

Використання нерівності Чебишева

Повертаючись до варіації (дисперсії) як міри ризику, треба зазначити, що дисперсія, звичайно, не повністю характеризує ступінь ризику, але дає змогу у деяких випадках чітко виявити граничні шанси менеджера (інвестора, підприємця).

Теоретична база цього закладена у відомій нерівності Чебишева: *ймовірність того, що випадкова величина відхиляється за модулем від свого математичного сподівання більше, ніж на заданий допуск δ , не перевищує її дисперсії (варіації), поділеної на δ^2 .*

Тут відразу треба зазначити, що варіація V деякої випадкової величини R має бути меншою, ніж δ^2 , оскільки величина ймовірності не перевищує одиниці:

$$p = V / \delta^2 \leq 1.$$

Що стосується випадкової величини X (ефективність, прибуток), то можна записати

$$P(|X - m| > \delta) \leq V / \delta^2 = \sigma^2 / \delta^2,$$

де m — математичне сподівання випадкової величини X .

Уникнення банкрутства при отриманні кредиту

Припустимо, що інвестиції здійснюються за рахунок кредиту, взятого під відсоток r_s та під заставу нерухомості. Яка ймовірність того, що інвестор не зможе повернути свій борг і позбудеться своєї нерухомості?

Це ймовірність того, що випадкова величина R набуде свого значення, яке відповідає умові

$$R < r_s,$$

або

$$-(R - m) > m - r_s.$$

Отже, одержимо:

$$P(R < r_s) = P(-(R - m) > m - r_s) \leq P(|R - m| > m - r_s) \leq \leq (V/(m - r_s))^2. \quad (3.1)$$

Звідси маємо, що шанс збанкрутувати не перевищує величини $V/(m - r_s)^2$. Звичайно при цьому мають на увазі, що обов'язково виконується умова раціональності такого вкладу «під кредит», тобто, що $m > r_s$ а оцінка (3.1) має сенс лише тоді, коли варіація (дисперсія) не дуже велика, тобто, коли виконується умова

$$V \leq (m - r_s)^2.$$

Коли задані умови (гіпотези) виконуються, то для того щоб шанс збанкрутувати був не більшим, ніж $1/9$, достатньо виконати умову (правило трьох сігм)

$$V \leq 1/9(m - r_s)^2, \text{ або } m \geq r_s + 3\sigma.$$

Слід зазначити, що тут, як один з параметрів ризику у системі кількісних оцінок ризику, виступає ймовірність несприятливої події

$$p_n = \sigma^2 / \delta^2$$

поряд з таким параметром ризику, як дисперсія (варіація). У даному випадку $p_n \leq 1/9$. Звичайно, можна сперечатися, чи задовольняє ця величина менеджера (суб'єкта прийняття рішення), чи ні. У ряді випадків величину p_n необхідно брати досить малою, інколи для забезпечення «допустимого» ризику покладають $p_n = 0,001$.

Приклад 3.17. Підприємство бере кредит під 10% річних для впровадження нових технологій. При цьому експерти оцінюють, що ризик, пов'язаний з коливанням сподіваних прибутків, становить 5%. Необхідно з імовірністю 1/9 оцінити рівень сподіваних прибутків, щоб уникнути банкрутства.

Розв'язання. Маємо, що $r_s = 10\%$, $\sigma = 5\%$. Скориставшись правилом трьох сігм, одержимо

$$m \geq 10\% + 3 * 5\% = 25\%,$$

тобто рівень (норма) сподіваних прибутків повинен бути не меншим, ніж 25%. ■

Уникнення банкрутства при наданні кредиту

Розглянемо ще одну ситуацію, коли інвестор вкладає в звичайні акції лише частину власного капіталу, залишаючи певну частку на збереження під майже безризиковий відсоток r_0 (державні короткотермінові цінні папери). Яка буде при цьому величина ймовірності банкрутства?

Якщо A — обсяг наявного капіталу, а x_0A — частка, що залишається на збереження (вкладається в безризикові цінні папери), то банкрутство стає можливим лише тоді, коли

$$x_0A(1 + r_0) + (1 - x_0)A(1 + R) < 0,$$

або

$$R < -(1 + x_0r_0) / (1 - x_0).$$

Тобто в цьому випадку замість величини r_s , яка фігурувала в попередньому випадку, маємо величину $-(1 + x_0r_0) / (1 - x_0)$.

Оцінка за Чебишевим дає ризик банкрутства, що буде меншим, ніж $1/9$, тоді, коли

$$\frac{\sigma}{m + \frac{1 + x_0 r_0}{1 - x_0}} < \frac{1}{3},$$

або

$$m > -\frac{1 + x_0 r_0}{1 - x_0} + 3\sigma. \quad (3.2)$$

Бачимо, що гра на біржі на власний капітал значно безпечніша. Навіть якщо вкласти його лише у ризиковані цінні папери, тобто, коли $x_0 = 0$, то достатнім є виконання умови

$$m > -1 + 3\sigma, \quad (3.3)$$

якщо інвестора задовольняє даний рівень надійності (ризик банкрутства $p_n < 1/9$).

Приклад 3.18. Капітал інвестора становить 100 тис. грн. У безризикові цінні папери він вкладає 25 тис. грн. при річній нормі прибутку 30%. Решту грошей, тобто 75 тис. грн., він збирається вкласти у папери, обтяжені ризиком. Середньоквадратичне відхилення (ризик) цих цінних паперів дорівнює 10%. Інвестор прагне, щоб шанс банкрутства був би для нього не більшим, ніж 1/9.

Яка повинна бути сподівана норма прибутку обтяжених ризиком цінних паперів?

Розв'язання. Маємо, що $r_0 = 30\%$, $x_0 = 25/100 = 0,25$, $\sigma = 10\%$. Використавши формулу (3.2), одержимо:

$$m > - \left((1 + 0,25 \cdot 0,3) / (1 - 0,25) \right) + 3 \cdot 0,1 = - 1,133.$$

Тобто сподівана норма доходу цінних паперів, обтяжених ризиком,

повинна бути не меншою, ніж $-113,3\%$. ■

Приклад 3.19. При виготовленні на експорт набору певних товарів прагнуть, щоб ризик банкрутства був не більшим, ніж $1/9$. У справу вкладають власний капітал обсягом 2 млн грн. Сподіваний (середній) рівень рентабельності дорівнює 10%.

Обчислити, яким має бути значення середньоквадратичного відхилення рівня рентабельності від сподіваної величини.

Розв'язання. Маємо, що $x_0 = 0$, $m = 10\%$. З формули (3.3) одержимо, що $\sigma \leq (m + 1)/3$, тобто $\sigma \leq (0,1 + 1)/3 = 0,367$.

Отже, ризик (середньоквадратичне відхилення) повинен бути не вищим, ніж 36,7%. ■

Аналіз ризику збитків

2.5.1. Зони ризику збитків

Аналіз ризику можна здійснювати також з точки зору можливих (ймовірних) збитків, що є характерними для будь-якого об'єкта (проекту). Для здійснення цього аналізу вводиться поняття областей (зон) ризику. Виділяють такі зони ризику (рис. 2.9):

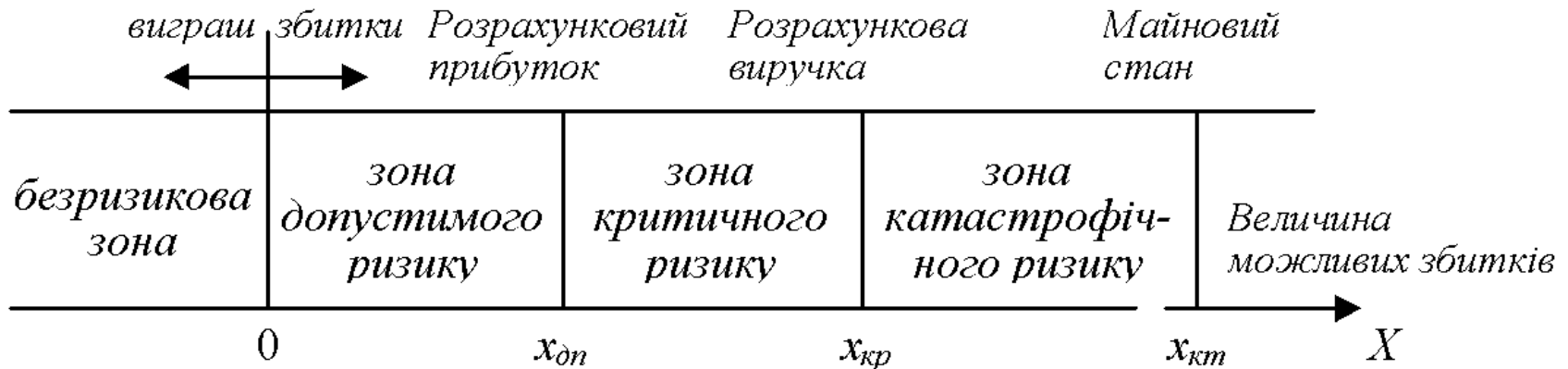


Рис. 2.9. Схема зон ризику і характерних точок

1. Безризикова зона — це область, у якій випадкові збитки не очікуються. Їй відповідають нульові збитки чи перевищення прибутку над сподіваним значенням.

Ця область — область виграшу підприємця.

2. Зона допустимого ризику — це область, у межах якої зберігається економічна доцільність підприємницької діяльності, тобто випадкові збитки можуть мати місце, але вони менші сподіваного прибутку від підприємницької діяльності.

3. Зона критичного ризику — це область, де є наявною можливість збитків, які перевищують величину (обсяг) очікуваних прибутків аж до величини повної обчисленої (розрахункової) виручки від підприємницької діяльності. Величина можливих (ймовірних) збитків у цій зоні перевищує сподіваний прибуток і може призвести до втрати всіх коштів, вкладених підприємцем у справу.

4. Зона катастрофічного ризику — це область можливих збитків, які за своєю величиною (обсягом) перевершують критичний рівень і можуть досягати величини (обсягу) майнового стану підприємця. Катастрофічний ризик може призвести до краху, банкрутства компанії (фірми), її закриття і розпродажу її майна. До категорії катастрофічного ризику слід віднести також ризик, пов'язаний з безпосередньою загрозою для життя чи екологічною катастрофою.

Функція щільності розподілу ймовірності збитків

Найбільш повне уявлення про ризик дає крива щільності розподілу ймовірності збитків. Типову криву такого виду зображено на рис. 2.10.

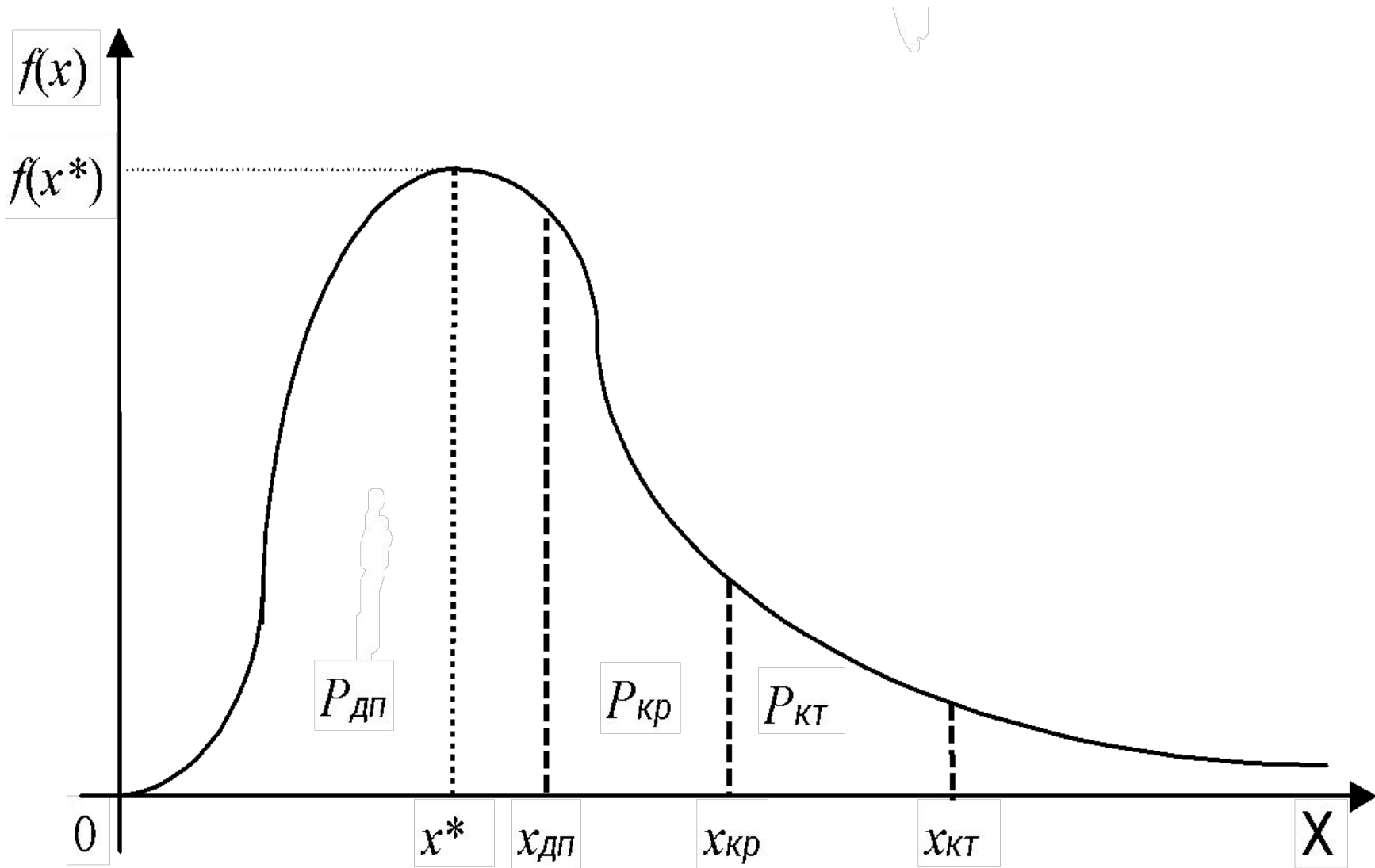
Для побудови цієї кривої прийнято такі гіпотези:

1. Ймовірність нульових збитків (можливість їх уникнути) практично дорівнює нулеві, бо мінімальні збитки завжди мають місце.

2. Ймовірність виключно великих збитків практично дорівнює нулеві, бо реальні збитки (у більшості випадків) мають верхню межу.

3. Існує максимальна щільність ймовірності певного рівня збитків, бо цілком природно допустити, що якийсь певний рівень збитків виявиться найбільш ймовірним.

4. Функція щільності розподілу ймовірності $f(x)$ є неперервною, зростаючою від нуля до свого максимуму та спадною в міру подальшого збільшення рівня можливих збитків. Припущення про неперервність й монотонність кривої щільності розподілу ймовірності настання тих чи інших збитків є дещо умовним, бо збитки можуть мати дискретний характер (бути дискретною випадковою величиною), але в цілому таке припущення є цілком природним.



На рисунках 2.9 та 2.10 позначено найбільш характерні точки щодо величини можливих збитків:

x^* — точка, що відповідає величині найбільш ймовірного (модального) рівня збитків;

x_{dn} — точка, що відповідає величині можливих збитків, за розмірами рівній величині очікуваного (розрахункового) прибутку. Точки $x = 0$ та $x = x_{dn}$ визначають межі зони допустимого ризику;

$x_{кр}$ — точка, що відповідає величині збитків, за розмірами рівній величині повної розрахункової суми виручки. Точки $x = x_{dn}$ та $x = x_{кр}$ визначають межі зони критичного ризику;

$x_{кт}$ — точка, що відповідає величині збитків, за розмірами рівній величині усього майна підприємця. Точки $x = x_{кр}$ та $x = x_{кт}$ визначають межі зони катастрофічного ризику.

Приклад 2.3. Відомо, що відносні збитки (по відношенню до запланованих витрат від даного виду підприємницької діяльності) мають таку функцію щільності розподілу ймовірності:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 e^{-x^2/b^2}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Встановити формули для обчислення моди випадкової величини X , що відображає можливі значення відносних збитків, сподіваної величини відносних збитків, середньоквадратичного відхилення і вивести формулу для обчислення ймовірностей попадання випадкової величини X в допустиму, критичну та катастрофічну зони. Обчислити числові значення цих величин за умови, що $b = 30$, $x_{\text{дп}} = 45\%$, $x_{\text{кр}} = 60\%$, $x_{\text{кт}} = 75\%$.

Розв'язання.

а) Оскільки при $x \geq 0$, $f'(x) = 2axe^{-x^2/b^2} \left(1 - x^2/b^2\right)$,

то з рівняння $f'(x) = 0$ отримуємо, що модальне значення випадкової величини X (значення, в якому функція щільності ймовірності $f(x)$ досягає свого максимуму) досягається в точці $x = b$, тобто $x^* = Mo(X) = b$.

Якщо врахувати, що $f(0) = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, то схематичному графіку функції щільності $f(x)$ відповідає графік, поданий на рис. 2.10.

Оскільки $f(x)$ є функцією щільності розподілу ймовірності, то, скориставшись умовою нормування $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$, отримуємо:

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} ax^2 e^{-x^2/b^2} dx = \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^{+\infty} ax^2 e^{-x^2/b^2} dx = 0 + ab^3 \sqrt{\pi}/4 \Rightarrow a = 4/b^3 \sqrt{\pi},$$

тобто функцію щільності можна записати у такому вигляді:

$$f(x) = \frac{4x^2}{b^3 \sqrt{\pi}} e^{-x^2/b^2}.$$

Сподіване значення величини відносних збитків (математичне сподівання випадкової величини X):

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^{+\infty} \frac{4x^2}{b^3 \sqrt{\pi}} e^{-x^2/b^2} dx = \frac{2b}{\sqrt{\pi}} \approx 1,1284b.$$

Дисперсія відносних збитків:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - (M(X))^2 = \int_0^{+\infty} x^2 \frac{4x^2}{b^3 \sqrt{\pi}} e^{-x^2/b^2} dx - \frac{4b^2}{\pi} = b^2 \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{\pi} \right) \approx 0,227b^2.$$

Середньоквадратичне відхилення відносних збитків:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} \approx 0,4762b.$$

З урахуванням того, що $b = 30\%$, отримуємо:

$$x^* = Mo(X) = b = 30\%; \quad M(X) \approx 1,128 \cdot b = 33,84\%; \\ \sigma(X) \approx 0,4762 \cdot b = 14,286\%.$$

Ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал $[\alpha; \beta]$ можна обчислити за формулою:

$$P(\alpha \leq x \leq \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{4x^2}{b^3 \sqrt{\pi}} e^{-x^2/b^2} dx = F(x) \Big|_{\alpha}^{\beta} = F(\beta) - F(\alpha),$$

де $F(x) = 2(\Phi(t) - t\varphi(t)) \Big|_{t = x\sqrt{2}/b}$, $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$ — функція

Гауса, $\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-t^2/2} dt$ — функція Лапласа (ці функції

табульовані, і їх значення можна знайти в довідниках, підручниках з теорії ймовірностей та математичної статистики).

Отже, ймовірності попадання величини відносних збитків відповідно в зони допустимого, критичну та катастрофічну можна обчислити за формулами:

$$P_{\partial n} = P(0 \leq X < x_{\partial n}) = F(x_{\partial n}) - F(0) = 2(\Phi(t) - t\varphi(t)) \Big|_0^{t_{\partial n}},$$

$$\text{де } t_{\partial n} = x_{\partial n} \sqrt{2/b};$$

$$P_{\partial n} = P(x_{\partial n} \leq X < x_{кр}) = F(x_{кр}) - F(x_{\partial n}) = 2(\Phi(t) - t\varphi(t)) \Big|_{t_{\partial n}}^{t_{кр}},$$

$$\text{де } t_{кр} = x_{кр} \sqrt{2/b};$$

$$P_{км} = P(x_{кр} \leq X < x_{км}) = F(x_{км}) - F(x_{кр}) = 2(\Phi(t) - t\varphi(t)) \Big|_{t_{кр}}^{t_{км}},$$

$$\text{де } t_{км} = x_{км} \sqrt{2/b}.$$

Враховуючи, що $b = 30\%$, $x_{\partial n} = 45\%$, $x_{кр} = 60\%$, $x_{км} = 75\%$;

$$t_{\partial n} = 45\sqrt{2}/30 \approx 2,121; t_{кр} = 60\sqrt{2}/30 \approx 2,828;$$

$$t_{км} = 75\sqrt{2}/30 \approx 3,536;$$

$$F(0) = 2(\Phi(0) - 0 \cdot \varphi(0)) = 0;$$

$$F(x_{\text{дн}}) = 2(\Phi(2,121) - 2,121 \cdot \varphi(2,121)) = 2(0,4830 - 2,121 \cdot 0,044) = 0,7794;$$

$$F(x_{\text{кр}}) = 2(\Phi(2,828) - 2,828 \cdot \varphi(2,828)) = 2(0,4976 - 2,828 \cdot 0,0075) = 0,9528;$$

$$F(x_{\text{кт}}) = 2(\Phi(3,536) - 3,536 \cdot \varphi(3,536)) = 2(0,4998 - 3,536 \cdot 0,0008) = 0,9939,$$

отримуємо:

$$P_{\text{дн}} = F(x_{\text{дн}}) - F(0) = 0,7794; \quad P_{\text{кр}} = F(x_{\text{кр}}) - F(x_{\text{дн}}) = 0,1734;$$

$$P_{\text{кт}} = F(x_{\text{кт}}) - F(x_{\text{кр}}) = 0,0411. \blacksquare$$

Слід мати на увазі, що у випадку, коли для двох проектів (A та B)

мають місце співвідношення $P_{\text{дн}}^A > P_{\text{дн}}^B$; $P_{\text{кр}}^A < P_{\text{кр}}^B$; $P_{\text{кт}}^A < P_{\text{кт}}^B$, то

перевага надається проекту A. Якщо ж за умови, що $P_{\text{дн}}^A > P_{\text{дн}}^B$,

можуть мати місце співвідношення $P_{\text{кр}}^A < P_{\text{кр}}^B$ або $P_{\text{кт}}^A < P_{\text{кт}}^B$, то надання

переваги

тому чи іншому проекту стає сумнівним, а проблема прийняття

рішення може розглядатись як задача багатоцільової оптимізації

Ймовірність як один з підходів до оцінки ризику

Оцінюючи ризик, на практиці нерідко обмежуються спрощеними підходами, спираються на один чи кілька головних показників (критеріїв), параметрів, які являють собою найважливіші узагальнені характеристики у даній конкретній ситуації.

У ряді випадків, зокрема в страхуванні, величину (ступінь) ризику визначають як ймовірність настання небажаних наслідків. В цьому випадку

$$W = p_n,$$

де p_n — ймовірність настання небажаних наслідків, W — величина ризику.

При аналізі збитків кожній із запропонованих зон ризику слід поставити у відповідність кількісні показники, критерії ризику.

В прикладних проблемах економічного ризику для оцінки його величини широке використання має ймовірність перевищення заданого рівня збитків. Ця ймовірність обчислюється за формулою:

$$W(x) = P(X \geq x) = 1 - P(X < x) = 1 - F(x).$$

Типовий графік кривої розподілу ймовірностей перевищення певного рівня випадкових збитків зображено на рис. 3.1 (крива $W(x)$).

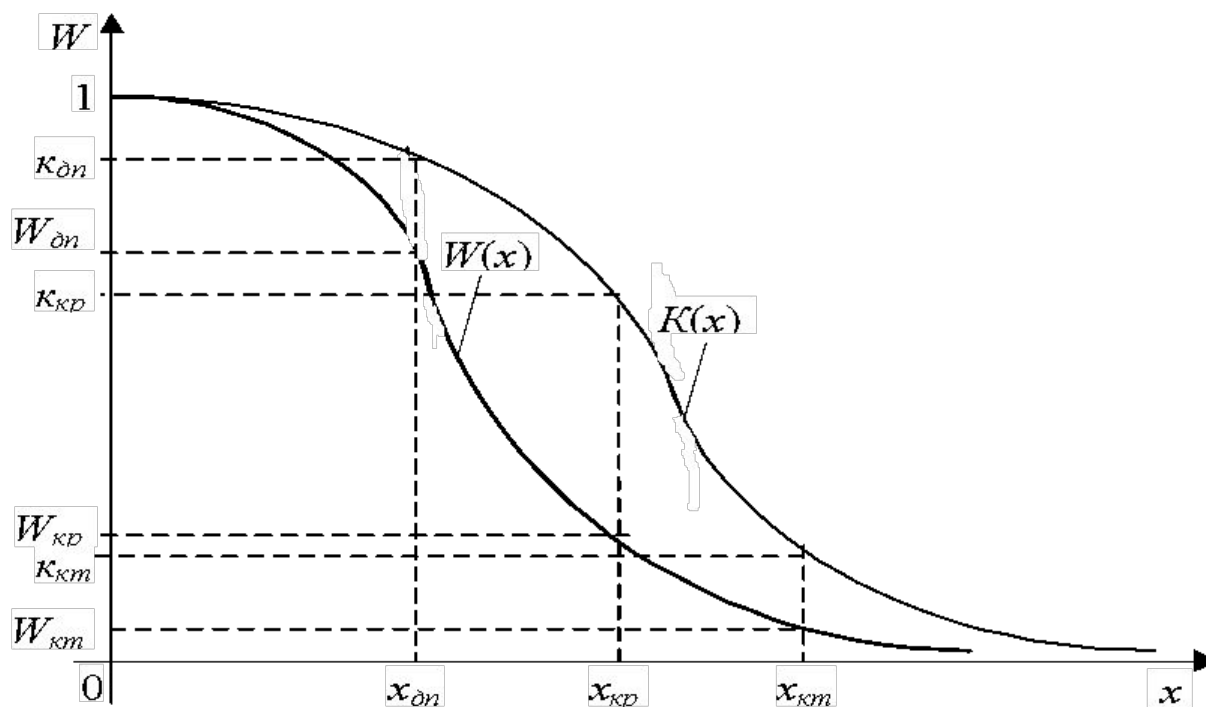


Рис.3.1. Порівняння очікуваної ймовірності перевищення випадкових збитків з гранично допустимою

Виділяють три такі найважливіші базові показники ризи

Показник допустимого ризику:

$$W_{\text{дп}} = W(x_{\text{дп}}) = P(X \geq x_{\text{дп}}),$$

тобто $W_{\text{дп}}$ — це ймовірність того, що збитки виявляться більшими, ніж їх гранично допустимий рівень $x_{\text{дп}}$.

Показник критичного ризику:

$$W_{\text{кр}} = W(x_{\text{кр}}) = P(X \geq x_{\text{кр}}),$$

тобто $W_{\text{кр}}$ — це ймовірність того, що збитки виявляться більшими, ніж їх гранично допустимий критичний рівень $x_{\text{кр}}$.

Показник катастрофічного ризику:

$$W_{\text{кт}} = W(x_{\text{кт}}) = P(X \geq x_{\text{кт}}),$$

тобто $W_{\text{кт}}$ — це ймовірність того, що збитки виявляться більшими, ніж їх гранично допустимий катастрофічний рівень $x_{\text{кт}}$.

Знання цих показників дає змогу виробити міркування щодо можливості прийняти рішення відносно здійснення певної підприємницької діяльності.

Але для остаточного прийняття рішення інформації про значення названих показників недостатньо — необхідно ще задати (встановити, прийняти) їх граничні величини, щоб не потрапити в зону неприйнятної ризику. Такі величини називають *критеріями відповідно допустимого, критичного та катастрофічного ризику* — $\kappa_{\text{дп}}$, $\kappa_{\text{кр}}$, $\kappa_{\text{кт}}$.

Отже, маючи значення трьох показників ризику та критеріїв граничного ризику, приходимо до таких найбільш загальних умов прийнятності рівня ризику в досліджуваному виді підприємництва:

$$W(x_{\text{дп}}) \leq \kappa_{\text{дп}};$$

$$W(x_{\text{кр}}) \leq \kappa_{\text{кр}};$$

$$W(x_{\text{кт}}) \leq \kappa_{\text{кт}}.$$

Графічне пояснення основних умов прийнятності ризику приводиться на рис.3.1 (крива $K(x)$).

Приклад 3.1. При здійсненні багаторазових інвестицій в певну підприємницьку діяльність обчислюється величина збитків у вигляді відсотка величини реальних збитків по відношенню до розрахункової суми виручки. Було встановлено, що обчислена таким чином величина збитків підкоряється нормальному закону розподілу з параметрами $m = 20\%$ (математичне сподівання) та $\sigma = 4\%$ (середньоквадратичне відхилення).

Фірма-інвестор встановила для себе такі критерії ризику: $\kappa_{dn} = 20\%$; $\kappa_{kr} = 5\%$:
 $\kappa_{kt} = 0,1\%$.

Як бути інвестору, якщо керівництво фірми, що домагається отримати інвестиції, вважає реальними такі показники ризику: $x_{dn} = 24\%$; $x_{kr} = 28\%$; $x_{kt} = 32\%$?

Розв'язання. Оскільки у випадку нормального розподілу випадкової величини X інтегральна функція розподілу $F(x) = 0,5 + \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$, де $\Phi(t)$ — функція Лапласа, то

$$\begin{aligned} W_{\partial n} &= P(X > x_{\partial n}) = 1 - P(X < x_{\partial n}) = 1 - F(x_{\partial n}) = \\ &= 1 - 0,5 - \left(\Phi\left(\frac{x_{\partial n} - m}{\sigma}\right)\right) = 0,5 - \Phi\left(\frac{24 - 20}{4}\right) = 0,5 - \Phi(1) = 0,5 - 0,3413 = 0,1587, \end{aligned}$$

тобто $W_{\partial n} = 0,1587 < 0,2 = \kappa_{\partial n}$.

Аналогічно знаходимо, що

$$W_{кр} = P(X > x_{кр}) = 0,5 - \Phi(2) = 0,5 - 0,4772 = 0,0228,$$

тобто $W_{кр} = 0,0228 < 0,05 = \kappa_{кр}$;

$$W_{кт} = P(X > x_{кт}) = 0,5 - \Phi(3) = 0,5 - 0,49865 = 0,00135,$$

тобто $W_{кт} = 0,00135 > 0,001 = \kappa_{кт}$.

Виходячи з того, що $W_{кт} > \kappa_{кт}$, а також враховуючи, що інвестори — люди дуже обережні, робимо висновок, що фірмі-прохачу інвестиція не буде надана.

