ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Лекция 4

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ. МЕТОД ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ. ФОРМУЛЫ КРАМЕРА

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Линейное алгебраическое уравнение имеет вид:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b,$$

где a_i, b – известные числа, $i = \overline{1,n}$; x_i – неизвестные, $i = \overline{1,n}$.

Система ***m*** уравнений с ***n*** неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Сокращенно: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$, $i = \overline{1,m}$.

Здесь $\boldsymbol{a_{ij}}$ и $\boldsymbol{b_i}$ - произвольные числа, которые называются соответственно ***коэффициентами системы*** при переменных $\boldsymbol{x_j}$ и ***свободными членами***, $i=1,2,\ldots m$, $j=1,2\ldots,,n$.

- Обозначим матрицы:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix},$$

- тогда $\boldsymbol{A \cdot X = B}$ – запись системы в матричной форме.
- ***Решением системы*** называется вектор $\boldsymbol{X}$, который после подстановки в систему превращает все ее уравнения в тождества.
- Система называется ***совместной***, если имеет хотя бы одно решение, и ***несовместной*** – если не имеет.
- Совместная система, имеющая единственное решение, называется ***определенной***, а если она имеет более одного решения - то ***неопределенной***.
- Если система неопределенная, то каждое ее решение называется ***частным решением*** системы. Множество всех частных решений системы называется ее ***общим решением***.

- Решить систему – это, значит, выяснить, совместна ли она, а в случае совместности, найти ее общее решение.
- Две системы, имеющие одинаковое общее решение называются ***эквивалентными***.
- Система линейных уравнений называется ***однородной,*** если все её свободные члены равны нулю, т.е. $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$
- Однородная система является совместной, так как
- $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ всегда является решением системы.
- ***Расширенной матрицей*** системы называется матрица A_b системы с присоединенным столбцом свободных членов.

$$A_b = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

- ***§ 2. МЕТОД ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ***
- Рассмотрим частный случай системы линейных уравнений когда $\boldsymbol{m = n}$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

- или в матричной форме $\boldsymbol{A \cdot X = B}$.
- Основная матрица такой системы квадратная:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

- Определитель этой матрицы Δ называется определителем системы. Если определитель системы не равен нулю, то система называется невырожденной.
- Для получения решения исходной системы в этом случае, предположим, что матрица $\boldsymbol{A}$ невырожденная, т. е. определитель $|\boldsymbol{A}| \neq 0$, и для нее существует обратная матрица $\boldsymbol{A}^{-1}$.
- Умножая обе части равенства $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$ слева на матрицу $\boldsymbol{A}^{-1}$, получаем

$$A^{-1}(AX) = (A^{-1}A)X = EX = X,$$

- и решением системы будет вектор-столбец $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$.
- Пример. Решить систему уравнений методом обратной матрицы.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 7; \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0; \\ \quad -2x_2 + x_3 = 7. \end{cases}$$

- Решение. Представим систему в матричном виде:

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 3 & -1\\ 0 & -2 & 1\end{bmatrix};\ X=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix};\ B=\begin{bmatrix}7\\ 0\\ 7\end{bmatrix},$$

- т.е. в матричной форме система имеет вид $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$. Найдем определитель системы $\boldsymbol{A}=-7$. Так как $|\boldsymbol{A}|\neq 0$, то матрица $\boldsymbol{A}$-невырожденная, и для неё существует обратная матрица - $\boldsymbol{A}^{-1}$. Для ее нахождения, вначале, транспонируем матрицу $\boldsymbol{A}$.

$$A^T=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ -2 & 3 & -2\\ 3 & -1 & 1\end{bmatrix}.$$

Затем найдем алгебраические дополнения к матрице $\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}$.

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}3 & -2\\ -1 & 1\end{vmatrix}=1,\ A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-2 & -2\\ 3 & 1\end{vmatrix}=-8,$$

$$A^T=\begin{bmatrix}1&2&0\\-2&3&-2\\3&-1&1\end{bmatrix}.$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}-2&3\\3&-1\end{vmatrix}=-7,\ A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2&0\\-1&1\end{vmatrix}=-2,$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1&0\\3&1\end{vmatrix}=1,\quad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1&2\\3&-1\end{vmatrix}=7,$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2&0\\3&-2\end{vmatrix}=-4,\ A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1&0\\-2&-2\end{vmatrix}=2,$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1&2\\-2&3\end{vmatrix}=7.\quad A^{-1}=-\frac{1}{7}\begin{bmatrix}1&-8&-7\\-2&1&7\\-4&2&7\end{bmatrix}.$$

Используя формулу $\boldsymbol{X = A^{-1}B}$, найдем решения системы:

$$X = A^{-1}B = -\frac{1}{7}\begin{bmatrix} 1 & -8 & -7 \\ -2 & 1 & 7 \\ -4 & 2 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix} = -\frac{1}{7}\begin{bmatrix} 1\cdot 7+(-8)\cdot 0+(-7)\cdot 7 \\ (-2)\cdot 7+1\cdot 0+7\cdot 7 \\ (-4)\cdot 7+2\cdot 0+7\cdot 7 \end{bmatrix} = -\frac{1}{7}\begin{bmatrix} -42 \\ 35 \\ 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \\ -3 \end{bmatrix},$$

- т.е. решение системы: $\boldsymbol{x_1} = 6$, $\boldsymbol{x_2} = -5$, $\boldsymbol{x_3} = -3$. Произведем проверку:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 7; \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0; \\ \quad -2x_2 + x_3 = 7. \end{cases} \qquad \begin{cases} 6 - 2\cdot(-5) + 3\cdot(-3) = 7 \\ 2\cdot 6 + 3\cdot(-5) - (-3) = 0 \\ \quad -2\cdot(-5) + (-3) = 7 \end{cases}$$

§ 3. ФОРМУЛЫ КРАМЕРА

Матричное равенство $\boldsymbol{X = A^{-1}B}$ запишем в виде

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \cdots + A_{n1}b_n}{\Delta} \\ \dfrac{A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \cdots + A_{n2}b_n}{\Delta} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \cdots + A_{nn}b_n}{\Delta} \end{pmatrix}.$$

Здесь $A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + \ldots + A_{ni}b_n$ есть разложение определителя

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ \ldots. & \ldots. & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & b_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

по элементам i − го столбца.

Тогда имеем

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta},\ i = 1,2,\ldots,n\,.$$

Полученные формулы называются формулами Крамера.

Таким образом, невырожденная система n линейных уравнений с n неизвестными имеет единственное решение, которое может быть найдено также по формулам Крамера.

- Решить систему по формулам Крамера

$$\begin{cases} x - y + 3z = 0 \\ x + 2y + z = 1 \\ 2x + 3y + 2z = 2 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Решение

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -2, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -3,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} \mathbf{= 1}$$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{3}{2}, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 0, \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = -\frac{1}{2}.$$