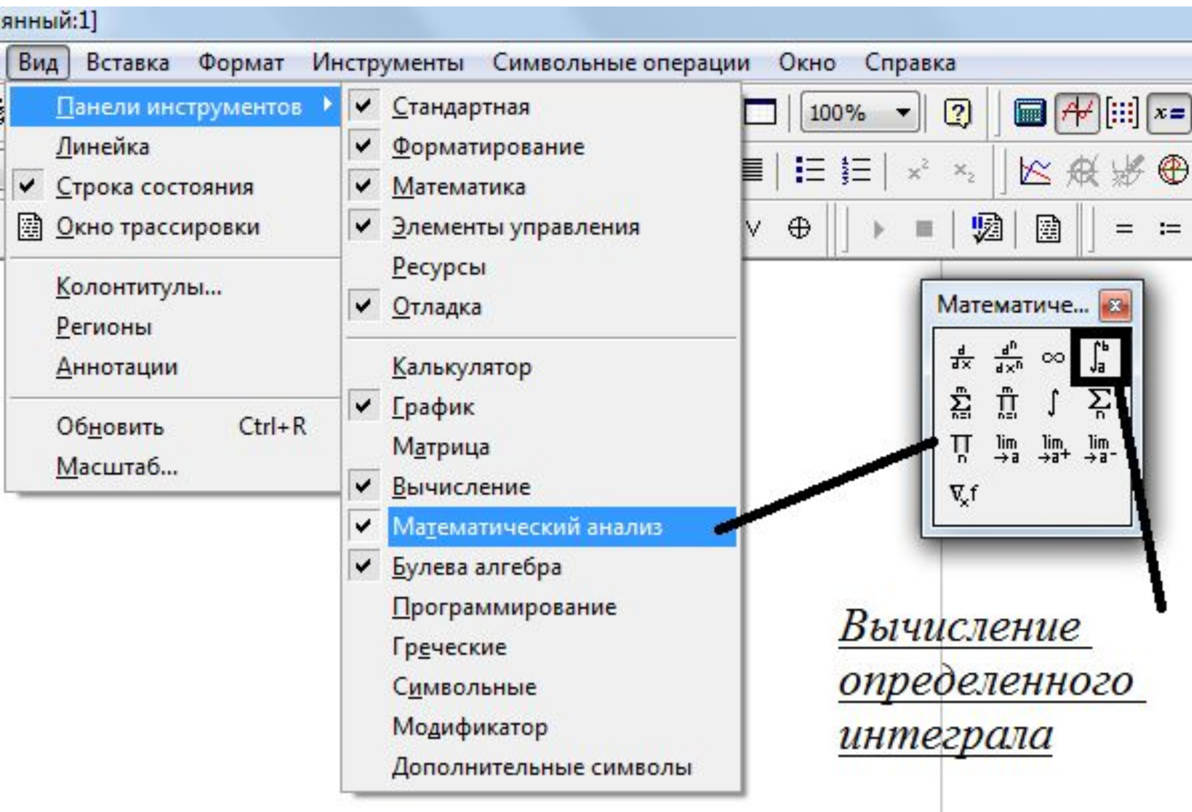


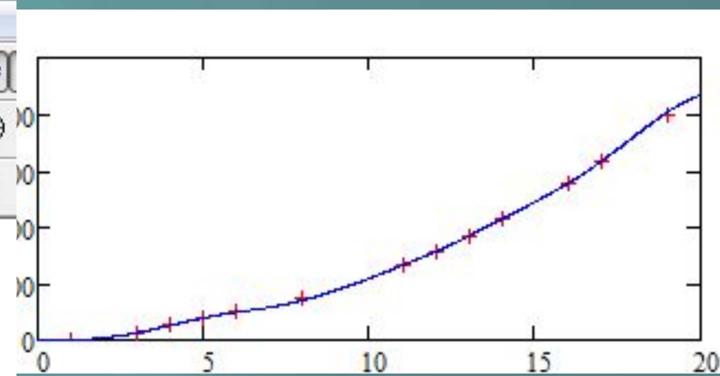


Интегрирование таблично заданной функции с переменным верхним пределом

$$ifit(x) := \int_0^x fit(\xi)\, d\xi$$

Вычислениеинтеграла от интерполяционной функци





Функции двух переменных

В пакете Mathcad существуют встроенные функции для интерполяции функции двух переменных. Эти функции имеют тот же вид , что и для интерполяции функции одной переменной, только в качестве аргументов им передаются не вектора, а матрицы.

$Mz :=$

Лист

$$Mz = \begin{pmatrix} 0.18 & 0.14 & -0.14 & -0.51 & -0.29 & 0.33 \\ 0.93 & 0.17 & -0.76 & -0.99 & -0.31 & -0.83 \\ -0.65 & -0.33 & -0.66 & 0.24 & 0 & 0 \\ -0.55 & -0.22 & 0.47 & 0.74 & -0.11 & 0 \\ -0.98 & 0.17 & 0.37 & 0.81 & 0.39 & -0.87 \\ -0.71 & 0.13 & 0.76 & 0.31 & 0.3 & -0.16 \end{pmatrix}$$

$n := \text{rows}(Mz)$

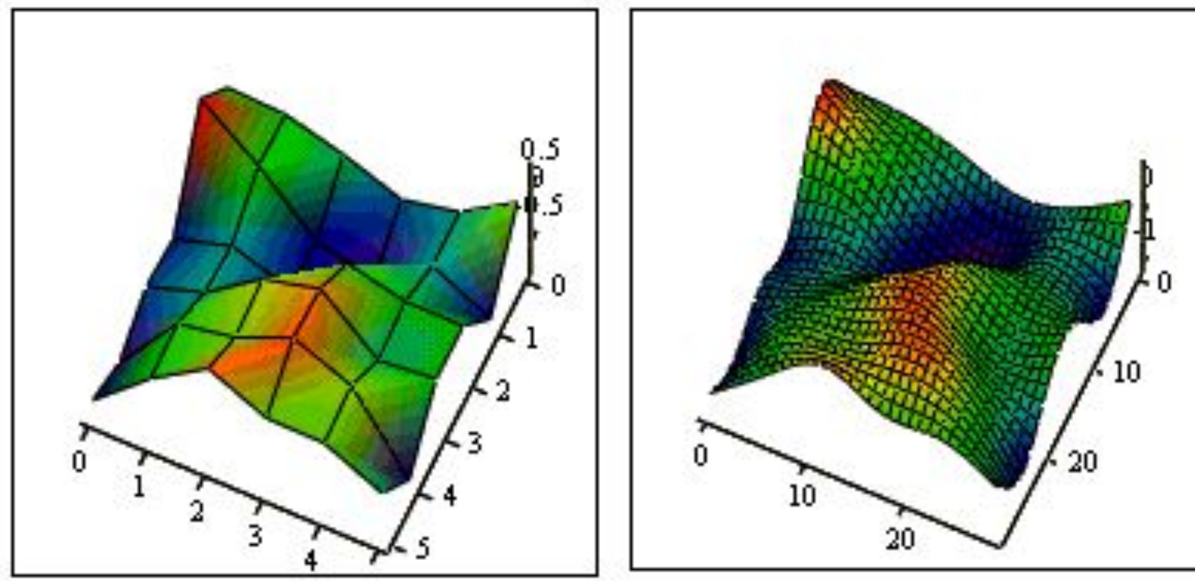
$$X := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad Y := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$Mxy := \text{augment}(\text{sort}(X), \text{sort}(Y))$

$$Mxy = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \\ 4 & 4 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$$

$S := \text{lspline}(Mxy, Mz)$

$$f(x,y) := \text{interp}\left[S, Mxy, Mz, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right]$$



Mz F

Экстраполяция функций.

В Mathcad имеется функция для проведения экстраполяции, которая учитывает распределение данных вдоль всего интервала:

predict (y,m,n)

— *функция для вектора предсказания, экстраполирующего выборку данных*.

Аргументы функции:

y — вектор действительных значений, взятых через равные промежутки значений аргумента;

m — количество последовательных элементов вектора y, согласно которым строится экстраполяция;

n— количество элементов вектора предсказаний.

Значений аргумента для данных не требуется, поскольку по определению функция действует на данные, идущие друг за другом с равномерным шагом.

Значений аргумента для данных не требуется, поскольку по определению функция действует на данные, идущие друг за другом с равномерным шагом.

$N := 5$

$i := 0..N$

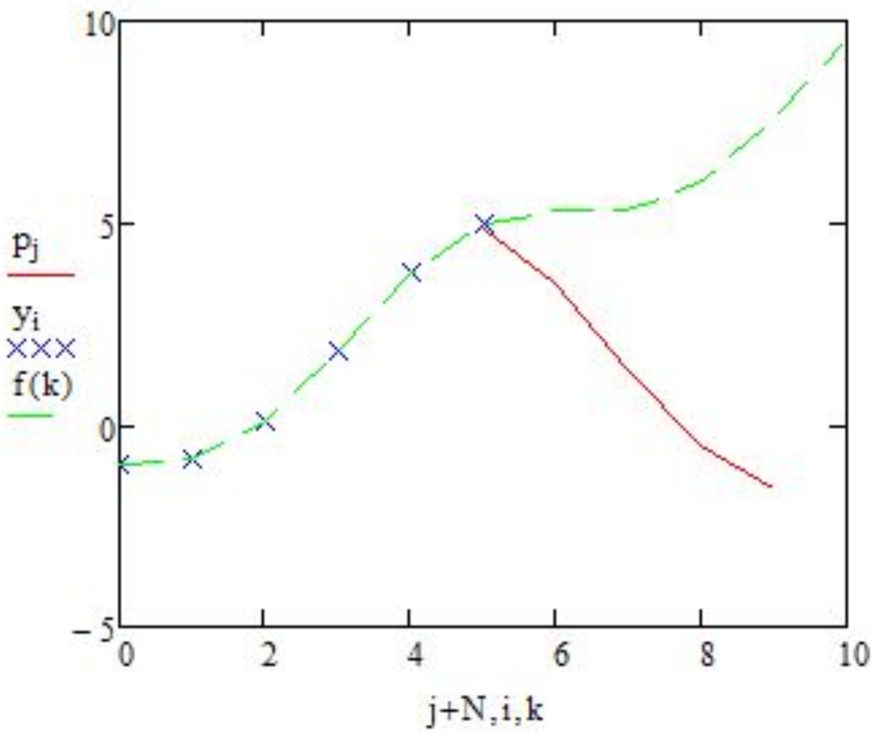
$x_i := i$ массив координат

$y_i := f(x_i)$ массив значений функции

$b := 5$ количество точек для предсказания

$p := \mathrm{predict}(y, N, b)$

$j := 0..b \qquad k := 0..N + b$



$N := 155$

$i := 0..N$

$x_i := i$ массив координат

$y_i := f(x_i)$ массив значений функции

$b := 25$ количество точек для предсказания

$p := \mathrm{predict}(y, N, b)$

$j := 0..b \qquad k := 0..N + b$