

ИГРОВЫЕ МОДЕЛИ

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Ситуации, в которых интересы участников не совпадают называются конфликтными.

Теория игр занимается построением математических моделей конфликтных ситуаций и разработкой методов решения задач возникающих в этих ситуациях.

В игре могут сталкиваться интересы двух или нескольких противников, поэтому игры подразделяются на парные и множественные.

Если во множественной игре интересы игроков совпадают, то они могут объединяться, создавая коалиции. Такие игры называются коалиционными.

Задачей теории игр является выработка рекомендаций для игроков, т.е. определение для них оптимальной стратегии.

Стратегией игрока называется система правил, однозначно определяющих поведение игрока при каждом ходе в зависимости от ситуации, сложившейся в процессе игры.

Оптимальной называется стратегия, которая при многократном повторении игры обеспечивает данному игроку максимально возможный средний выигрыш.

Количество стратегий у каждого игрока может быть конечным или бесконечным, в зависимости от этого игры подразделяются на конечные и бесконечные.

ПЛАТЕЖНАЯ МАТРИЦА

Рассмотрим простейшую математическую модель конечной конфликтной ситуации.

Имеются два участника, выигрыш одного равен проигрышу другого.

Такая модель называется **антагонистической игрой двух лиц с нулевой суммой**.

Описание игры.

Каждый из двух игроков может записать независимо от друг от друга цифры 1, 2 и 3.

Если цифра первого игрока больше цифры второго, то первый игрок выигрывает количество очков, равное разности между цифрами, если цифра первого игрока меньше цифры второго, то второй игрок выигрывает разность написанных цифр. Если разность равна нулю, то игра заканчивается вничью.

Описание стратегий.

У первого игрока три стратегии (варианта действия):

A1 (записать 1),

A2 (записать 2),

A3 (записать 3).

У второго игрока также три стратегии:

B1 (записать 1),

B2 (записать 2),

B3 (записать 3).

Игру можно представить в виде матрицы, в которой строки — стратегии первого игрока, столбцы — стратегии второго игрока, элементы матрицы — **выигрыши первого игрока**.

Такую матрицу называют **платежной**.

Формализация описания игры

	V1= записать 1	V2= записать 2	V3= записать 3
A1= записать 1	0	-1	-2
A2= записать 2	1	0	-1
A3= записать 3	2	1	0

Платежная матрица имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Задача первого игрока — максимизировать свой выигрыш.

Задача второго игрока — минимизировать свой проигрыш или минимизировать выигрыш первого игрока.

При этом предполагается, что противники одинаково разумны, и каждый из них делает все, чтобы получить наибольший выигрыш.

ВЕРХНЯЯ И НИЖНЯЯ ЦЕНА ИГРЫ

Для поиска наилучшей стратегии первого игрока найдем минимальное число в каждой строке платежной матрицы

$$\alpha_i = \min_j a_{ij}$$

- минимальные выигрыши при различных стратегиях A_i .

Первый игрок выберет стратегию, для которой α_i максимально.

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij}$$

α — гарантированный выигрыш, который может обеспечить себе первый игрок, называется **нижней ценой игры (максимин)**.

Для поиска наилучшей стратегии второго игрока найдем максимальное число в каждом столбце платежной матрицы

$$\beta_j = \max_i a_{ij}$$

- максимальные проигрыши при различных стратегиях V_j .

Второй игрок выберет стратегию, для которой β_j минимально

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij}$$

β — минимально возможный проигрыш, который может обеспечить себе второй игрок, называется **верхней ценой игры (минимакс)**.

Для матричной игры справедливо неравенство

$$\alpha \leq \beta$$

Если $\alpha = \beta$, то игра является

игрой с седловой точкой,

пара оптимальных стратегий (A_i, B_j)
- седловая точка.

В случае игры с седловой точкой величина

$$v = \alpha = \beta$$

называется ценой игры.

В этом случае говорят, что игра имеет решение в области чистых стратегий или чистыми стратегиями.

Решением игры называется: перечисление оптимальных стратегий игроков и цены игры.

Вернемся к примеру и проверим наличие решения игры в области чистых стратегий.

Находим нижнюю цену игры

	B1	B2	B3	Минимум по строкам
A1	0	-1	-2	-2
A2	1	0	-1	-1
A3	2	1	0	0
Максимум из минимумов по строкам = α =				0

Находим верхнюю цену игры

	V1=1	V2=2	V3=3	Минимум из максимумов по столбцам $= \beta =$
A1=1	0	-1	-2	
A2=2	1	0	-1	
A3=3	2	1	0	
Максимум по столбцам	2	1	0	0

Оптимальная стратегия первого игрока — A3, второго — V3. Цена игры равна нулю.

Рассмотрим ситуацию, рекомендации по разрешению которой, можно получить, применяя теорию игр.

Студент убежден, что преподаватель предвзято его оценивает, и пытается решить, стоит ли готовиться к очередному занятию.

Если он подготовится, а преподаватель устроит контрольную работу, его итоговая рейтинговая оценка улучшится на 10 пунктов.

Если контрольной не будет, знания, приобретенные при подготовке, улучшат итоговую оценку на 5 пунктов.

Если студент не готовился, а контрольной не будет, считать, что радость студента оценивается 3 баллами.

Однако, если контрольная состоится, а студент не готов, его результат будет равен нулю.

Требуется определить, каким должно быть поведение студента и преподавателя в таких условиях.

Ситуация конфликтная.

У студента две стратегии: A_1 =готовиться к занятию, A_2 =не готовиться к занятию.

У преподавателя тоже две стратегии:
 B_1 =проводить контрольную, B_2 =не проводить контрольную.

Составим платежную матрицу

	В1 (проводить контрольную)	В2 (не проводить контрольную)
А1 (готовиться к занятию)	10	5
А2 (не готовиться к занятию)	0	3

Нижняя цена игры

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij} = 5$$

Верхняя цена игры

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij} = 5$$

Есть седловая точка, следовательно, игра решается в области чистых стратегий.

Оптимальная стратегия студента: A_1 =готовиться к занятию. Оптимальная стратегия преподавателя: B_2 =не проводить контрольную. Цена игры равна 5.