Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
Кафедра высшей математики БГУИР

Лекция 1

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
Кафедра высшей математики БГУИР

Комплексные числа

Пусть z – комплексное число, заданное:

– в алгебраической форме $z = x + i\,y$;

– в тригонометрической форме $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$;

– в показательной форме $z = |z|\,e^{i\varphi}$.

Множество всех комплексных чисел обозначается $\boldsymbol{C}$.

Так как каждому комплексному числу $z = x + i\,y$ может быть поставлена в соответствие точка (x, y) на плоскости XY, то эта плоскость называется **комплексной плоскостью** и обозначается $\boldsymbol{C}$.

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
Кафедра высшей математики БГУИР

Комплексные числа

Расстояние между двумя комплексными числами $z_1 = x_1 + i\,y_1$ и $z_2 = x_2 + i\,y_2$ определяется равенством

$$\rho(z_1, z_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\,.$$

Уравнение окружности на комплексной плоскости радиусом r с центром в точке $z_0 = x_0 + i\,y_0$:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2\,.$$

В терминах комплексных чисел уравнение окружности примет вид:

$$|\,z - z_0\,| = r\,.$$

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
Кафедра высшей математики БГУИР

Окрестность точки на комплексной плоскости

Для любого $\varepsilon > 0$ множество всех точек $z \in \mathbf{C}$, удовлетворяющих неравенству $|z - z_0| < \varepsilon$, образует внутренность круга радиусом ε с центром в точке z_0.

Это множество называется **ε–окрестностью** точки z_0, и обозначается $U_\varepsilon(z_0)$.

Если из этой окрестности исключить точку z_0, то получим **проколотую ε–окрестность** точки z_0, которая обозначается $\overset{\circ}{U}_\varepsilon(z_0)$.

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
Кафедра высшей математики БГУИР

Последовательность комплексных чисел

Рассмотрим последовательность комплексных чисел

$$(z_n) = (x_n + i\,y_n),$$

где (x_n) и (y_n) – последовательности действительных чисел.

Комплексное число $A = a + i\,b$ называется **пределом последовательности комплексных чисел** $(z_n) = (x_n + i\,y_n)$, если для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ существует такое число $N = N(\varepsilon) > 0$, что для всех $n \geq N$ выполнено неравенство $|z_n - A| < \varepsilon$.

Обозначение предела: $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = A.$

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
Кафедра высшей математики БГУИР

Последовательность комплексных чисел

Аналогично последовательности действительных чисел можно доказать, что всякая сходящаяся последовательность комплексных чисел ограничена.

Последовательность комплексных чисел $(z_n) = (x_n + i\,y_n)$ сходится к числу $A = a + i\,b$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = b.$$

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
Кафедра высшей математики БГУИР

Последовательность комплексных чисел

Последовательность комплексных чисел $(z_n) = (x_n + i\,y_n)$, называется **сходящейся к бесконечности**, или к **бесконечно удалённой точке** $z = \infty$, если $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = \infty$.

Обозначение предела: $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$.

Это означает, что для любого сколь угодно большого числа $R > 0$ существует номер N такой, что для всех $n \geq N$ выполнено неравенство $|z_n| > R$.

Окрестностью бесконечно удалённой точки $z = \infty$ называется множество $|z| > R$, то есть внешность круга радиусом R с центром в начале координат.

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
Кафедра высшей математики БГУИР

Понятие функции комплексной переменной

Определение:

Пусть комплексная переменная $z = x + i\,y$ определена в некоторой области D.

Новая комплексная переменная $w = f(z)$ называется **функцией комплексной переменной** z, если каждому значению $z \in D$ поставлено в соответствие по некоторому правилу одно или большее число значений w.

Если такое значение только одно, то функция $f(z)$ называется **однозначной**.

Если значений w несколько, то функция $f(z)$ называется **многозначной**.

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
Кафедра высшей математики БГУИР

Понятие функции комплексной переменной

Функция $w = f(z) = f(x + i\,y)$ преобразует комплексное число $z = x + i\,y$ в комплексное число $w = u + i\,v$, при этом в общем случае

$$w = f(x + i\,y) = u(x, y) + i\,v(x, y).$$

Действительная функция $u(x,y)$ называется **действительной частью** функции $w = f(z)$ и обозначается

$$\operatorname{Re} f(z) = u(x, y).$$

Действительная функция $v(x,y)$ называется **мнимой частью** функции $w = f(z)$ и обозначается

$$\operatorname{Im} f(z) = v(x, y).$$

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
Кафедра высшей математики БГУИР

Предел ФКП в точке

Определение 1:

Пусть функция $w = f(z)$ определена в проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}(z_0)$ точки z_0. Число $A = a + i\,b$ называется **пределом** функции $f(z)$ в точке z_0, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое число $\delta > 0$, что для всех $z \in \overset{\circ}{U}_{\delta}(z_0)$ выполняется неравенство $|\,f(z) - A\,| < \varepsilon$.

Обозначение:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = A.$$

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
Кафедра высшей математики БГУИР

Предел ФКП в точке

Определение 2:

Число $A = a + i\,b$ является **пределом** функции $f(z)$ в точке z_0, если для любой последовательности комплексных чисел (z_n), где $z_n \in \overset{\circ}{U}(z_0)$, сходящейся к z_0, соответствующая последовательность значений $\left(f(z_n)\right)$ сходится к числу A при $n \to \infty$.

При определении предела функции $f(z)$ в точке z_0 сама точка z_0 из рассмотрения исключается.

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
Кафедра высшей математики БГУИР

Свойства ФКП, имеющей предел в точке

1. Единственность предела

Если функция $f(z)$ имеет предел в точке z_0, то он единственный.

2. Ограниченность функции

Функция $f(z)$, имеющая предел в точке z_0, ограничена в некоторой проколотой окрестности этой точки.

То есть существует константа $K > 0$ такая, что $|f(z)| < K$ для $\forall z \in \overset{\circ}{U}(z_0)$.

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
Кафедра высшей математики БГУИР

Свойства ФКП, имеющей предел в точке

3. Ненулевое значение функции в окрестности предела

Если $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A \neq 0,$ то существует проколотая окрестность $\overset{\circ}{U}(z_0)$ точки z_0, в которой $f(z) \neq 0.$

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
Кафедра высшей математики БГУИР

Свойства ФКП, имеющей предел в точке

4. Арифметические операции над пределами

Если $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A, \quad \lim\limits_{z \to z_0} g(z) = B,$ то:

1) $$\lim_{z \to z_0} \left(f(z) \pm g(z) \right) = \lim_{z \to z_0} f(z) \pm \lim_{z \to z_0} g(z) = A \pm B;$$

2) $$\lim_{z \to z_0} \left(f(z) \cdot g(z) \right) = \lim_{z \to z_0} f(z) \cdot \lim_{z \to z_0} g(z) = A \cdot B;$$

3) $$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\lim\limits_{z \to z_0} f(z)}{\lim\limits_{z \to z_0} g(z)} = \frac{A}{B}, \quad B \neq 0.$$

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
Кафедра высшей математики БГУИР

Непрерывность ФКП в точке

Определение:

Функция $f(z)$, определённая в некоторой окрестности точки z_0, называется **непрерывной** в ней, если

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Если функция $f(z)$ непрерывна в каждой точке множества D, то она называется **непрерывной** на множестве D.

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
Кафедра высшей математики БГУИР

Непрерывность ФКП в точке

Так как функцию $f(z)$ комплексной переменной $z = x + i\,y$ можно представить в виде $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$, то можно сделать вывод, что функция $f(z)$ непрерывна в точке $z_0 = x_0 + i\,y_0$ тогда и только тогда, когда функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ непрерывны в точке (x_0,y_0).

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
Кафедра высшей математики БГУИР

math.mmts-it.org