БАЛТИЙСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ ИММАНУИЛА КАНТА

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Неоднородное одномерное уравнение теплопроводности

Метод Фурье

Технология решения

Первая краевая задача

Jean Baptiste Joseph Fourier

Уравнения теплопроводности.

Уравнение теплопроводности – это дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка, которое описывает распространение температуры в заданной области пространства, а также некоторые другие процессы.

В случае, когда пространство одномерное, уравнение принимает вид:

$$\rho(x)\,\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + q(x,t)\,u = F(x,t)$$

где ρ, q, F – заданные функции, $u(x,t)$ – искомая функция, t – время, x – координата в R^n.

В случае, когда $k(x) = const \equiv a^2, \rho(x) = 1$, и $q(x,t) = 0$ (например, задача о нагревании однородного стержня) это уравнение принимает простейший вид:

$$u_t - a^2 u_{xx} = F(x,t)$$

В общем случае его решение записывается в виде интегралов Пуассона.

Лекция . Решение первой краевой задачи для уравнения теплопроводности.

Рассмотрим неоднородное уравнение теплопроводности с граничными условиями первого рода на отрезке. Краевая задача ставится следующим образом. Требуется найти решение $u(x,t)$ задачи:

$$u_t - a^2 u_{xx} = F(x,t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0 \qquad (1)$$

$$u(x,0) = \varphi(x); \qquad 0 \le x \le l \qquad (2)$$

$$u(0,t) = \mu(t); \qquad t > 0 \qquad (3)$$

$$u(l,t) = \nu(t). \qquad (4)$$

Воспользуемся методом Фурье.

1. **Предварительно сведём эту задачу к задаче с однородными граничными условиями.**

1) Введём вспомогательную функцию:

$$w(x,t) = \mu(t) + [\nu(t) - \mu(t)]\frac{x}{l} \qquad (5)$$

Тогда

$$\begin{matrix} w(0,t) = \mu(t) \\ w(l,t) = \nu(t) \end{matrix} \qquad (6)$$

2) Введём ещё новую неизвестную вспомогательную функцию $v(x,t)$:

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t) \qquad (7)$$

где функция $w(x,t)$ определяется формулой (5) и удовлетворяет условиям (6).

3) Получим для функции $v(x,t)$ уравнение, а также граничные и начальные условия.

Подставим для этого (7) в (1). Поскольку:

$$u_t(x,t) = v_t(x,t) + w_t(x,t) = v_t(x,t) + \mu_t(t) + [\nu_t(t) - \mu_t(t)]\frac{x}{l},$$

$$u_{xx}(x,t) = v_{xx}(x,t) + w_{xx}(x,t) = v_{xx}(x,t),$$

то $v(x,t)$ удовлетворяет уравнению:

$$v_t(x,t) = a^2 v_{xx}(x,t) + F_1(x,t),$$

где

$$F_1(x,t) = F(x,t) - \left\{\mu_t(t) + [\nu_t(t) - \mu_t(t)]\frac{x}{l}\right\}$$

Начальные условия для $v(x,t)$, ($v = u - w$) как следует из условий (2) и (5), имеют вид:

$$v(x,0) = u(x,0) - w(x,0) = \varphi(x) - \left\{\mu(0) + [\nu(0) - \mu(0)]\frac{x}{l}\right\} = \varphi_1(x)$$

Граничные условия для $v(x,t)$, ($v = u - w$) как следует из условий (3), (4), и (6) имеют вид:

$$v(0,t) = u(0,t) - w(0,t) = \mu(t) - \mu(t) = 0$$

$$v(l,t) = u(l,t) - w(l,t) = \nu(t) - \nu(t) = 0$$

Таким образом, для функции $v(x,t)$ имеем задачу:

3. Неоднородное одномерное уравнение теплопроводности с однородными граничными условиями:

$$v_t - a^2 v_{xx} = F_1(x,t), \quad 0 < x < l, \qquad t > 0 \qquad (8)$$

$$v(x,0) = \varphi_1(x); \qquad 0 \le x \le l \qquad (9)$$

$$v(0,t) = 0; \qquad t > 0 \qquad (10)$$

$$v(l,t) = 0. \qquad (11)$$

Решение этой задачи будем искать в виде:

$$v(x,t) = v^{(1)}(x,t) + v^{(2)}(x,t),$$

где $v^{(1)}$ - решение задачи:

$$v^{(1)}{}_t - a^2 v^{(1)}{}_{xx} = F_1(x,t) \qquad (12)$$

$$v^{(1)}(x,0) = 0; \qquad (13)$$

$$v^{(1)}(0,t) = 0; \qquad (14)$$

$$v^{(1)}(l,t) = 0; \qquad (15)$$

то есть удовлетворяет неоднородному уравнению с нулевыми начальными и граничными условиями.

Функция $v^{(2)}(x,t)$ - это решение задачи:

$$v^{(2)}{}_t(x,t) - a^2 v^{(2)}{}_{xx}(x,t) = 0 \qquad (16)$$

$$v^{(2)}(x,0) = \varphi_1(x); \qquad (17)$$
$$v^{(2)}(0,t) = 0; \qquad (18)$$
$$v^{(2)}(l,t) = 0; \qquad (19)$$

то есть удовлетворяет <u>однородному</u> уравнению с <u>заданными ненулевыми начальными</u> и <u>нулевыми граничными</u> условиями.

Решим задачу (16) – (19) методом Фурье.

1. **Представим искомую функцию в виде:**

$$v^{(2)}(x,t) = X(x)\,T(t)\,.$$

2. **Подставим в (2.3). Получаем уравнение:**

$$X(x)\,T_t(t) = a^2 X_{xx}(x)\,T(t)$$

3. Разделим обе части этого уравнения на $a^2 X(x)\,T(t)$. Получим:

$$\frac{1}{a^2}\frac{T_t(t)}{T(t)} = \frac{X_{xx}(x)}{X(x)}\,.$$

4. Так как в левой части уравнения у нас находится функция, зависящая только от t, а в правой – только от x, то фиксируя любое значение x в правой части, получаем, что для любого t значение левой части уравнения постоянно то есть равно $\lambda = const$. Точно таким же способом убеждаемся, что и правая часть постоянна, то есть равна некоторой константе $-\lambda$.

5. Получим:

$$\frac{1}{a^2}\,\frac{T_t(t)}{T(t)} = \frac{X_{xx}(x)}{X(x)} = -\lambda, \qquad \lambda = const\ .$$

Знак минус перед λ взят для удобства, чтобы получить уравнения для функций $X(x)$ и $T(t)$ в стандартном виде $(**)$ (со знаком плюс). Таким образом мы получаем два линейных дифференциальных уравнения:

$$X_{xx}(x) + \lambda\, X(x) = 0 \qquad (**\,a)$$
$$T_t(t) + \lambda\, T(t) = 0 \qquad (**\,b)$$

6. Граничные условия исходной задачи имеют вид :

$$v^{(2)}(0,t) = X(0)\,T(t) = 0\ ,$$
$$v^{(2)}(l,t) = X(l)\ T(t) = 0$$

Из этих соотношений следует, что: $X(0) = X(l) = 0$, $T(t) \neq 0$. Так как в противном случае мы имели бы решение $v^{(2)}(x,t) = 0$, а мы ищем только нетривиальные решения.

7. С учетом полученных граничных условий для функции $X(x)$ мы получаем известную задачу Штурма - Лиувилля:

$$X_{xx}(x) + \lambda X(x) = 0\,, \qquad X(0) = X(l) = 0\,.$$

Решение этого линейного дифференциального уравнения предполагает <u>три случая</u> (в зависимости от величины параметра λ).

1) $\lambda < 0$.

В этом случае общий вид решения будет следующим:

$$X(x) = C_1 exp\left(\sqrt{-\lambda}\,x\right) + C_2 exp(-\sqrt{-\lambda}\,x)$$

Но тогда в силу граничных условий получим:

$$\begin{aligned} &X(0) = C_1 + C_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = -\,C_2 \\ &X(l) = C_1\left[exp\left(\sqrt{-\lambda}\,l\right) - exp(-\sqrt{-\lambda}\,x)\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad X(x) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X(x)\,T(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad T(t) = 0 \quad \Rightarrow \qquad v^{(2)}\,(x,t) = 0$$

Поскольку мы ищем нетривиальное решение, следовательно это решение не подходит.

2) $\lambda = 0$.

В этом случае общий вид решения будет следующим:

$$X(x) = C_1 x + C_2$$

Но тогда:

$$\left.\begin{aligned} X(0) &= C_1 0 + C_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0 \\ X(l) &= C_1 l + C_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0 \end{aligned}\right. \Rightarrow X(x) = 0 \quad X(x)\,T(t) = v^{(2)}(x,t) = 0$$

Получается тривиальное решение. Значит этот вариант тоже не подходит.

3) $\lambda < 0$.

В этом случае общий вид решения будет следующим:

$$X(x) = C_1 \cos(\sqrt{\lambda}\, x) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda}\, x)$$

Подставив граничные условия, получаем:

$$X(0) = C_1 = 0, \quad X(l) = C_2 \sin(\sqrt{\lambda} l) = 0$$

Мы ищем только нетривиальные решения. **Значит $C_2 \neq 0 \;\Rightarrow$**

$$\sin(\sqrt{\lambda} l) = 0 \;\Rightarrow\; \sqrt{\lambda} l = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = \lambda_n = (\pi n/l)^2, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

В результате получаем

$$X(x) = X_n(x) = C_n \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right), \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Здесь λ_n - собственные значения, а $X_n(x)$ - собственные функции дифференциального оператора решаемого уравнения.

8. С учетом найденных λ, выведем общее решение линейного уравнения $(** \ b)$:

$$T_t(t) + a^2\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 T(t) = 0$$

9. Это уравнение легко интегрируется. В результате получаем следующее решение:

$$T(t) = T_n(t) = D_n exp\left(-a^2(\pi n/l)^2 t\right), \quad D_n = const$$

10. В результате у нас получилось бесконечное количество частных решений

$$v_n^{(2)}(x,t) = X_n(t)\, T_n(t)$$

уравнения (16). Все эти частные решения линейно независимы.

Поскольку линейная комбинация любого произвольного количества решений равна нулю только при условии, что все коэффициенты при них равны нулю, то логично предположить, что суммируя все эти частные решения по n от единицы до бесконечности мы получим общее решение исходной задачи. То есть:

$$v^{(2)}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n^{(2)}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \ \sin(\pi n x/l) \ exp\left(-a^2(\pi n/l)^2 t\right) \qquad (20)$$

11. Определим значения всех констант $A_n = C_n D_n$, которые зависят от номера n , из начального условия:

$$v^{(2)}(x,0) = \varphi(x).$$

Если разложить $\varphi(x)$ в ряд Фурье по $sin(\pi n x/l)$, то получим:

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \, sin(\pi n x/l),$$

Известно, что коэффициенты A_n в этом соотношении равны:

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi) sin\left(\frac{\pi n}{l}\xi\right) d\xi \qquad (21)$$

12. Общее решение $v^{(2)}(x,t)$принимает вид:

$$v^{(2)}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{l}\int_{0}^{l}\varphi(\xi)sin\left(\frac{n}{l}\xi\right)d\xi\right]sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)exp\left(-a^2(\pi n/l)^2 t\right) \qquad (22)$$

В курсе *математической физики* доказывается, что

1) **полученный ряд удовлетворяет всем условиям данной задачи, то есть функция дифференцируема (и ряд сходится равномерно),**
2) **функция удовлетворяет уравнению в области определения и**
3) **функция непрерывна в точках границы этой области.**

В дальнейшем на практических занятиях мы рассмотрим различные задачи для уравнения теплопроводности с разными начальными и краевыми условиями.

В курсе *математической физики* доказывается, что

1) **полученный ряд удовлетворяет всем условиям данной задачи, то есть функция дифференцируема (и ряд сходится равномерно),**
2) **функция удовлетворяет уравнению в области определения и**
3) **функция непрерывна в точках границы этой области.**

В дальнейшем на практических занятиях мы рассмотрим различные задачи для уравнения теплопроводности с разными начальными и краевыми условиями.

Для решения задачи (12) – (15) будем использовать метод неопределённых коэффициентов и искать решение в виде:

$$v^{(1)}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t) sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right), \qquad n = 1, 2, \ldots \qquad (23)$$

Для определения функций $B_n(t)$ подставляем функцию (23) в уравнение (12), т.е. в

$$v^{(1)}{}_t - a^2 v^{(1)}{}_{xx} = F_1(x,t)$$

Получим:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{B_n(t)_t + \left(\frac{\pi n a}{l}x\right)^2 B_n(t)\right\} sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right) = F_1(x,t), \qquad (24)$$

Разложим функцию $F_1(x,t)$ в ряд Фурье по синусам:

$$F_1(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right) \qquad (25)$$

где:

$$f_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l F_1(\xi, t)\, sin\left(\frac{\pi n}{l}\xi\right) d\xi \qquad (26)$$

Приравнивая (24) и (25), получим для $B_n(t)$ дифференциальное уравнение:

$$B_n(t)_t + \left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 B_n(t) = f_n(t), \qquad (27)$$

Из условия (13): $v^{(1)}(x, 0) = 0$ имеем начальное условие для $B_n(t)$:

$$B_n(0) = 0 \qquad (28)$$

Решение уравнения (27) при начальном условии (28) имеет вид:

$$B_n(t) = \int_0^l exp\left[-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 (t - \tau)\right] f_n(\tau) d\tau \qquad (29)$$

Тогда функция $v^{(1)}(x, t)$ определяется формулой (23).

Замечание. Если вместо граничных условий (18) – (19): $v^{(2)}(0,t) = 0$, $v^{(2)}(0,t) = 0$ в задаче (16) – (19) и вместо граничных условий (14) – (15): $v^{(1)}(0,t) = 0$, $v^{(1)}(0,t) = 0$ в задаче (12) – (15) рассмотреть граничные условия:

$$\begin{cases} v_x(0,t) = 0 \\ v(l,t) = 0 \end{cases}$$

или условия

$$\begin{cases} v_x(0,t) = 0 \\ v_x(l,t) = 0 \end{cases}$$

или условия

$$\begin{cases} v(0,t) = 0 \\ v_x(l,t) = 0 \end{cases}$$

где $v(x,t) = v^{(1)}(x,t)$ для задачи (12) – (15) и $v(x,t) = v^{(2)}(x,t)$ для задачи (16) – (19), то решение соответствующих задач будет отличаться тем, что соответствующая задача Штурма-Лиувилля для функции $X(x)$ будет иметь другой набор собственных значений λ_n и собственных функций $X_n(x)$, по которым следует раскладывать в ряд Фурье функцию $\varphi_1(x)$ в задаче (16) – (19) и функцию $F_1(x,t)$ в задаче (12) – (15).

Для задачи (1) – (4), с граничными условиями

$$\begin{cases} u_x(0,t) = \mu(t) \\ u(l,t) = \nu(t) \end{cases}$$

Вспомогательная функция $w(x,t)$ может быть найдена в виде:

$$w(x,t) = (x-l)\,\mu(t) + (x/l)^2\,\nu(t)$$

Для задачи (1) – (4), с граничными условиями

$$\begin{cases} u(0,t) = \mu(t) \\ u_x(l,t) = \nu(t) \end{cases}$$

Вспомогательная функция $w(x,t)$ может быть найдена в виде:

$$w(x,t) = \mu(t) + \left(x^2/2l\right)\nu(t)$$

Для задачи (1) – (4), с граничными условиями

$$\begin{cases} u_x(0,t) = \mu(t) \\ u_x(l,t) = \nu(t) \end{cases}$$

Вспомогательная функция $w(x,t)$ может быть найдена в виде:

$$w(x,t) = -\frac{(x-l)^2}{2l}\mu(t) + \left(x^2/2l\right)\nu(t)$$

Домашнее задание.

Задача . Решить смешанную краевую задачу:

$$u_t - \frac{1}{36} u_{xx} = 10\, sin(6x)\, sin(3t), \qquad 0 < x < \pi, \quad t > 0.$$

$$\begin{cases} u(x,0) = 31\, sin(24x) + \pi + x; \\ u(0,t) = \pi \\ u(\pi,t) = 2\pi \end{cases}$$

1) подробно с выкладками методом Фурье и

2) используя готовое решение в интегральном виде.

БЛАГОДАРЮ

ЗА

ВНИМАНИЕ