Лекция № 12. Основы цифровой обработки сигналов

12.1. Общие понятие о цифровой обработке

В последние десятилетия все более широко применяется цифровая обработка сигналов (ЦОС), которой свойственны следующие преимущества перед аналоговой обработкой:

- принципиальная возможность реализации практически любых алгоритмов обработки в реальном масштабе времени (возможности аналоговой техники значительно скромнее);
- потенциально сколь угодно высокая точность реализации алгоритмов, определяемая разрядностью цифровых устройств;
- возможность безошибочного воспроизведения сигналов при передаче и хранении на основе помехоустойчивого кодирования, которое применимо только к цифровым сигналам.

Преимущества ЦОС основываются на свойствах дискретных сигналов и цепей, которые во многом сходны с аналоговыми, но в то же время имеют и существенные особенности

Под цифровым сигналом понимают дискретный сигнал, квантованный по уровню.

Математической моделью дискретного сигнала служит последовательность $s[n]$ (дискретный аргумент принято заключать в квадратные скобки), где s – аргумент, принимающий значения из дискретного множества, (в пространственно-временной обработке сигналов функция $s[\bullet]$ принимает векторные значения).

В соответствии с теоремой отсчетов, аналоговый сигнал $s(t)$ с финитным спектром, сосредоточенным в полосе частот $(-F_в, F_в)$, может без потерь информации быть заменен дискретной последовательностью $s[n] = s(nT_d)$ своих значений, взятых с шагом $T_d < 1/2F_в$, которая и представляет собой дискретный сигнал.

Таким образом, цифровой сигнал – это последовательность, принимающая значения из дискретного (как правило, конечного) множества. Это связано с тем, что цифровые устройства всегда имеют ограниченную разрядность и отсчеты сигналов, подлежащих цифровой обработке округляются (квантуются).

Для анализа преобразований при ЦОС удобнее использовать модель дискретного сигнала.

Модель цифрового сигнала используется в тех случаях, когда рассматриваются специфические эффекты, связанные с квантованием сигнала, округлением промежуточных результатов, ограничением разрядной сетки цифрового устройства и т.п.

Для последовательности (дискретного сигнала) $s[n]$, где n принимает целые значения от -∞ до +∞ можно определить дискретное преобразование Фурье

$$S(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s[n]e^{-j\omega n}, \qquad (12.1)$$

При восс[illegible] сигнала моделью дискретного сигнала служит идеализированный АИМ-сигнал, состоящий из δ-функций, умноженных на отсчеты сигнала

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT_d)\delta(t - nT_d).$$

Преобразование Фурье этого аналогового сигнала (обозначив круговую частоту в его спектральном описании символом Ω), находится как:

$$S(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\exp(-j\Omega t)dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT_d)\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT_d)\exp(-j\Omega t)dt = \\ = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT_d)\exp(-j\Omega nT_d). \qquad (12.2)$$

Сравнивая выражения (12.1) и (12.2), легко видеть, что при

$$s[n] = s(nT_d), \\ \omega = \Omega T_d, -\pi \le \omega \le \pi \qquad (12.3)$$

их левые части совпадают. Это означает, что выражение (12.1) определяет спектральную плотность дискретного сигнала, совпадающую по форме со спектральной плотностью идеального АИМ-сигнала (который при прохождении через идеальный ФНЧ с П-образной характеристикой позволяет точно восстановить исходный аналоговый сигнал).

Из условия (11.3) следует, что $-\pi/T_d \le \Omega \le \pi/T_d$, или, что то же самое $-\Omega_d/2 \le \Omega \le \Omega_d/2$, где $\Omega_d = 2\pi F_d = 2\pi/T_d$ – круговая частота дискретизации.

Иными словами, мы вновь получили условие выбора частоты дискретизации, как минимум, вдвое выше верхней частоты спектра аналогового сигнала.

Таким образом, при условии финитности спектра и правильного выбора шага дискретизации, любые действия над дискретным сигналом эквивалентны соответствующим действиям над аналоговым сигналом и обработка сигнала может производиться в цифровой форме.

Рассматривая выражение (12.1) как разложение 2π-периодической функции аргумента ω в комплексный ряд Фурье по базисным функциям $\exp(jn\omega)$, $-\infty \le n \le \infty$, очевидно, отсчеты $s[n]$ не что иное, как коэффициенты этого ряда и могут быть найдены по общей формуле для вычисления коэффициентов комплексного ряда Фурье:

$$s[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega, \quad -\infty \le n \le \infty. \tag{12.4}$$

Это выражение представляет собой обратное преобразование Фурье для последовательности (дискретного сигнала).

12.2. Квантование сигнала

Операция квантования непрерывной величины состоит в том, что множество ее возможных значений заменяется определённым конечным числом значений.

Существующие устройства квантования обычно осуществляют равномерное квантование сигналов, при котором границы интервалов квантования размещаются равномерно в заданном диапазоне значений сигнала, а значения уровней квантования располагаются посередине между этими границами.

При равномерном квантовании количество порогов квантования оценивается величиной

$$r = (u_{\max} - u_{\min})/\Delta u,$$

где $u_{\max}$ и $u_{\min}$ – максимальная и минимальная амплитуды дискретизируемого сигнала.

Пороги квантования разбивают интервал $(u_{\max} - u_{\min})$ на $(r + 1)$ подинтервалов – уровней квантования.

Отсчет непрерывного процесса в АЦП преобразуется в двоичный код из m разрядов, каждый из которых представлен нулем или единицей. Число разрядов определяется числом уровней квантования:

$$m = [\log_2(r + 1)].$$

При обработке, когда требуется осуществлять цифровую фильтрацию сигналов и компенсацию помех, число уровней квантования нужно увеличивать, чтобы уменьшить по возможности искажения сигналов и помех.

На практике часто выбирают $\Delta u = u_{min} \approx \sigma_ш$, где $\sigma_ш{}^2$ – дисперсия собственного шума приемника. При этом число порогов квантования равно $r = d$ - 1, где $d = u_{max}/\sigma_ш$ – динамический диапазон аналоговой части приемника. Отсюда получаем требуемое число разрядов кода и соответственно число разрядов АЦП:

$$m = [\log_2 d].$$

Следующий шаг в преобразовании сигнала состоит в переводе квантованного сигнала в цифровой сигнал. Эта операция называется кодированием сигнала.

12.3. Кодирование сигнала

Сначала рассмотрим свойство системы счисления – позиционность, для этого возьмём число, например 777. В нем один и тот же знак "7" участвует 3 раза, но обозначает: справа – семь единиц, в центре – семь десятков, а слева – семь сотен.

Т.е. при записи числа цифра может иметь одно начертание, а значения, в зависимости от места (позиции) разряда, на котором она стоит – разные. Такой принцип построения чисел называется позиционным. Для записи любых сколь угодно больших чисел достаточно десяти цифр.

Каждая позиция, или разряд, числа имеет определенный "вес" (единицы, десятки, сотни и т.д.), поэтому число 777 можно расписать как

$$777 = 7\times10^2 + 7\times10 + 7,$$

т.е. семь сотен плюс семь десятков плюс семь единиц.

Если вместо чисел записать буквы, то можно получить общую форму представления числа:

$$M = a_n\times10^n + a_{n-1}\times10^{n-1} + ... + a_1\times10 + a_0$$

или сокращенную (опуская степени числа 10) – через коэффициенты:

$$M = (a_n a_{n-1} \ ... \ a_1 a_0)$$

Число 10 является основанием системы счисления. Коэффициенты a_0 (число единиц), a_1 (число единиц второго разряда, т.е. десятков), a_2 (число единиц третьего разряда, т.е. сотен) и т.д. могут принимать значения, не превышающие основания системы: от 0 до 9.

Основанием системы счисления может быть любое целое число, т.е. число можно представить комбинацией степеней основания, например, 7:

$$M = a_n \times 7^n + a_{n-1} \times 7^{n-1} + ... + a_1 \times 7 + a_0$$

Ясно, что значения коэффициентов a_0, a_1,...,a_n должны теперь быть не больше нового основания, т.е. 7: они могут принимать значения от 0 до 6.

Представим число 777 в семеричной системе, разлагая его по степеням основания 7:

$$(777)_{10} = 2 \times 7^3 + 1 \times 7^2 + 6 \times 7.$$

Если опустить степени числа 7, как мы делаем при записи чисел в десятичной системе, то получим семеричную запись этого числа: $(2160)_7$. Здесь цифра 7 в индексе указывает основание системы.

В пятеричной позиционной системе всего пять цифр: 0, 1, 2, 3, 4. В ней число 777 будет представляться количеством "пятерок","двадцатипяток" и т.д.:

$$(777)_{10} = 1 \times 5^4 + 1 \times 5^3 + 1 \times 5^2 + 0 \times 5 + 2 = (11102)_5.$$

Как видно, существует много различных позиционных систем счисления, отличающихся только основаниями. И все они, вообще говоря, равнозначны: ни одна из них не имеет явных преимуществ перед другой.

Число 2 – это самое меньшее из чисел, которое можно взять за основание системы счисления. Поэтому в двоичной системе счисления всего две цифры: 0 и 1. Число в двоичной системе запишется так:

$$M = a_n \times 2^n + a_{n-1} \times 2^{n-1} + \dots + a_1 \times 2 + a_0.$$

Если в десятичной системе "вес" каждой позиции (или разряда) числа равен числу 10 в некоторой степени, то в двоичной системе вместо числа 10 используют число 2.

Запишем число $(777)_{10}$ в двоичной системе счисления, представляя его в виде разложения по степеням двойки и отбрасывая потом при записи сами степени:

$$(777)_{10} = 1\times2^9 + 1\times2^8 + 0\times2^7 + 0\times2^6 + 0\times2^5 + 0\times2^4 + 1\times2^3 + 0\times2^2 + 0\times2 + 1 =$$
$$= (1100001001)_2.$$

Итак, в двоичной системе счисления вместо числа 777 приходится писать число 1100001001.

При записи числа в двоичной системе каждая позиция занята двоичной цифрой. Вместо слов "двоичная цифра" употребляют: "бит", от начальных и конечной букв английского словосочетания "binary digit".

С помощью 1 бита можно записать только числа 0 и 1, двух бит – числа от 0 до 3, трех бит – числа от 0 до 7, четырех бит – числа от 0 до 15 и т.д.

Десятичная запись															
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	…	15	16
Двоичная запись															
0	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001	1010	1011	1100	…	1111	10000

Чтобы записать числа от 0 до 1000 в двоичной системе счисления потребуется десять бит, т.е. даже сравнительно небольшое число занимает много позиций.

Перевод дискретных значений сигнала в цифровой двоичный код.

Математик Леонард Эйлер (XVIII век) показал, как набором гирь 1, 2, 4, 8, и 16 кг взвесить любой груз с точностью до 31 кг.

Груз (масса M, кг) математически можно представить как

$$M = a_4 \times 16 + a_3 \times 8 + a_2 \times 4 + a_1 \times 2 + a_0 = a_4 \times 2^4 + a_3 \times 2^3 + a_2 \times 2^2 + a_1 \times 2^1 + a_0 \times 2^0,$$

где коэффициент $a = 1$, если соответствующую гирю кладем на чашу весов, $a = 0$, если этой гирей не пользуемся при взвешивании.

Таким образом, процедура взвешивания сводится к представлению десятичного числа в двоичной системе счисления.

Например, нужно взвесить груз M = 21 кг. Начинаем с самой большой гири массой – 16 кг, т.к. она не перетягивает груз, оставим гирю на чаше (a_4 = 1) и добавим следующую – 8 кг. Ясно, что в этом случае чаша весов перетянет чашу с грузом. Снимем эту гирю (a_3 = 0) и установим гирю массой 4 кг. Проведя взвешивание до конца, видим, что на весах остались гири массой 16, 4 и 1 кг. Значения коэффициентов a_4 ... a_0 дают пятиразрядный двоичный код 10101 числа 21.

Считая конкретное значение тока, появляющееся на выходе электронного ключа, как бы "электрическим грузом", можно осуществить аналогичное взвешивание электронным способом. Такие "электронные весы" назвали кодером (от английского coder – кодировщик).

Допустим, значение тока равно 21 мА. Роль "электрических гирь" в кодере выполняют эталонные токи 16, 8, 4, 2 и 1 мА, которые вырабатываются специальным устройством.

Каждая проба (установка гирь) производится в ограниченные промежутки времени. Вся процедура "взвешивания" должна закончиться до прихода с электрического ключа следующего значения тока (например, для звуков речи это время составляет всего 125 мкс).

Итак, сначала отсчетное значение тока сравнивается с эталоном, равным 16 мА, и, т.к. оно больше эталона, на выходе кодера появляется импульс тока, что соответствует двоичной цифре 1. В следующий интервал времени к первому эталонному току добавляется второй величиной 8 мА. Теперь суммарный вес "электрической гири" равен 24 мА. Это больше отсчетного значения, поэтому второй эталонный генератор отключается. На данном интервале времени импульс тока на выходе кодера не появляется, что соответствует двоичной цифре 0. Далее добавляется третий эталонный ток величиной 4 мА, таким образом за время "электронного взвешивания" одного отсчётного значения кодер вырабатывает серию импульсов, полностью повторяющую двоичный код отсчетного значения сигнала.

При кодировании появляются искажений. Так, если кодированию подвергается отсчетное значение 21,7 мА, кодер все равно выдает код 10101, как и в случае целого значения 21 мА. Это и понятно, поскольку "взвешивание" проводилось с точностью до 1 мА – веса самой меньшей "электрической гири".

Такое округление чисел в технике называется квантованием, а разница между отсчетным значением тока и величиной, набираемой двоичным кодом, – ошибкой квантования.

Перевод целого числа из десятичной системы счисления в иную

Правило перевода основано на последовательном деление числа с остатком на q – новое основание системы счисления:

• Число делится на q и находится первый остаток и первое частное.

• Если первое частное больше или равно q, то оно делится на q, находятся второй остаток и второе частное.

• Если второе частное больше или равно q, то оно делятся на q.

• Деление и сравнение очередного частного с q продолжается до тех пор, пока последующее частное не станет меньше q. Если где-то произошло деление “на цело”, то остаток считается равным нулю.

• Выписав последнее частное, затем, приписав к нему остатки в обратном порядке по отношению к их появлению, с учетом нулевых остатков, получается число, записанное в системе счисления с новым основанием q.

Пример. Перевести число 243 в пятеричную систему ($q = 5$).

243 : 5 = 48 (ост. 3), 48 > 5

48 : 5 = 9 (ост. 4), 9 > 5

9 : 5 = 1 (ост. 4), 1 < 5. Процесс деления окончен.

Ответ: 1443_5 – искомая запись числа.

Современный уровень развития схемотехники позволил объединить в корпусе одной микросхемы электронный ключ и кодер. Эта микросхема выполняет преобразование непрерывной (аналоговой) электрической величины в двоичный цифровой код и называется аналого-цифровым преобразователем (АЦП). Выпускаются АЦП с 8-, 10- и 12- и более разрядными двоичными кодами.

Подсчитаем, скорость цифрового потока, полученного из телефонного аналогово сигнала при его дискретизации через 125 мкс и 8-разрядного кодирования. За секунду ток микрофона изменяется 8000 раз. В 8-разрядном кодере каждое измеренное значение тока представляется двоичным словом из 8 бит. Значит, каждую секунду в линию отправляется $8000 \times 8 = 64000$ бит, т.е. скорость цифрового потока равна 64 кбит/сек.

Кодовая комбинация из 8 бит, образующая двоичное слово, называется байтом. Символы в каждой кодовой комбинации отделены друг от друга временным интервалом $t_{\text{Т}}$, т.е. следует с частотой $f_{\text{Т}} = 1/t_{\text{Т}}$. Эта частота называется тактовой.

Преобразование отсчетов непрерывного сигнала в двоичный код называется импульсно-кодовой модуляцией (ИКМ). В настоящее время этот способ получения цифровых сигналов из аналоговых нашел наибольшее распространение.

12.4. Декодирование сигнала

При использовании ИКМ выполняются следующие преобразования аналогового сигнала: в пункте передачи амплитудно-импульсная модуляция (квантование и кодирование); в пункте приема декодирование и демодуляция квантованного АИМ сигнала.

Для восстановления аналогового сигнала из ИКМ-сигналов необходимо

– преобразовать цифровой сигнал (последовательность двоичных импульсов) в квантованный АИМ сигнал (такое преобразование называется декодированием)

– осуществить операцию демодуляции, т.е. выделения из АИМ-сигнала аналогового сигнала $s(t)$.

Полученный аналоговый сигнал отличается от переданного, т.к. образуется из квантованных импульсов, амплитуды которых равны не мгновенным значениям сигнала $s(t)$, а ближайшим разрешенным значениям. Таким образом, операция квантования вносит в процесс передачи сигнала неустранимую ошибку, которая тем меньше, чем больше уровней квантования.

Как узнать, какое десятичное число скрывается под его записью в двоичной системе? Правило перевода: под каждым разрядом двоичного числа записать его "вес". Те "веса", которые соответствуют единичным разрядам, нужно сложить. Полученная сумма и явится десятичным числом.

Вот перед нами число 1001011, записанное в двоичной нумерации. Поступаем согласно сказанному выше:

1	0	0	1	0	1	1
$2^6 = 64$	$2^5 = 32$	$2^4 = 16$	$2^3 = 8$	$2^2 = 4$	$2^1 = 2$	$2^0 = 1$

Следовательно, число 1001011 складывается из единицы, двойки, восьмерки и шестидесяти четырех (64 + 8 + 2 + 1), т.е. оно равно 75.

Декодер ИКМ-сигнала состоит из преобразователя последовательного кода в параллельный (рис. 12.2), на выходах которого появляется набор единиц и нулей, соответствующий принятой кодовой комбинации.

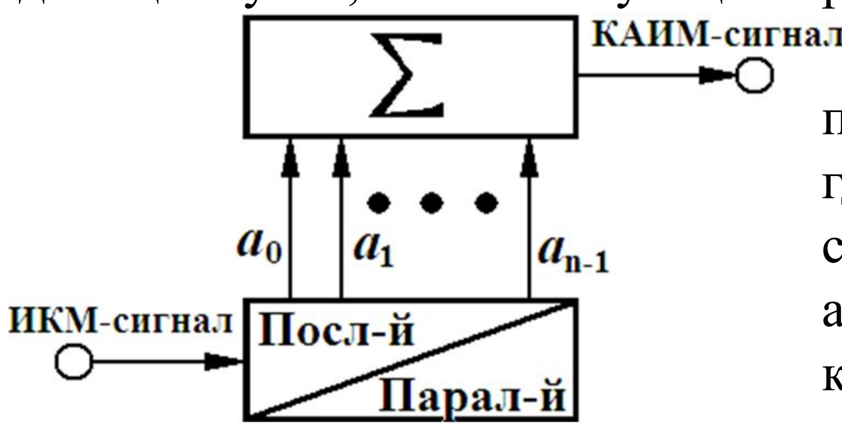

Рис. 12.2. Декодер ИКМ-сигнала

Каждая единица (токовый импульс) поступает на вход сумматора с весом, где увеличивается в 2^k раз. На выходе сумматора возникает импульс, амплитуда которого определяется кодовой комбинацией на входе декодера.

Например, для кодовой комбинации 0100110 на 1-й, 4-й, 5-й и 7-й входы сумматора – напряжение не подается, а на 2-й, 3-й и 6-й входы подается напряжение, которое увеличивается соответственно в 2^1, 2^2 и 2^5 раз. На выходе сумматора появляется напряжение, пропорциональное $2^1 + 2^2 + 2^5 = 38$, т.е. квантованный АИМ сигнал.

Далее из отсчетных значений необходимо получить непрерывные. Для этого м.б. применён, например, обычный конденсатор небольшой емкости. При кратковременном воздействии отсчетного значения тока, он мгновенно зарядится и будет удерживать заряд до следующего кратковременного воздействия.

Конечно, восстановленная т.о. кривая непрерывного тока будет отличаться от той, которая была, например, на клеммах микрофона: она будет иметь ступеньки между отсчетными значениями. Можно сказать, что процесс взятия отсчетных значений и последующего восстановления непрерывной кривой тока микрофона сопровождается специфическими искажениями, которые могут повлиять на качество воспроизведения звука.

Однако на практике для восстановления тока используют не конденсатор, а более сложные схемы, делающие форму восстановленного тока похожей на форму исходного тока и тем самым сводящие на нет действия указанных искажений.