Системы линейных уравнений и способы их решения

1. ***Общий вид, основные понятия, матричная форма***

Система m линейных уравнений с n неизвестными имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

где $a_{ij}, b_i \in R$

$a_{ij} -$ коэффициенты при неизвестных,

$b_i -$ свободные коэффициенты.

Система линейных уравнений (СЛУ)

Совместная
(имеет хотя бы одно решение)

Несовместная
(не имеет ни одного решения)

Определённая
(имеет единственное решение)

Неопределённая
(имеет более одного решения-
бесконечное множество решений)

В случае неопределённой системы каждое её решение называется **частным решением** системы.

Совокупность всех частных решений называется **общим решением.**

Любую СЛУ можно представить в матричном виде:

$$\grave{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathrm{B}= \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$A \cdot X = B$ - **матричный вид** исходной СЛУ.

A – основная матрица системы,

B – матрица-столбец свободных членов,

X – матрица-столбец неизвестных

1) Метод обратной матрицы

Метод основан на нахождении обратной матрицы, поэтому применим к СЛУ размерности *nxn*.

Рассмотрим СЛУ в матричном виде:

$$1)\ \ AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

$$2)\ \ XA = B \Rightarrow X = BA^{-1}$$

2) Метод последовательного исключения неизвестных (Метод Гаусса)

Рассмотрим СЛУ:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Данный метод применим к СЛУ любой размерности.

Алгоритм метода:

1. Составим расширенную матрицу.

$$\mathbf{A}^* = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

2. С помощью ***элементарных*** преобразований строк расширенную матрицу приведём к треугольному (ступенчатому) виду.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & c_{12} & c_{13} & d_1 \\ 0 & 1 & c_{23} & d_2 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \end{array}\right)$$

3. Вернувшись к системе уравнений, находим неизвестные.

Элементарными преобразованиями матрицы называют:

- Умножение какой-нибудь строки (столбца) на отличное от нуля число.
- Прибавление к какой-нибудь строке (столбцу) другой её строки (столбца), умножение на любое число, отличное от нуля.
- Перестановку местами любых двух строк.

3) Метод Крамера

Метод основан на вычислении определителей, поэтому применим к СЛУ размерности *nxn*.

Рассмотрим СЛУ:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Введем следующие обозначения:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \vdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

<u>Теорема</u>. Если $\Delta \neq 0$, то СЛУ имеет единственное решение

$x_k = \dfrac{\Delta_k}{\Delta}$, где $k = \overline{1, n}$. (Формулы Крамера)

Алгоритм метода:

1) Составим главный определитель - **Δ**

$$\Delta = \begin{pmatrix} a11 & a12 \dots a1n \\ a21 & a22 \dots a2n \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ an1 & an2 \dots ann \end{pmatrix}$$

- определитель системы, определитель основной матрицы.

2) Составим определитель - **Δ1**

$$\Delta 1 = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} b1 \\ b2 \\ \dots \\ bn \end{matrix}} & \begin{matrix} a12 \dots a1n \\ a22 \dots a2n \\ \dots\dots\dots \\ an2 \dots ann \end{matrix} \end{pmatrix}$$

- *получается из главного определителя заменой 1-го столбца столбцом свободных членов.*

3) Составим определитель - **Δ2**

$$\Delta 2 = \begin{pmatrix} a11 & b1 \ldots & a1n \\ a21 & b2 \ldots & a2n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ am1 & bn \ldots & ann \end{pmatrix}$$

-получается из главного определителя заменой 2-го столбца столбцом свободных членов.

4) Составим определитель - **Δk**

$$\Delta k = \begin{pmatrix} a11 & a12 \ldots & b1 \\ a21 & a22 \ldots & b2 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ an1 & an2 \ldots & bn \end{pmatrix}$$

-получается из главного определителя заменой n-го столбца столбцом свободных членов.

5) Найдем неизвестные $x_k = \frac{\Delta_k}{\Delta}$