



***«Матрицы
и действия над
ними»***

1. Определение матрицы

Прямоугольная таблица чисел вида

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

называется **матрицей**.

a_{ij} - *элементы* матрицы (i – номер строки, j – номер столбца) Размер матрицы – $m \times n$

Главная диагональ матрицы –

$$a_{11}, a_{22}, \dots, a_{mn}$$

Пример:

$$A_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Виды матриц

Матрица называется *прямоугольной*, если количество ее строк не совпадает с количеством столбцов:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Матрица называется *квадратной*, если количество ее строк совпадает с количеством столбцов:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 6 & 2 & -8 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Матрица называется *нулевой*, если все ее элементы нулевые :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Квадратная матрица называется *единичной*, если элементы по главной диагонали единицы, а остальные элементы нулевые :

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Квадратная матрица называется *диагональной*, если элементы по главной диагонали отличны от нуля, а остальные элементы нулевые:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Квадратная матрица называется *симметричной*, если относительно главной диагонали для всех ее элементов выполняется условие $a_{ij} = a_{ji}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 77 \\ -1 & 77 & 3 \end{pmatrix}$$

Матрицы A и B (одинаковых размерностей) называются *равными*, если $a_{ij} = b_{ij}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 13 & 0 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 13 & 0 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Квадратные матрицы вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \boxtimes & \boxtimes \text{или} & \boxtimes \\ a_{n1} & \boxtimes & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ \mathbf{0} & \boxtimes & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называются *треугольными*.

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Прямоугольная матрица вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \boxtimes & a_{1m} & \boxtimes & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \boxtimes & a_{2m} & \boxtimes & a_{2n} \\ \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ 0 & 0 & \boxtimes & a_{mm} & \boxtimes & a_{mn} \end{pmatrix}$$

называется **квazitреугольной** (ступенчатая или трапециевидная)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Матрица, состоящая из одной строки называется *матрицей-строкой* или *строчной матрицей*.

$$A = (1 \quad -2 \quad 3)$$

Матрица, состоящая из одного столбца называется *матрицей-столбцом* или *столбцовой матрицей*

$$A = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Операции над матрицами

Линейные:

- 1) Сумма (разность) матриц;
- 2) Произведение матрицы на число.

Нелинейные:

- 1) Транспонирование матрицы;
- 2) Умножение матриц;
- 3) Нахождение обратной матрицы.

Сумма (разность) матриц

Для того, чтобы *сложить* две матрицы A и B (одинаковой размерности) нужно *сложить их соответствующие элементы*.

Для того, чтобы найти *разность матриц* A и B (одинаковой размерности) нужно *из каждого элемента матрицы A вычесть соответствующий элемент матрицы B* .

Матрица $-A$ называется матрицей *противоположной* A .

Пример: Пусть $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -6 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -4 \\ 0 & 5 & 7 \end{bmatrix}$.

Тогда $A + B = \begin{bmatrix} -1 & 7 & -10 \\ 0 & 9 & 6 \end{bmatrix}$, $A - B = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & -8 \end{bmatrix}$,

$$-A = \begin{bmatrix} -2 & -5 & 6 \\ 0 & -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Вычислите:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \\ -4 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 7 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A + B = ?$$

$$A - B = ?$$

$$B - A = ?$$

Ответ:

$$A + B = \begin{pmatrix} -3 & 9 \\ 7 & 4 \\ -6 & 10 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -7 & 4 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$B - A = \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 7 & -4 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}$$

Произведение матрицы на число

Для того, чтобы умножить матрицу A на число $\alpha \in \mathbb{R}$ нужно каждый элемент матрицы умножить на число α .

Пример: Пусть $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -6 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}$,

тогда $2 \cdot A = \begin{bmatrix} 4 & 10 & -12 \\ 0 & 8 & -2 \end{bmatrix}$.

Вычислите:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \\ -4 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 7 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2A = ?$$

$$-3B = ?$$

$$4B - 7A = ?$$

Ответ:

$$2A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 0 & 8 \\ -8 & 18 \end{pmatrix}$$

$$-3B = \begin{pmatrix} 15 & -18 \\ -21 & 0 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$$

$$4B - 7A = \begin{pmatrix} -34 & 3 \\ 28 & -28 \\ 20 & -59 \end{pmatrix}$$

Линейные операции обладают следующими **свойствами**:

$$1) A + B = B + A$$

$$2) (A + B) + C = A + (B + C)$$

$$3) A + 0 = A$$

$$4) A + (-A) = 0$$

$$5) 1 \cdot A = A$$

$$6) \alpha \cdot (\beta \cdot A) = (\alpha \cdot \beta) \cdot A$$

$$7) \alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$$

$$8) (\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$$

Матрица, полученная из данной заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером, называется матрицей, **транспонированной** относительно данной.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix}$$

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \text{ то } A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Свойства операции транспонирования:

$$1) \left(A^T \right)^T = A$$

$$2) \left(A + B \right)^T = A^T + B^T$$

$$3) \left(A \cdot B \right)^T = B^T A^T$$

Матрица A называется *согласованной* с матрицей B , если число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B :

Например:

$$1) \quad A_{m \times n}, \quad B_{n \times k}$$

$$2) \quad A_{2 \times 4}, \quad B_{4 \times 1}$$

$$3) \quad A_{m \times 2}, \quad B_{2 \times k}$$

Умножение матриц определяется для **согласованных** матриц.

Произведение матрицы $A_{m \times n} = (a_{ij})$ на матрицу $B_{n \times k} = (b_{ij})$

называется матрица $C_{m \times k} = (c_{ij})$, для которой

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj}$$

т.е. каждый элемент матрицы C равен сумме произведений элементов i -й строки матрицы A на соответствующие элементы j -го столбца матрицы B .

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A \cdot B = C &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 5 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \\ 3 \cdot 1 + 4 \cdot 5 & 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 11 & 8 \\ 23 & 18 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Свойства операции умножение матриц:

1. Свойство сочетательности или ассоциативности

$$(AB)C = A(BC)$$

2.

$$\alpha(AB) = A(\alpha B) = (\alpha A)B$$

3. Свойство распределительности (дистрибутивности)
справа и слева относительно сложения матриц

$$(A + B)C = AC + BC$$

$$C(A + B) = CA + CB$$

Вычислите:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \\ -4 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = ?$$

$$B \cdot A = ?$$

$$A^T \cdot B = ?$$

$$B^T \cdot A = ?$$

$$A^T \cdot B^T = ?$$

$$B^T \cdot A^T = ?$$